

电路的暂态分析

在前面所讨论的电路中,当电源为直流或做周期性变化时,电路中各部分的电流和电压也都是直流的或是按周期性规律变化的,电路的这种工作状态称为稳态。但在自然界中,各种事物的运动过程通常还存在着稳态之间的过渡状态,甚至一直处于不稳定的状态。相对于工程实际中的稳态,过渡状态通常是较短的,因而又称为暂态。例如,当列车停靠在车站时其速度为零,是一种稳态;离站后,车速从零逐渐增加,达到某一速度(如 200 km/h)后稳定运行,则是另一种稳态。列车从静止加速到 200 km/h,是必须经过一定时间的,这段时间内列车的运行过程就是暂态过程。又如,打开教室前的投影机,屏幕由不亮到亮有一个暂态过程。类似的现象在电路中是大量存在的。本书仅讨论一阶线性电路在直流激励下的暂态过程。

2.1 暂态过程

在图 2.1.1 所示的电路中,灯泡 R 与电感 L 及开关 S 串联后接到直流电源上,开关 S 闭合以前,电路中没有电流,灯泡不亮,这是一种稳态;开关 S 闭合接通电源后,灯泡逐渐亮起来,达到某一亮度后,就维持这一亮度,说明电路中维持一恒定电流,这又是一种稳定状态。而灯泡从不亮(电路中电流为零)到维持一定亮度(对应于一恒定电流),在串联线圈的情况下是要经过一定时间的,也就是说,电路中的电流从零增加到某一恒定电流是需要一定时间的,这就是 RL 电路接通直流电源的暂态过程。一般来说,电路从一种稳态变化到另一种稳态的中间过程称为电路的暂态过程。引发电路暂态过程的电路变化称为换路。

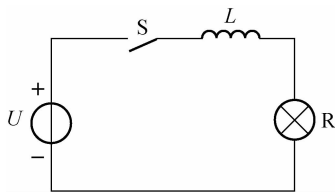


图 2.1.1 灯泡与电感串联

研究电路中的暂态过程是有实际意义的。例如,有些电子电路中利用电容充电和放电的过程来实现一些特定功能,如积分电路、微分电路等。又如,在电力系统中,暂态过程的出现常常引起过电压和过电流,若不采取一定的保护措施,就可能损坏电气设备。因此,我们要对电路的暂态过程进行研究,以便掌握其规律。本章主要对线性电路中一阶 RC 电路的暂态过程做较深入的分析。

在电路中引起暂态过程的原因是什么呢?

先来观察一个实验,实验电路如图 2.1.2 所示。三个灯泡分别串联 R 、 L 和 C 后再并联在一起接入电路。当开关 S 接通时会发现,电阻支路中的灯泡立即发亮,而且其亮度稳定不变,说明这一支路没有经历暂态过程,而是立即进入了新的稳态;电容支路的灯泡也是立即

点亮,但逐渐由亮变暗,最后完全暗下来,说明电容支路经历了暂态过程;电感支路的灯泡是由暗逐渐变亮,最后在一定亮度上稳定下来,说明电感支路也经历了暂态过程。比较上述三种情况可以看出,开关S接通后,并不是所有支路都要经历暂态过程,电阻支路就没有出现暂态过程,这是因为电阻元件是耗能元件。而电容支路和电感支路分别含有储能元件C和L,实际

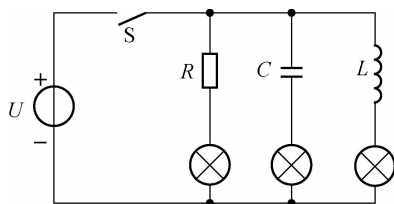


图 2.1.2 灯泡串联不同元件的比较

中储能元件中的能量是不能突变的,否则意味着功率为无穷大($P = \frac{dW}{dt} = \infty$),这是不现实的,因而这两个支路产生了暂态过程。从这个实验可以看出,引起暂态过程的原因有两个:电路含有储能元件;换路。电路中电源的接通或断开、电路的改接、电源的变化、电路参数的变化等,都属于换路。换路后,含有储能元件的电路即出现暂态过程。

2.2 换路定则和电路初始值的计算

2.2.1 换路定则

换路定则阐明的是换路瞬间电路元件的电压和电流的变化规律。由于暂态过程中的电压、电流既不是直流也不是周期性交流,所以某些分析稳态电路的方法、公式不一定适用,但KCL、KVL仍适用。 R 、 L 、 C 三种元件的VCR则要用基本关系式表示: $u = iR$, $u = L \frac{di}{dt}$, $i = C \frac{du}{dt}$;若电路是线性的,叠加原理也适用;另外,还要应用由于储能元件能量不能突变而反映到电路上的特殊规律——换路定则。

在如图2.2.1(a)所示的RL电路中,开关S闭合以前,电路中的电流 $i_L = 0$,电感线圈中的磁通 $\Phi = 0$;当S闭合时,由于磁场能量 $W = \frac{1}{2} L i_L^2$ 不能突变,电流 i_L 也就不能突变,而必须从零逐渐变为 U/R 。

为简化问题,可认为换路是瞬时完成的。一般把换路瞬间取为计时起点,即取 $t = 0$,并将换路前的终了时刻记为 $t = 0_-$,换路后的初始时刻记为 $t = 0_+$,则可得到如下结论:在换路后的一瞬间,如果电感两端的电压保持为有限值,则电感中的电流应当保持换路前一瞬间的原有值而不能突变,即

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (2.2.1)$$

对于一个原来没有电流的电感来说,在换路的瞬间, $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$,电感相当于开路。

同理,在如图2.2.1(b)所示的RC电路中,开关S闭合以前,电容两端的电压 $u_C = 0$,电容极板上的电荷 $q = 0$;当S闭合时,由于电场能量 $W = \frac{1}{2} C u_C^2$ 不能突变,电压 u_C 也不能突变,而必须从零逐渐变为 U 。

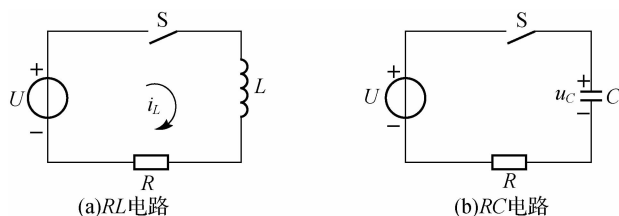


图 2.2.1 RL 与 RC 电路的换路

同样,对电容可得到如下结论:在换路后的瞬间,如果电容的充电电流保持为有限值,则电容两端的电压应当保持换路前一瞬间的原有值而不能突变,即

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (2.2.2)$$

对于一个原来不带电荷的电容来讲,在换路的瞬间, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 电容相当于短路。

必须指出,电路换路时,只是电感中的电流和电容两端的电压不能突变,而电路中其他部分的电压和电流,包括电感两端的电压和电容的充、放电电流都是可以突变的。

2.2.2 电路初始值的计算

为描绘电路的暂态过程,首先必须确定暂态过程的初始值。换路定则是分析电路暂态过程的一个重要依据,可以用来确定暂态过程的初始值。其步骤为:先根据换路定则求出 $i_L(0_+)$ 和 $u_C(0_+)$,再根据基尔霍夫定律求出其他暂态量的初始值。

例 2.2.1 在如图 2.2.2(a)所示电路中, $U=100\text{ V}$, $R_2=100\ \Omega$, 开关 S 原处于位置 1, 电路达到稳态。试求 S 由位置 1 转接到位置 2 时, 电路中 R_1 、 R_2 和 C 的电压和电流的初始值。

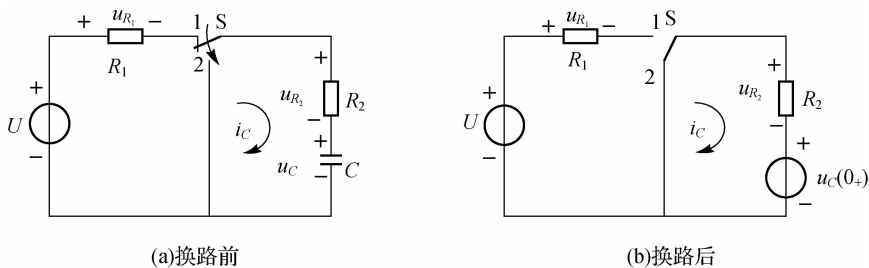


图 2.2.2 例 2.2.1 图

【解】 选定有关电压和电流的参考方向,如图 2.2.2(a)所示。由于电容在直流稳定状态下相当于开路,所以首先求换路前电容两端的电压

$$u_C(0_-) = U = 100\text{ V}$$

其次,作出 $t=0_+$ 时的等效电路。当 S 转到位置 2 上时,根据换路定则,有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 100\text{ V}$$

等效电路如图 2.2.2(b)所示。根据 $t=0_+$ 时的等效电路,运用 KVL 和 VCR,得

$$u_{R_2} + u_C = 0$$

所以

$$\begin{aligned}
 u_{R_2}(0_+) &= -u_C(0_+) = -100 \text{ V} \\
 i_{R_2}(0_+) &= u_{R_2}(0_+)/R_2 = -100/100 = -1 \text{ A} \\
 i_C(0_+) &= i_{R_2}(0_+) = -1 \text{ A}
 \end{aligned}$$

对 R_1 , 则有

$$\begin{aligned}
 i_{R_1}(0_+) &= 0 \\
 u_{R_1}(0_+) &= R_1 i_{R_1}(0_+) = 0
 \end{aligned}$$

例 2.2.2 如图 2.2.3(a) 所示电路, 开关 S 断开时, 电路已处于稳态。已知 $U=10 \text{ V}$, $R_1=6 \Omega, R_2=4 \Omega$ 。求当开关 S 闭合后 i_1, i_2, i_3 及 u_L 的初始值。

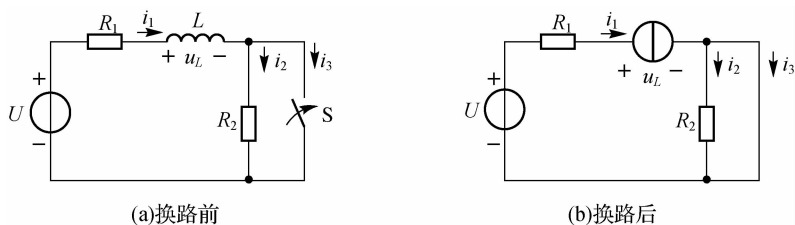


图 2.2.3 例 2.2.2 图

【解】 有关电流和电压的参考方向如图 2.2.3(a) 所示。

首先, 求换路前流过电感的电流。开关 S 闭合前, 有

$$\begin{aligned}
 i_1(0_-) &= i_2(0_-) = U/(R_1 + R_2) = 10/(6 + 4) = 1 \text{ A} \\
 i_3(0_-) &= 0
 \end{aligned}$$

其次, 作出 $t=0_+$ 时的等效电路。S 闭合后, 根据换路定则有

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = 1 \text{ A}$$

等效电路如图 2.2.3(b) 所示。 $t=0_+$ 瞬间 L 相当于一个电流源, 其电流为流过电感的电流的初始值。由于 R_2 被短路, 所以

$$i_2(0_+) = 0$$

根据 $t=0_+$ 时的等效电路, 运用 KCL 和 VCR, 有

$$i_3(0_+) = 1 \text{ A}$$

根据 KVL, 有

$$U = i_1(0_+) R_1 + u_L(0_+)$$

所以

$$u_L(0_+) = U - i_1(0_+) R_1 = 10 - 1 \times 6 = 4 \text{ V}$$

2.3 RC 电路的零输入响应和零状态响应

在 RC 电路中, 根据换路时电容两端电压的不同及换路后是否有电源作用于电容, 可将暂态过程分为三种情形: 电容上的初始电压不为零, 但换路后没有电源作用; 电容上的初始电压为零, 但换路后有电源作用; 电容上的初始电压不为零, 换路后又有电源作用。三种情形分别对应了 RC 电路的零输入响应、零状态响应以及二者的叠加(全响应)。

2.3.1 RC 电路的零输入响应

在如图 2.3.1(a) 所示电路中, 电容 C 被电压源充电到 U , 并在 $t=0$ 时换路。换路瞬间,

第 1 篇 电路基础

电容两端电压不能突变,所以此时电容虽已与电源脱离,但仍具有初始电压 U 。换路后,电容通过 R 放电,电流由零突变为 $-U/R$ 。以后电容两端电压逐渐减小,直至为零。放电电流也相应地由 $-U/R$ 逐渐变为零。在这个过程中,电容储存的电场能量逐渐为电阻所消耗,转化为热能。在 $t \geq 0$ 时,电路中并无电源的作用,称为零输入。这种由原始储能引起的电路的响应,称为零输入响应。

根据 KVL 可得

$$u_C = -iR$$

但 $i = C \frac{du_C}{dt}$, 代入上式就得到以 u_C 为变量的微分方程, 即

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (2.3.1)$$

这是一阶常系数线性齐次微分方程, 它的解是指数函数, 即

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

式中, A 为积分常数, 由初始条件, 即 u_C 的初始值决定。

u_C 的初始值可根据换路定则求得, 即

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U$$

所以

$$u_C(0_+) = Ae^0 = U$$

于是可得到满足初始条件的微分方程的解为

$$u_C = Ue^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.3.2)$$

这就是 C 对 R 放电过程中电容两端电压 u_C 的表达式。

电路中的暂态电流, 即电容放电电流为

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = -Ie^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.3.3)$$

式中, $I = \frac{U}{R}$ 为初始电流, 负号表示电流实际方向与图中参考方向相反, 电路处于电容放电状态。

电阻上的电压为

$$u_R = iR = -Ue^{-\frac{t}{RC}}$$

令 $\tau = RC$, 称为 RC 电路的时间常数。 τ 具有时间量纲, 即

$$[\tau] = [RC] = \Omega \cdot F = V/A \cdot C/V = C/A = s$$

所以 τ 的单位是 s 。

这样前面表述暂态过程的各式可以表示为

$$u_C = Ue^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R = -Ue^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = -Ie^{-\frac{t}{\tau}}$$

u_C 、 u_R 和 i 均为 RC 电路的零输入响应, 它们的变化曲线如图 2.3.1(b) 所示。

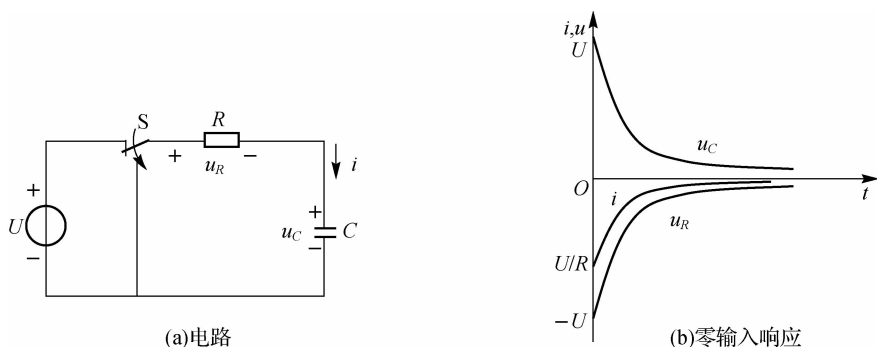


图 2.3.1 RC 电路的零输入响应

通过以上分析可以看出,RC 串联电路中的电压和电流是按同一指数规律变化的。而且电路的时间常数 τ 越小,变化(衰减)越快。从理论上讲,暂态过程要到 $t=\infty$ 时才结束。但实际上,经过 $(3\sim 5)\tau$ 就可以认为暂态过程已基本结束。

电压 u_C 随时间变化的数值见表 2.3.1。由表 2.3.1 可以看出,时间常数 τ 是电容两端电压 u_C 衰减到初始值的 36.8% 所需的时间。当 $t=5\tau$ 时, u_C 只有初始值的千分之七,也就是说,从数值上讲,放电过程已经完成了 99.3%,这在工程上认为已经完成。

表 2.3.1 电容放电时其两端电压随时间的变化

| t | 0 | τ | 2τ | 3τ | 4τ | 5τ | ... | ∞ |
|-------|-----|----------|----------|----------|----------|----------|-----|----------|
| u_C | U | $0.368U$ | $0.135U$ | $0.050U$ | $0.018U$ | $0.007U$ | ... | 0 |

时间常数 $\tau=RC$ 仅由电路的参数决定, τ 越大,衰减得越慢,电路的暂态过程越长。这是因为当电压一定时,电容 C 越大,储存的电场能量就越大,将其释放完所需的时间就越长;电场能量的释放又是通过电流来实现的,电阻 R 越大,放电电流越小,放电时间越长。

在有些电子设备中,如现代计算机的大部分电路,RC 电路的时间常数 τ 很小,只有纳秒 (10^{-9} s) 级,放电时间极短;但在有的系统中,如电视机显像管的高压电路,时间常数可能极大,其放电时间常常达到数小时甚至数天。

例 2.3.1 在图 2.3.2 所示的 RC 串联电路中,已知 $R=10\text{ k}\Omega$, $C=4\text{ }\mu\text{F}$,开关 S 未闭合前,电容已充过电,电压为 10 V。求开关闭合 120 ms 后电容上的电压。

【解】 电压和电流的参考方向如图 2.3.2 所示。

$$\tau=RC=10\times 10^3\times 4\times 10^{-6}=4\times 10^{-2}\text{ s}=40\text{ ms}$$

当 $t=120\text{ ms}$ 时,电容上的电压为

$$u_C(120\text{ ms})=10e^{-\frac{120}{40}}=10e^{-3}\text{ V}\approx 0.5\text{ V}$$

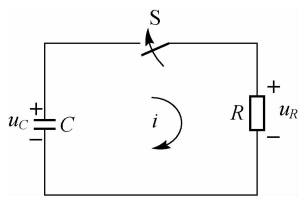


图 2.3.2 例 2.3.1 电路

2.3.2 RC 电路的零状态响应

若换路前电路中的储能元件无储能,则称电路为零初始状态。处于零初始状态的电路由施加于电路的输入信号引起的响应称为零状态响应。

在如图 2.3.3(a)所示的 RC 充电电路中,开关 S 未闭合前,电容两端电压为零,即处于

零初始状态。当 $t=0$ 时开关闭合, RC 串联电路与电压源接通。有关电压、电流的参考方向如图 2.3.2(a) 所示。

根据 KVL, 有

$$u_R + u_C = U$$

而

$$u_R = iR, i = C \frac{du_C}{dt}$$

代入得

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U \quad (2.3.4)$$

此为一阶常系数线性非齐次微分方程, 它的解可由特解 u'_C 和相应的齐次微分方程的通解 u''_C 组成, 即

$$u_C = u'_C + u''_C$$

由于式(2.3.4)描述的是开关 S 闭合后的全过程, u_C 的稳态值必定满足该式, 也就是说, u_C 的稳态值 U 可作为微分方程的一个特解:

$$u'_C = U$$

由前述内容可知, 齐次微分方程的通解为

$$u''_C = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

因此, 方程的全解为

$$u_C = u'_C + u''_C = U + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

开关未闭合时, 电容没有充电, 电压 $u_C(0_-) = 0$ 。根据换路定则, 电容两端电压的初始值 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ 。可由这一初始条件来确定系数 A , 代入上式得

$$0 = U + A$$

所以

$$A = -U$$

代回原式, 并令 $\tau = RC$, 于是得

$$u_C = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U - Ue^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.3.5)$$

这就是充电过程中电容两端电压的表达式。式中第一项 $u'_C = U$ 是电容充电电压的稳态值, 称为电压的稳态分量, 它反映了外加激励信号对电路的强制作用, 具有与输入函数相同的形式, 因此也称为强制分量。第二项 $u''_C = -Ue^{-\frac{t}{\tau}}$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时将衰减为 0, 故称为电压的暂态分量, 也称为自由分量。开关闭合瞬间, 电容极板上没有电荷, $u_C = 0$; 然后电源对电容充电, 电容极板上电荷逐渐增多, 电容两端电压也逐渐增大。最后当 u_C 与激励信号相等时, 就达到稳态值 U 。

电容的充电电流为

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

在稳定状态下电容相当于开路, 所以电流 i 的稳态分量为零, 只有暂态分量。在开关闭合瞬间, $u_C = 0$, 这时全部电压都加在电阻 R 上, 暂态电流(充电电流)有最大值 U/R ; 随着 u_C 的逐渐增加, R 上的电压逐渐减小, 暂态电流也逐渐减小并趋向于零。

电阻上的电压为

$$u_R = iR = Ue^{-\frac{t}{\tau}}$$

电路中有关电压、电流随时间变化的曲线如图 2.3.3(b) 所示。可以看出, 充电时电容两端电压从 0 按指数规律上升到稳态值 U , 而电流则从 0 突变到 U/R 后, 按指数规律又下降到 0。

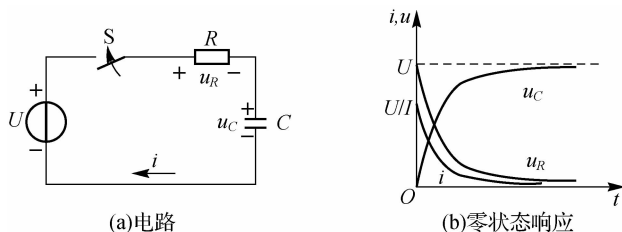


图 2.3.3 RC 电路的零状态响应

同电容放电的情形一样, 电容充电过程的快慢也取决于时间常数 τ 。电容充电时电压 u_C 随时间变化的数值见表 2.3.2。由表可以看出, 时间常数 τ 是电容两端电压 u_C 上升到稳态值的 63.2% 所需的时间。当 $t=5\tau$ 时, u_C 已经达到了稳态值的 99.3%。

表 2.3.2 电容充电时其两端电压随时间的变化

| t | 0 | τ | 2τ | 3τ | 4τ | 5τ | ... | ∞ |
|-------|---|----------|----------|----------|----------|----------|-----|----------|
| u_C | 0 | $0.632U$ | $0.865U$ | $0.950U$ | $0.982U$ | $0.993U$ | ... | U |

例 2.3.2 在图 2.3.3(a) 所示的 RC 串联电路中, 已知 $R=10\text{ k}\Omega$, $C=6\text{ }\mu\text{F}$, $U=100\text{ V}$, 开关 S 未闭合前, 电容未充电, 在 $t=0$ 时开关闭合。

- (1) 求充电时的最大电流。
- (2) 开关闭合后要经历多长时间使 u_C 上升到 80 V?

【解】 (1) 根据零状态响应原理, 开关 S 闭合瞬间电容的充电电流最大, 为

$$i_{\max} = \frac{U}{R} = \frac{100}{10 \times 10^3} \text{ A} = 0.01 \text{ A}$$

- (2) 设开关闭合后, 经过时间 t_1 , 电容两端电压达到 80 V。

$$u_C(t_1) = U(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}})$$

已知 $u_C(t_1) = 80\text{ V}$, $U = 100\text{ V}$, $\tau = RC = 10 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-6} \text{ s} = 0.06\text{ s}$, 代入上式得

$$80 = 100(1 - e^{-\frac{t_1}{0.06}})$$

解得

$$t_1 = 0.06 \ln 5 \approx 0.097 \text{ s}$$

2.4 一阶线性电路的三要素分析法

2.4.1 RC 电路的全响应

如前所述, 施加于电路的输入信号(电压或电流)称为激励。如果原处于非零初始状态的一阶线性电路又受到外加信号的激励, 就会引起复杂一些的响应, 这种响应称为全响应。在如图 2.4.1 所示的 RC 串联电路中, 开关 S 闭合前, 电容两端电压为 U_0 , 即电路处于非零

初始状态, $t=0$ 时开关 S 闭合。有关电压和电流的参考方向如图 2.4.1 所示, 下面分析电路的暂态过程。

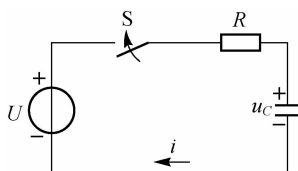


图 2.4.1 讨论全响应的电路

根据 KVL, 可得微分方程:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U \quad (2.4.1)$$

此方程的形式与式(2.3.4)相同, 所以

$$u_C = U + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

但这里与分析零状态响应时的初始条件不同。将非零初始条件 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} U_0 &= U + A \\ A &= U_0 - U \end{aligned}$$

代回原式, 并令 $\tau = RC$, 得

$$u_C = U + (U_0 - U) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0) \quad (2.4.2)$$

这就是 RC 串联电路的全响应, 它是稳态分量与暂态分量之和。变换形式, 全响应又可写成

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (t > 0) \quad (2.4.3)$$

显然, 它是零输入响应和零状态响应之和。全响应的曲线如图 2.4.2 所示。

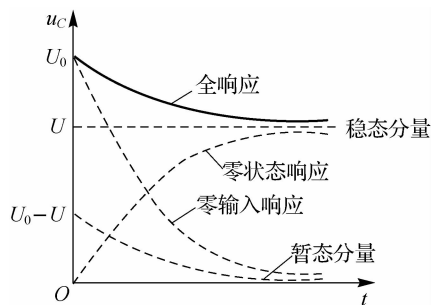


图 2.4.2 RC 电路全响应曲线

2.4.2 一阶线性电路的三要素分析法

前面讨论了 RC 简单串联电路与一直流电源连接所引起的响应, 其结论适合任何只含一个(或可以合并成一个)储能元件(L 或 C)的电路——一阶线性电路。若除储能元件外, 剩余电路比较复杂, 则可以运用戴维南定理将其简化成简单电路, 待求出 u_C 或 i_L 后, 利用 KCL 和 KVL, 进而求出其他未知量。而 u_C 或 i_L 既有确定的初始值, 又有稳定的终了值, 其

间的变化规律也很单一——指数变化,因此,就可以找到一种求解一阶线性电路暂态过程的简便方法——三要素法。

从式(2.4.2)可归纳出求解直流激励下一阶线性电路响应的一般计算公式为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0) \quad (2.4.4)$$

式中, $f(t)$ 表示电路全响应电压或电流的瞬时值; $f(0_+)$ 表示换路后 ($t=0_+$ 时) 电压或电流的初始值; $f(\infty)$ 表示换路后电路中新的电压或电流的稳态值 ($t=\infty$ 时之值); $\tau=RC$, 其中 R 是从储能元件 C 两端看进去的等效电阻(求等效电阻时将电压源短路、电流源开路)。

式(2.4.4)表明,只要已知 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 三个量的值,一阶电路的全响应也就唯一确定了。这三个量称为一阶线性电路的三要素,用三要素求解电路的方法称为三要素法。

下面举例说明这一方法。

例 2.4.1 电路如图 2.4.3 所示,已知 $U=12\text{ V}$, $R_1=1\text{ k}\Omega$, $R_2=2\text{ k}\Omega$, $C=10\text{ }\mu\text{F}$, 开关 S 闭合前电路处于稳态。用三要素法求开关 S 闭合后 u_C 、 i_C 的表达式。

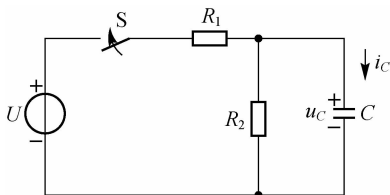


图 2.4.3 例 2.4.1 电路

【解】 (1) 求 $u_C(t)$ 。先求出三要素为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = \frac{2 \times 12}{1 + 2} \text{ V} = 8 \text{ V}$$

$$\tau = RC = (R_1 // R_2) C = \frac{1 \times 2}{1 + 2} \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} \text{ s} = \frac{2}{3} \times 10^{-2} \text{ s}$$

所以

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 8 + (0 - 8) e^{-\frac{t}{\frac{2}{3} \times 10^{-2}}} = 8(1 - e^{-150t}) \text{ V} \end{aligned}$$

(2) 求 $i_C(t)$ 。 $t=0_+$ 瞬间, $u_C(0_+) = 0$, 电路相当于 R_1 与 C 串联, 所以

$$i_C(0_+) = \frac{U}{R_1} = \frac{12}{1 \times 10^3} \text{ A} = 12 \text{ mA}$$

进入稳态后, 充电完毕, 所以

$$i_C(\infty) = 0$$

$$\tau = RC = \frac{2}{3} \times 10^{-2} \text{ s}$$

所以

$$\begin{aligned} i_C(t) &= i_C(\infty) + [i_C(0_+) - i_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 12e^{-150t} \text{ mA} \end{aligned}$$

例 2.4.2 在图 2.4.4 中, $R_1=6\text{ k}\Omega$, $R_2=3\text{ k}\Omega$, $C=2\text{ }\mu\text{F}$, $I_S=2\text{ mA}$, 开关长时间闭合。 $t=0$ 时, 开关 S 断开。试求 $t\geq 0$ 时电容两端的电压 u 。

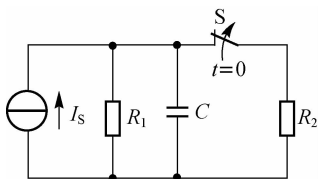


图 2.4.4 例 2.4.2 电路

【解】 电流源两端的电压即为电容两端的电压 u 。

开关 S 未断开时, 电路处于稳态, C 相当于开路, 有

$$u(0_-) = I_S(R_1 // R_2) = 2 \times 10^{-3} \times \frac{6 \times 3}{6 + 3} \times 10^3 \text{ V} = 4 \text{ V}$$

据换路定则有

$$u(0_+) = u(0_-) = 4 \text{ V}$$

换路后得

$$u(\infty) = I_S R_1 = 2 \times 10^{-3} \times 6 \times 10^3 \text{ V} = 12 \text{ V}$$

从 C 两端看进去的等效电阻为

$$R = R_1 = 6 \text{ k}\Omega$$

$$\tau = RC = 6 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6} \text{ s} = 12 \times 10^{-3} \text{ s}$$

代入三要素公式得

$$\begin{aligned} u(t) &= u(\infty) + [u(0_+) - u(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 12 + (4 - 12)e^{-\frac{t}{12 \times 10^{-3}}} \\ &= 12 - 8e^{-\frac{t}{12 \times 10^{-3}}} \text{ V} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

在分析一阶电路时, 常常要绘制出所讨论电量随时间变化的曲线。本题中, 电容两端电压 $u(t)$ 随时间变化的曲线如图 2.4.5 所示。

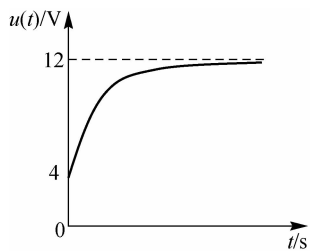


图 2.4.5 例 2.3.2 中 $u(t)$ 的曲线

最后要指出的是, 本章对于 RC 电路暂态过程分析与计算的方法, 完全适用于 RL 电路。由电感与电容特性的对偶性可知, 在 RL 电路暂态过程中, $i_L(t)$ 遵循指数变化规律, 其时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R}$$

据此可方便地对 RL 电路的暂态过程进行分析与计算。

本章小结

(1) 相对于稳态, 暂态在电路中也是普遍存在的。产生暂态的原因, 是电路中存在储能元件——电感和电容。本章研究了一阶电路的暂态过程。

(2) 换路定则:

① $i_L(0_+) = i_L(0_-)$, $u_C(0_+) = u_C(0_-)$, 二者不能突变。

② $u_L(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 可以突变。

③ $i_R(0_+)$ 、 $u_R(0_+)$ 可以突变, 并遵循欧姆定律。

(3) 换路后电路的全响应可分解为零输入响应和零状态响应之和, 但二者不一定同时存在。换路后电路的全响应也可分解为稳态分量和暂态分量之和。

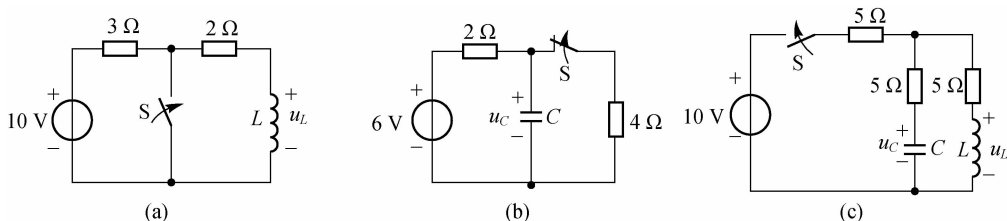
(4) 一阶电路的全响应可用三要素法计算。

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0)$$

式中, $f(\infty)$ 为 $f(t)$ 的稳态值; $f(0_+)$ 为 $f(t)$ 的初始值; $\tau = RC$ 或 $\tau = \frac{L}{R}$, 为电路的时间常数。

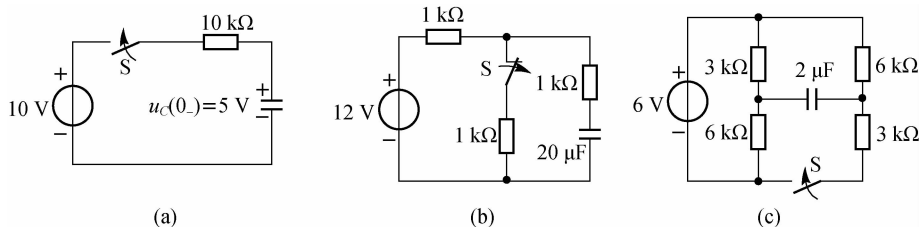
习 题

- 2.1 什么是电路的稳态? 什么是电路的暂态? 产生暂态的原因是什么?
- 2.2 什么是换路? 换路瞬间电容两端的电压和流过电感的电流为什么不能突变?
- 2.3 如何根据换路定则求暂态过程的初始值?
- 2.4 什么是电路的零输入响应? 什么是电路的零状态响应?
- 2.5 电路的暂态过程取决于什么? 如何改变暂态过程的长短?
- 2.6 实际中何时可认为暂态过程已经结束?
- 2.7 电路的全响应等于零输入响应和零状态响应之和, 这是偶然的吗?
- 2.8 使用三要素法是有条件的, 试总结出其条件。
- 2.9 在含有储能元件的电路中, 有换路就会有暂态过程发生, 这种说法对吗? 为什么?
- 2.10 在题图 2.10 中的各个电路原处于稳态, 现将开关 S 突然闭合或断开, 求换路瞬间各支路电流和储能元件两端的电压。



题图 2.10

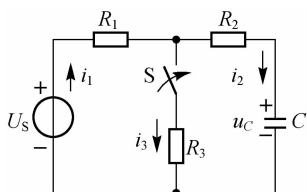
2.11 求如题图 2.11 所示各电路换路后的时间常数。



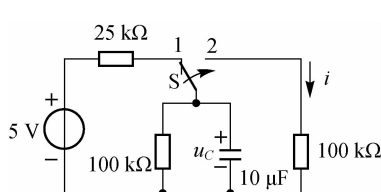
题图 2.11

2.12 在如题图 2.12 所示电路中, $U_S = 20\text{ V}$, $R_1 = R_3 = 4\text{ k}\Omega$, $R_2 = 2\text{ k}\Omega$, $C = 2\text{ }\mu\text{F}$, S 闭合前, 电路处于稳态。求 S 闭合后各支路的电流和 u_C , 并绘制 u_C 的变化曲线。

2.13 在如题图 2.13 所示电路中, S 在位置 1 时已处于稳态。求 S 转向位置 2 后的 $u_C(t)$ 和 $i(t)$ 。



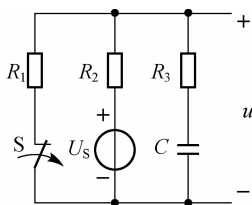
题图 2.12



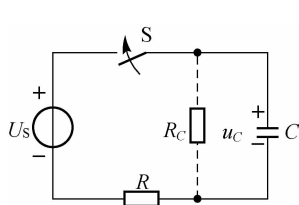
题图 2.13

2.14 在如题图 2.14 所示电路中, $U_S = 250\text{ V}$, $R_1 = R_3 = 10\text{ M}\Omega$, $R_2 = 40\text{ M}\Omega$, $C = 10\text{ pF}$, 开关 S 断开前, 电路处于稳态。求 S 断开后的电压 u , 并画出其变化曲线。

2.15 实际电容器等效为一个电容 C 与一个漏电阻 R_C 的并联, 如题图 2.15 中 C 与 R_C 所示。若 $R = 100\text{ k}\Omega$, $C = 50\text{ }\mu\text{F}$, $U_S = 10\text{ V}$, S 闭合前电路为零状态, S 闭合 2.77 s 后, $u_C = 4\text{ V}$, 试求电容器的漏电阻 R_C 。



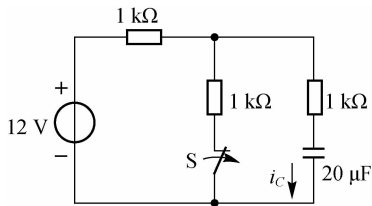
题图 2.14



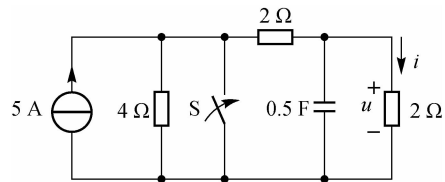
题图 2.15

2.16 在如题图 2.16 所示电路中, S 闭合时电路处于稳态, $t = 0$ 时 S 断开。求换路后的 $i_C(t)$ 和 $t = 2\text{ ms}$ 时电容所储存的能量。

2.17 在如题图 2.17 所示电路中, S 闭合前电路处于稳态, $t = 0$ 时 S 闭合。求 $t \geq 0$ 时的 $u(t)$ 和 $i(t)$ 。



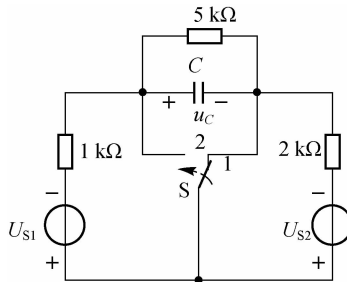
题图 2.16



题图 2.17

2.18 在如题图 2.18 所示电路中, $U_{S1} = U_{S2} = 6\text{ V}$, $t < 0$ 时, S 于位置 1 且电路处于稳态, $t = 0$ 时 S 转向位置 2。

- (1) 求 $t \geq 0$ 时的 $u_C(t)$, 并画出其变化曲线。
- (2) 若 $U_{S2} = -25\text{ V}$, 其他条件不变, 求 $t \geq 0$ 时的 $u_C(t)$ 。



题图 2.18

2.19 用模拟万用表(机械指针式万用表) $R \times 1\text{ k}$ 挡检查容量较大的电容器时, 指针摆动后, 再回到刻度原始处(∞), 说明电容器没有损坏; 指针摆动后, 返回速度的快或慢说明了容量的小与大。试用 RC 电路的暂态分析解释上述现象。