

项目 2 静定结构的内力计算

学习目标

- 掌握多跨静定梁的类型、几何组成、层次图及计算顺序,会作多跨静定梁的内力图。
- 掌握刚架的特点,会作静定平面刚架的内力图。
- 掌握三铰拱的支座反力、内力计算方法,能够确定三铰拱的合理轴线。
- 掌握应用结点法、截面法和联合法计算桁架结构内力的方法。

任务 2.1 多跨静定梁的内力计算

任务导引

多跨静定梁是用若干个中间铰链联结多个梁段,再由相应的支座与基础相联而成的无多余约束的几何不变体系。这种梁一般只受竖向荷载的作用,即水平约束力和轴力一般为零。在工程结构中,常用它来跨越几个相联的跨度,图 2-1 所示为多跨静定梁及其计算简图。多跨静定梁是工程中常见的结构,在进行结构设计时,应先进行其内力的计算。

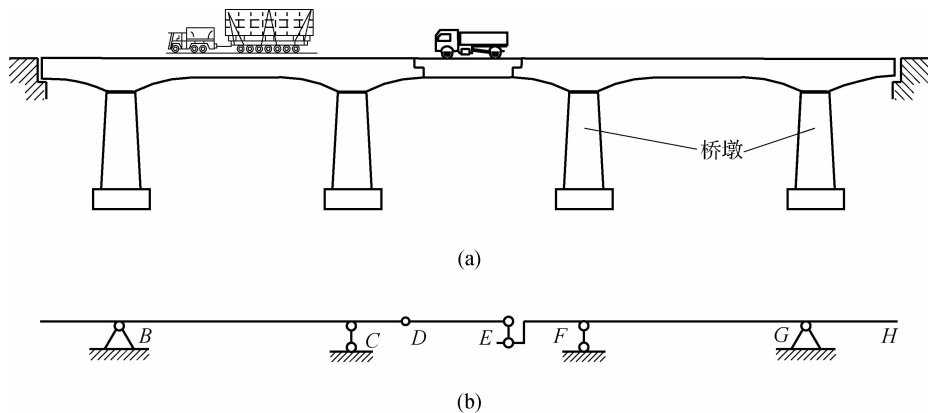


图 2-1

知识点学习

2.1.1 多跨静定梁的类型、几何组成、层次图及计算顺序

1. 多跨静定梁的类型

根据多跨静定梁的几何组成规律,可将多跨静定梁分为以下三种类型:

(1)连续简支型多跨静定梁。连续简支型多跨静定梁的基本梁段可以是一个简支梁,也可以是外伸梁或悬臂梁,基本梁段与基础组成一个无多余约束的几何不变体系。单支座梁段与基本梁段总是用一个中间铰链相联,而与地基则用一个可动铰支座相联。用这种方式组成的多跨静定梁称为连续简支型多跨静定梁,如图 2-2(a)所示。

(2)间隔搭接型多跨静定梁。间隔搭接型多跨静定梁的基本梁段可以是一个简支梁,也可以是外伸梁或悬臂梁。基本梁段与基础组成一个无多余约束的几何不变体系。搭接梁段与其前面的基本梁段及后面的双支座梁段都是用中间铰链相联,搭接梁段无支座约束;后面的双支座梁段与地基则用两个链杆支座约束相联。搭接梁段以间隔方式出现的多跨静定梁称为间隔搭接型多跨静定梁,如图 2-2(b)所示。

(3)混合型多跨静定梁。由简支与间隔搭接混合形成的多跨静定梁称为混合型多跨静定梁,如图 2-2(c)所示。

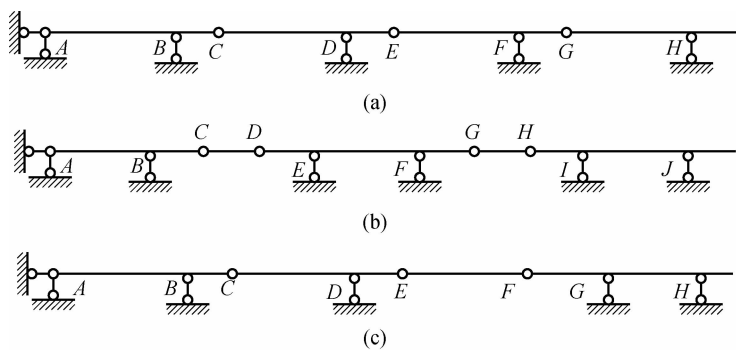


图 2-2

2. 多跨静定梁的几何组成

根据多跨静定梁的几何组成规律,将其各组成部分划分为基本部分和附属部分。

(1)基本部分。基本部分是不依赖于其他部分、能独立与基础组成一个几何不变体系的部分,或者说其本身就是能独立地承受荷载并能维持平衡的部分。

(2)附属部分。附属部分是不能独立承受荷载的几何可变体系,它需要与基本部分相联结,才能承受荷载。

在图 2-3 所示的梁中,AC 梁通过 3 根既不全平行也不相交于一点的 3 根链杆与基础联结,所以它是几何不变的。CE 梁通过铰 C 及支座链杆 DH 联结在 AC 梁和基础上;EF 梁通过铰 E 及支座链杆 FI 联结在 CE 梁和基础上。由此可知,AC 梁直接与基础组成一个几何不变部分,它的几何不变性不受 CE 梁和 EF 梁的影响,故称 AC 梁为该多跨静定梁中的



基本部分。而 CE 梁要依靠 AC 梁才能保证其几何不变性,故称 CE 梁为 AC 梁的附属部分。同理, EF 梁相对于 AC 梁和 CE 梁组成的部分来说也是附属部分。

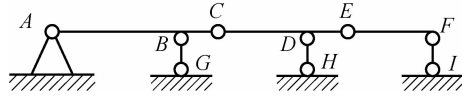


图 2-3

3. 多跨静定梁的层次图

为了清楚地表示多跨静定梁各部分之间相互支承与依赖的关系,一般将基本部分画在最下层,各附属部分依次画在其相邻基本部分的上层,梁段之间的中间铰链用形式上的固定铰支座(支座与基本部分固定)来表示,这样形成的图形称为层次图。

图 2-2(a)所示的连续简支型多跨静定梁,其左边第一跨梁 AC 与基础通过不共线的一个铰和一根链杆相联,组成没有多余约束的几何不变体系,为基本部分;其余各跨均需依靠左边部分的支承才能保持其几何不变性,因此为附属部分。其层次图如图 2-4(a)所示。

图 2-4(b)所示为图 2-2(b)间隔搭接型多跨静定梁的层次图。图 2-4(c)所示为图 2-2(c)混合型多跨静定梁的层次图。

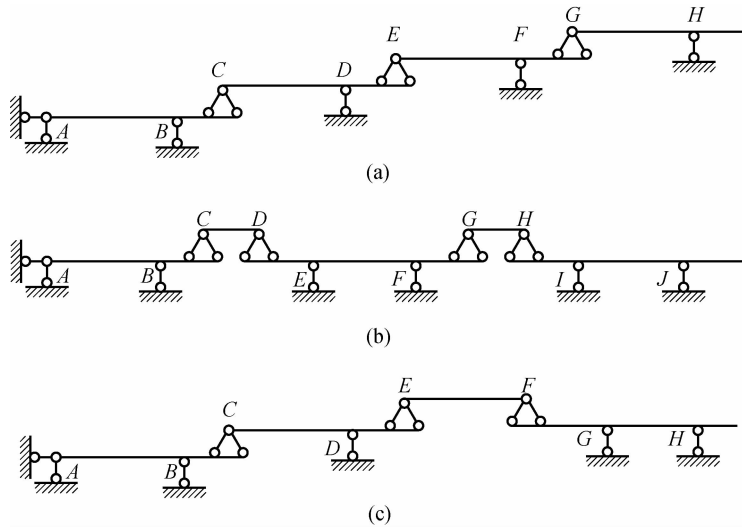


图 2-4

4. 多跨静定梁的计算顺序

多跨静定梁的几何组成特点决定了其受力特点。从力的传递关系来看,荷载是从上层依次传递给下层的,所以作用在基本部分上的荷载将只对基本部分产生内力。当荷载作用在附属部分上时,不仅将对附属部分产生内力,而且由于它是支承在基本部分上的,它在联结处产生的反力将反向作用在基本部分上,使基本部分也产生内力。因此,计算多跨静定梁时应遵循先附属部分后基本部分的原则。

2.1.2 多跨静定梁的受力分析及内力计算步骤

1. 多跨静定梁的受力分析

由于多跨静定梁的基本部分直接与地基组成几何不变体系,因此它能独立承受荷载作用而维持平衡,即与几何组成的顺序相反,这样才可顺利地求出各铰接处的约束力和支座反力,做到列一个平衡方程、解一个未知量,从而避免解联立方程。每取一部分作为隔离体分析受力情况时,与单跨梁的情况相同,按单跨梁求反力和绘制内力图即可。

图 2-5 给出了几种常见的多跨静定梁及其层次图。

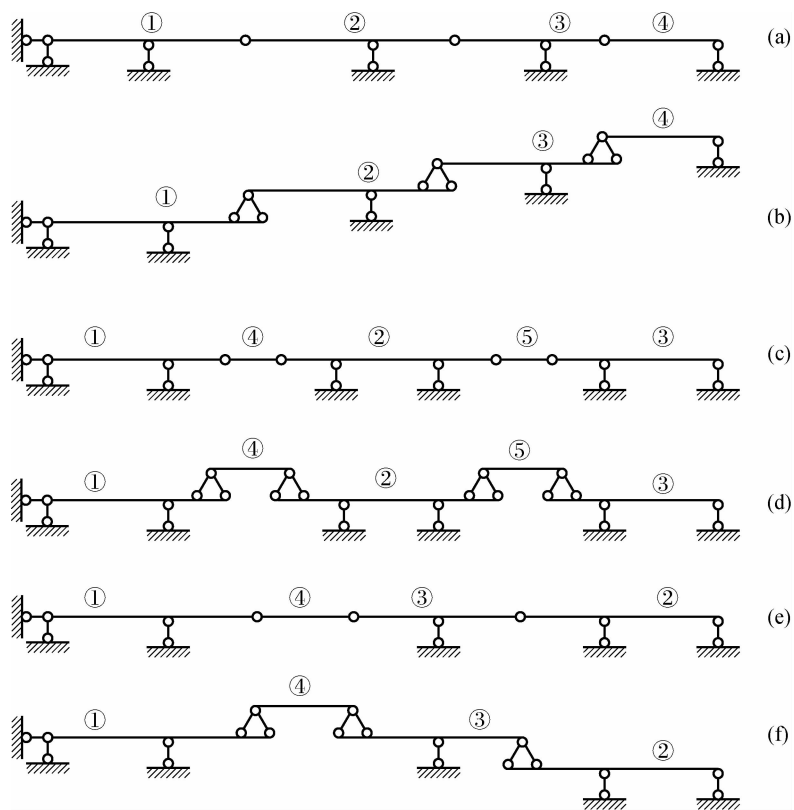


图 2-5

下面对几种常见的多跨静定梁做简要分析。

(1) 图 2-5(a) 中除第一跨外,其余各跨皆有一铰。其层次图如图 2-5(b) 所示。图中,①本身是一个几何不变体系,故为基本部分;而②、③、④只有依赖于①才能承受荷载,故均为附属部分,而这些附属部分之间还存在主次关系,其中①支承②,②支承③,③支承④,④为最后一级附属部分。结构受力分析应按④—③—②—①的顺序进行。

(2) 图 2-5(c) 中无铰跨和两铰跨交替出现,其层次图如图 2-5(d) 所示。图中,外伸梁②、③与支承于外伸梁上的挂梁④、⑤交互排列,虽然②、③两外伸梁只有两根竖向支座链杆直接与地基相联,但在竖向荷载的作用下能独立承受荷载,维持平衡。因此,在竖向荷载的作用下,①、②、③均为基本部分,而④、⑤挂梁则为不能独立承受荷载的附属部分。结构受力分析应按④、⑤—①、②、



③的顺序进行。

(3)图 2-5(e)为前两种的组合,其层次图如图 2-5(f)所示。图中,①、②为外伸梁,为多跨静定梁的基本部分;而②支承③,①和③共同支承挂梁④,④为多跨梁的最后一级附属部分。结构受力分析应按④—①、③—②的顺序进行。

2. 多跨静定梁内力的内力计算步骤

计算多跨静定梁的步骤可归纳为以下三步:

(1)对结构进行几何组成分析,按几何组成分析中刚片的选取次序确定基本部分和附属部分,作层次图。

(2)根据所作层次图,从上层向下层依次取研究对象,计算各梁的约束力。

(3)按照单跨梁内力图的作图方法,分别作各梁段的内力图;再按原顺序将多梁段联结在一起,即得到多跨静定梁的内力图。



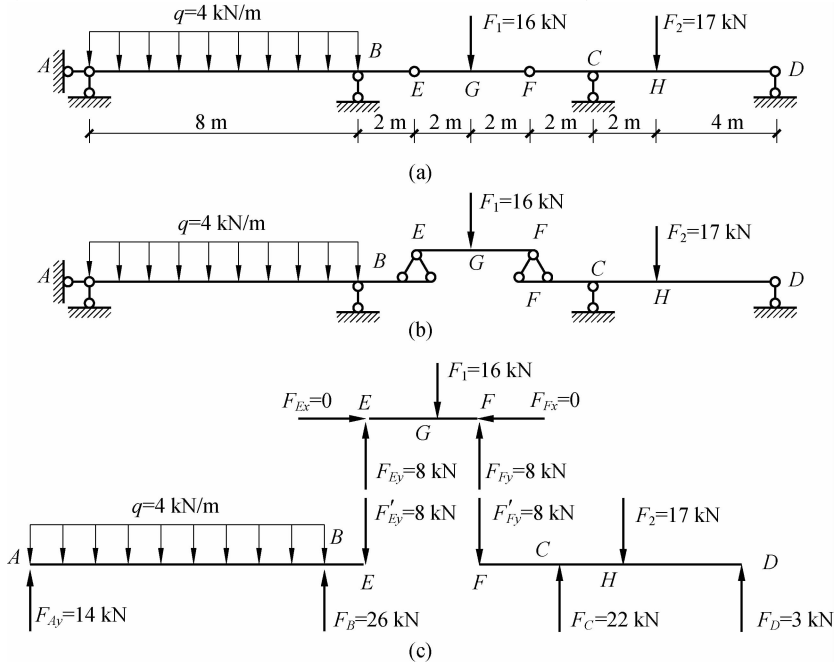
任务解析

【例 2-1】 作图 2-6(a)所示多跨静定梁的剪力图和弯矩图。

【解】 (1)进行几何组成分析并作层次图。选地基为刚片 I, ABE 梁为刚片 II, FCD 梁为刚片 III, 作层次图如图 2-6(b)所示。

(2)计算约束力。先取 EF 梁为研究对象,再取 FCD 梁为研究对象,后取 ABE 梁为研究对象。图 2-6(c)所示为各梁段的受力图,可应用平衡条件依次求出各梁的约束力。求解过程这里不再详述。将所求得各约束反力值标在受力图中。

(3)作内力图。根据各梁的荷载及约束力情况,分别画出各梁段的剪力图和弯矩图,最后分别把它们按原顺序连在一起。多跨静定梁的剪力图和弯矩图如图 2-6(d)、(e)所示。



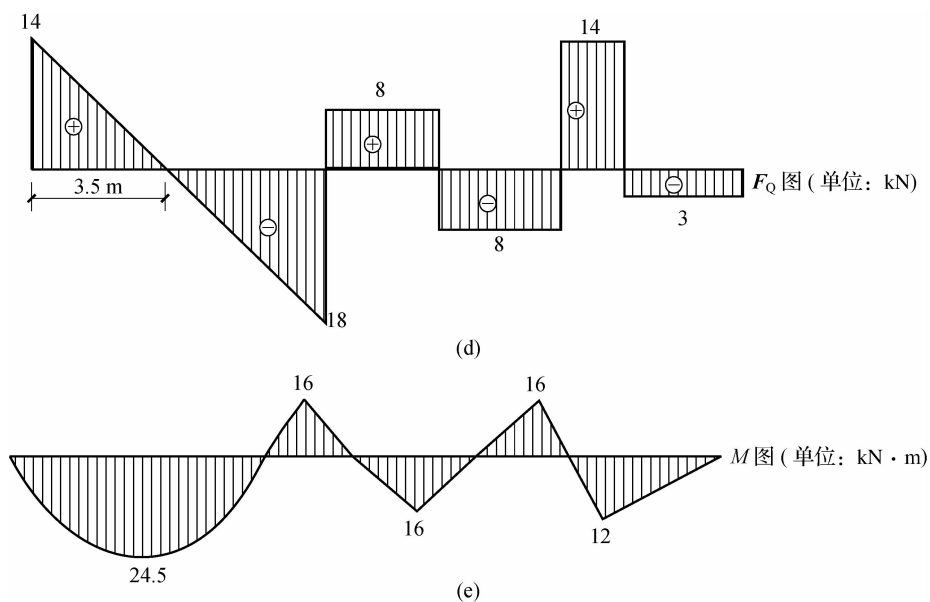


图 2-6

【例 2-2】 试计算图 2-7(a) 所示多跨静定梁的内力, 并作出内力图。

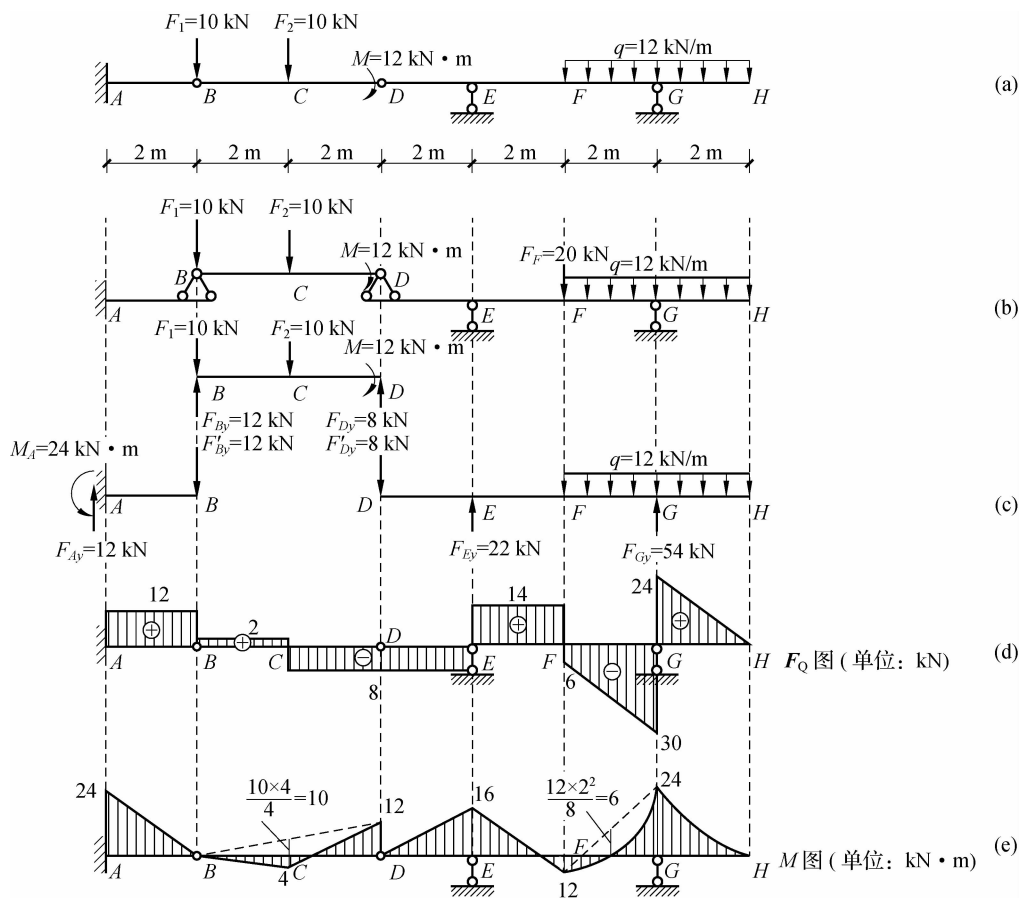


图 2-7



【解】 多跨静定梁的基本部分为 AB 和 DH , 附属部分为 BD ; 其层次图如图 2-7(b) 所示。分析从附属部分 BD 开始, 然后分别是 AB 和 DH ; 附属部分 BD 和基本部分 AB 、 DH 的受力图如图 2-7(c) 所示。根据平衡方程可求得铰结点 B 、 D 和支座 A 、 E 、 G 的约束反力。

因梁上只承受竖向荷载, 由整体平衡条件可知水平反力 $F_{Ax} = 0$, 从而可推知各中间铰结点处的水平反力均等于零, 全梁不产生轴力。挂梁 BD 受到基本部分的支持力, B 铰处的反作用力即基本部分 AB 的荷载, D 铰处的反作用力即基本部分 DH 在 D 截面受到的荷载。所有约束反力的实际方向及大小已标注于图 2-7(c) 中, 不再说明。剪力图和弯矩图按照“分段、定点、连线”的绘图方法绘出, 如图 2-7(d)、(e) 所示。

任务 2.2 静定平面刚架的内力计算



任务导引

刚架常由梁和柱互相刚接而组成, 在建筑工程中应用得十分广泛, 如单层厂房、教学楼、图书馆、住宅等。6~15 层房屋建筑承重结构体系的骨架主要就是刚架。刚架的优点是使梁、柱形成一个刚性整体, 增大了结构的刚度, 并使内力的分布比较均匀。此外, 它还具有较大的净空, 便于使用, 如图 2-8 所示。

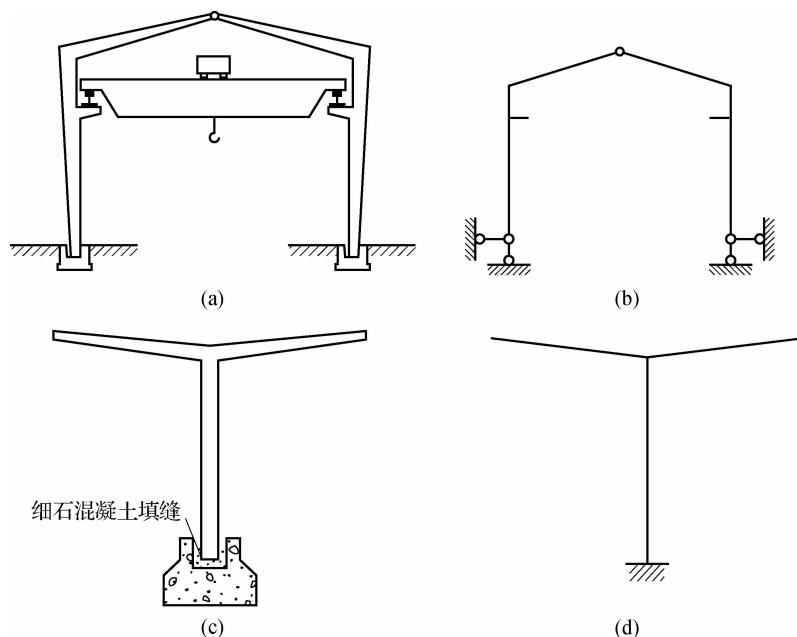


图 2-8

刚结点的特性是在荷载作用下各杆端不仅不能发生相对移动, 而且也不能发生相对转动。因为刚结点具有约束杆端相对转动的作用, 所以它能承受和传递弯矩。

知识点学习

2.2.1 刚架与静定平面刚架

1. 刚架

刚架是用全部或部分刚结点将若干根不同方向的直杆联结而成的结构。刚架的特点主要是由刚结点的特性决定的。现以图 2-9(a)、(b)所示构件为例,通过对刚结点与铰结点的几何和受力两方面的对比分析刚架的特点。

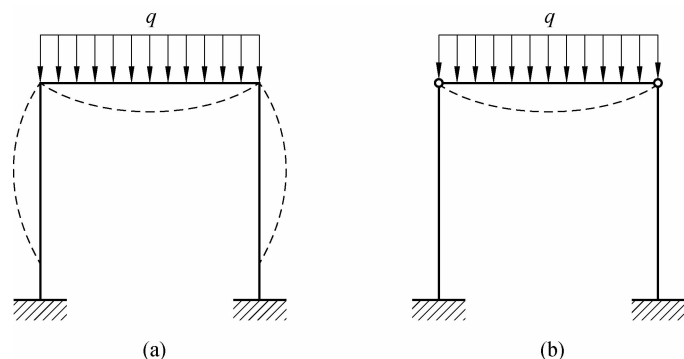
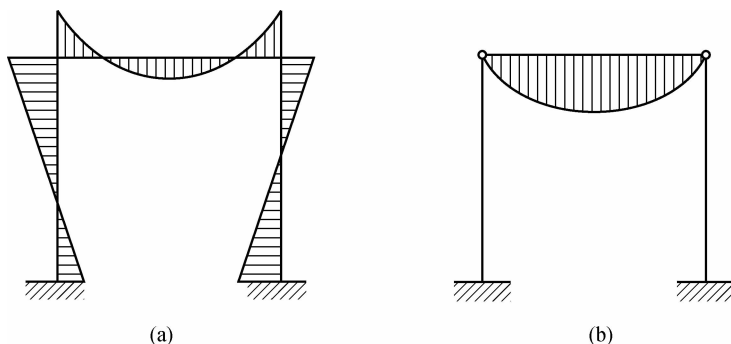


图 2-9

(1)几何方面。刚架整体性好,刚度大,具有较大的内部空间,便于使用。刚结点所联结的各杆端不能发生相对转动,即各杆端夹角在任何情况下都保持不变,因而,当梁发生弯曲时会通过刚结点带动柱子一起发生弯曲,如图 2-9(a)中的虚线所示;铰结点所联结各杆端可以发生相对转动,因而梁的弯曲不会通过铰结点传给柱子,如图 2-9(b)中的虚线所示。若将图 2-9(a)所示刚架的所有刚结点(包括固定端)都变为铰结点,则所得体系如图 2-10(c)所示,此体系为几何可变体系,不能作为结构来使用。为使其变为几何不变体系,可增设一根斜杆,如图 2-10(d)所示。与图 2-10(c)相比,斜杆占用了结构的内部空间,不便于使用;而图 2-10(c)中利用刚结点使体系变为几何不变体系,且组成杆件少,内部空间大,便于使用。

(2)受力方面。刚结点除能承受和传递力外,还能承受和传递力矩,刚结点处的弯矩一般不为零;铰结点只能承受和传递力,不能承受和传递力矩,铰结点处的弯矩一定为零。图 2-9(a)、(b)所示两结构的弯矩图如图 2-10(a)、(b)所示。可见,刚架的弯矩分布较均匀,杆件的峰值弯矩较小,因而比较节省材料。



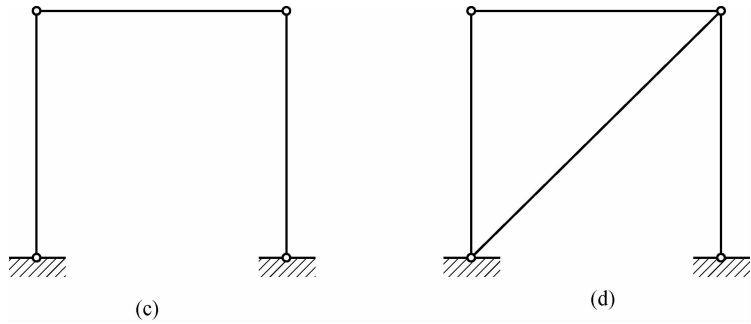


图 2-10

刚架因以上优点在工业与民用建筑、水工建筑和桥梁工程中得到了广泛应用。

2. 静定平面刚架

当所有直杆的轴线在同一平面内,荷载也作用在此平面内时,由静力平衡条件即可确定全部约束力和内力且可按平面问题处理的静定刚架,称为静定平面刚架。静定平面刚架的主要形式有悬臂刚架[见图 2-11(a)]、简支刚架[见图 2-11(b)]和三铰刚架[见图 2-11(c)],它们是静定平面刚架在工程中的应用实例。其中,悬臂刚架在工程中属于独立刚架,常用于小型阳台、挑檐、建筑小品、公共汽车站雨篷、车站篷、敞廊篷等。悬臂刚架的结构特点为一端固定的悬臂或悬挑结构,或固定柱脚,或固定在梁、板的一端。简支刚架一般用于蓄水池等,通过框架与地面固定。三铰刚架的结构特点为两折杆与基础通过 3 个铰两两相联,构成静定结构,主要用于仓库、厂房天窗架、轻刚厂房等无起重机的建筑物。静定平面刚架除上述 3 种形式外,还有这 3 种刚架组成的组合刚架,如图 2-12 所示。

在土建工程中,平面刚架使用普遍,而本任务讨论的静定平面刚架是超静定刚架的基础。所以,掌握静定平面刚架的受力分析具有十分重要的意义。

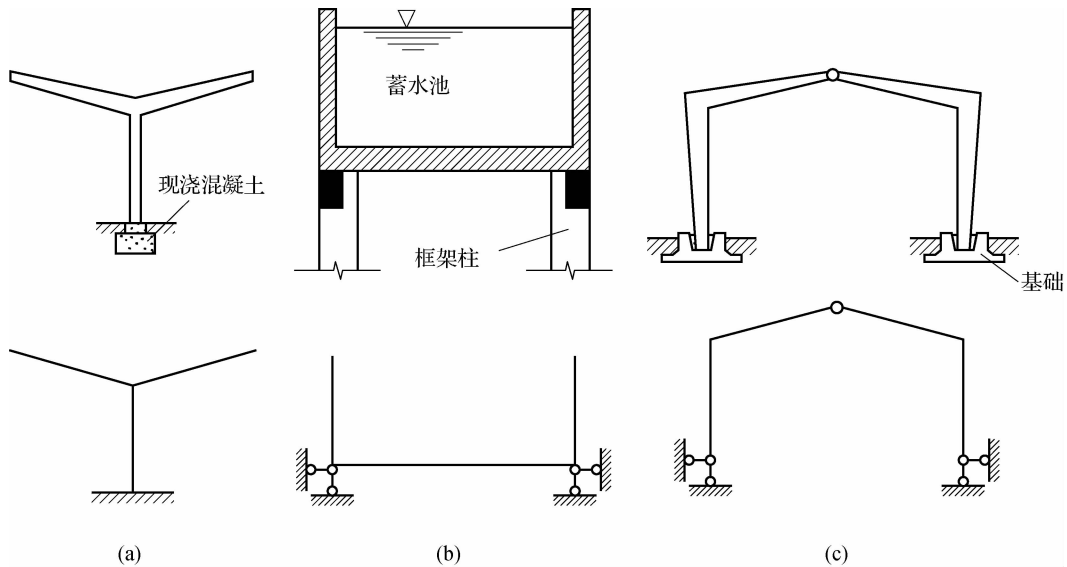


图 2-11

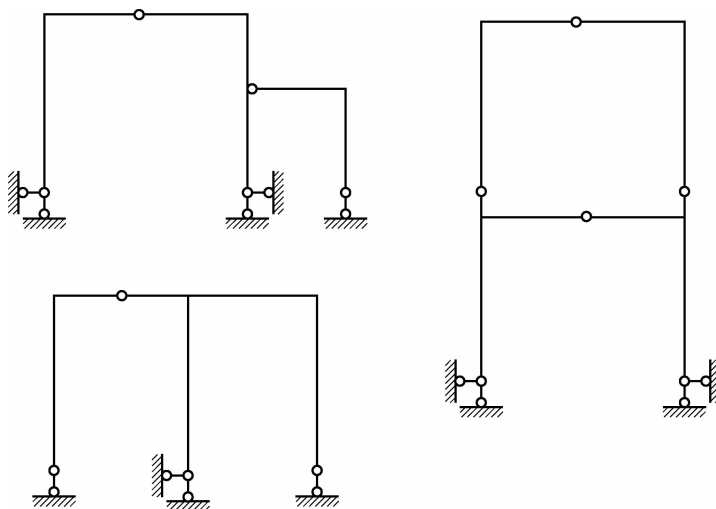


图 2-12

2.2.2 静定平面刚架的内力表示及内力图绘制

1. 截面内力计算及正负号规定

截面上的弯矩值等于截面一侧所有外力对截面形心取矩的代数和。对于水平杆和斜杆,将能使其下侧受拉的外力矩规定为正,反之为负;对于竖直杆,将能使其左侧受拉的外力矩规定为正,反之为负。

截面上的剪力值等于截面一侧所有外力在截面切向方向投影的代数和。规定:能使截面处微段发生顺时针剪切的外力投影为正,反之为负。

截面上的轴力值等于截面一侧所有外力在截面法向方向投影的代数和。规定:能使截面处微段发生受拉的外力投影为正,反之为负。

2. 杆端截面内力的表示方法

由于刚架在刚结点处联结了多个杆件,刚结点处有多个杆件的杆端截面,因此,刚架的杆端截面内力用两个下标字母来表示,第一个下标字母表示杆件截面所在的杆端,第二个下标字母表示杆的另一端。例如 M_{AB} 表示 AB 杆 A 端截面的弯矩。

3. 内力图的绘制

绘制内力图时,规定弯矩图画在杆件受拉侧,不注明正负号;绘制剪力图、轴力图时,应将正、负纵标分别画在杆件的两侧,并注明正负号。

绘制刚架内力图时,先将刚架从刚结点处分解为若干个杆件,然后应用剪力、弯矩与荷载集度间的微分关系逐杆逐段作内力图,最后应用刚结点或某一杆件的平衡条件进行校核。

任务解析

【例 2-3】 作图 2-13(a)所示悬臂刚架的内力图。



【解】 作悬臂刚架的内力图时,不要求约束力。计算控制截面的内力时均取自由端一侧为隔离体。图 2-13(a) 所示的悬臂刚架由 3 根杆件组成,需分别求出这 3 根杆件的内力。

(1) 作剪力图。

① AB 杆。杆段上无均布荷载作用,剪力图为平行于杆轴的直线。

$$F_{QAB} = F_{QBA} = -8(\text{kN})$$

② BC 杆。杆段上有均布荷载作用,剪力图为斜直线。

$$F_{QBC} = 4 \times 3 = 12(\text{kN}), F_{QCB} = 0$$

③ BD 杆。杆段无均布荷载作用,剪力图为平行于杆轴的直线。

$$F_{QBD} = F_{QDB} = 0$$

剪力图如图 2-13(b) 所示。

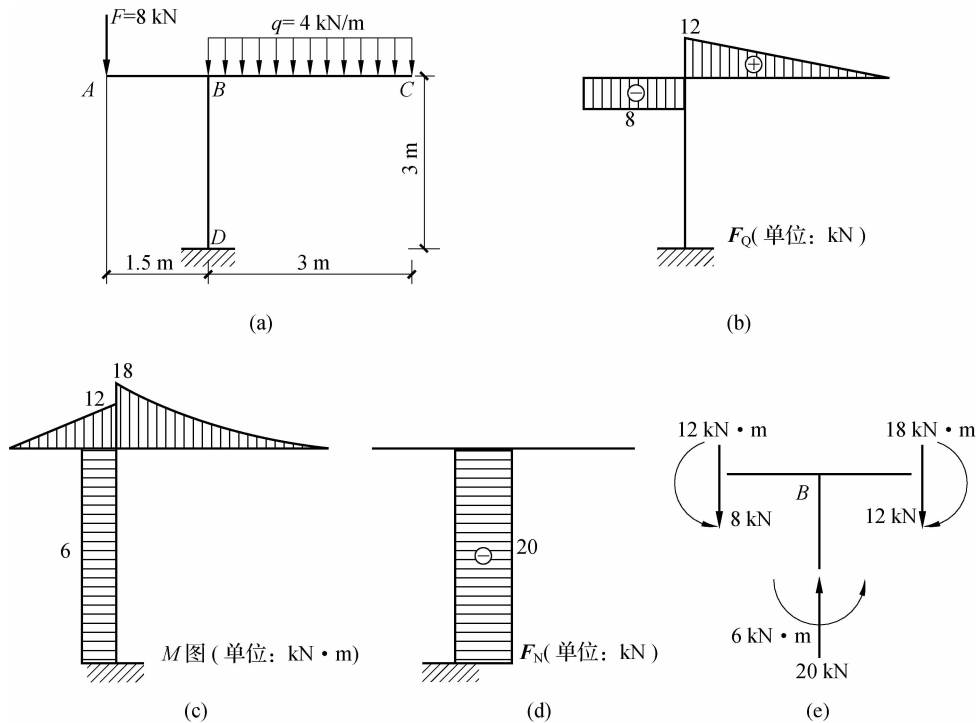


图 2-13

(2) 作弯矩图。

① AB 杆。杆段上无均布荷载作用,弯矩图为斜直线。

$$M_{AB} = 0, M_{BA} = -8 \times 1.5 = -12(\text{kN} \cdot \text{m})(\text{上侧受拉})$$

② BC 杆。杆段上有均布荷载作用,弯矩图为二次抛物线,凸侧向下,且抛物线的极值点(剪力为零的点)位于杆端 C 处。

$$M_{BC} = -4 \times 3 \times 1.5 = -18(\text{kN} \cdot \text{m})(\text{上侧受拉}), M_{CB} = 0$$

③ BD 杆。杆段无均布荷载作用,弯矩图为平行于杆轴的直线(此杆段各截面的剪力为零)。

$$M_{BD} = M_{DB} = -8 \times 1.5 + 4 \times 3 \times 1.5 = 6 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{左侧受拉})$$

弯矩图如图 2-13(c) 所示。

(3) 作轴力图。AB 杆、BC 杆的轴力均为零。BD 杆的轴力为

$$F_{NBD} = F_{NDB} = -8 - 4 \times 3 = -20 (\text{kN})$$

轴力图如图 2-13(d) 所示。

(4) 校核。取刚结点 B 为隔离体, 受力如图 2-13(e) 所示 (各截面的内力按真实方向画出, 并标明内力的绝对值)。

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 20 - 12 - 8 = 0, \sum M = 12 + 6 - 18 = 0$$

故以上计算无误。

【例 2-4】 作图 2-14(a) 所示简支刚架的内力图。

【解】 简支刚架由 3 根杆件组成, 需分别求 3 根杆件的内力。

(1) 求支座反力。以整体为研究对象, 由平衡条件可得

$$\sum F_x = 0, 10 \times 4 - F_{Bx} = 0, F_{Bx} = 40 (\text{kN})$$

$$\sum M_B = 0, 60 \times 3 + 30 - 6F_{Ay} = 0, F_{Ay} = 35 (\text{kN})$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{By} - 60 = 0, F_{By} = 25 (\text{kN})$$

(2) 作剪力图。

① AC 杆。杆段上有均布荷载作用, 剪力图为斜直线。

$$F_{QAC} = 0, F_{QCA} = -10 \times 4 = -40 (\text{kN})$$

② CD 杆。杆段上无均布荷载作用, 剪力图为平行于杆轴的直线, 且以集中荷载作用点为界, 分为两种情况。

$$F_{QCD} = 35 (\text{kN}), F_{QDC} = 35 - 60 = -25 (\text{kN})$$

③ BD 杆。杆段上无均布荷载作用, 剪力图为平行于杆轴的直线。

$$F_{QBD} = F_{QDB} = 40 (\text{kN})$$

剪力图如图 2-14(b) 所示。

(3) 作弯矩图。

① AC 杆。杆段上有均布荷载作用, 弯矩图为二次抛物线, 凸侧向右, 且抛物线的极值点位于杆端 A 处。

$$M_{AC} = 0, M_{CA} = \frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 = 80 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{左侧受拉})$$

作 AC 杆的弯矩图时, 先将 AC 杆的杆端弯矩用虚线相连, 再以此虚线为临时基线, 将相应简支梁在均布荷载单独作用下的弯矩图叠加即可。

② CD 杆。杆段上无均布荷载作用, 弯矩图为斜直线。

$$M_{CD} = -\frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 = -80 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{上侧受拉})$$

$$M_{DC} = 35 \times 6 - 80 - 60 \times 3 = -50 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{上侧受拉})$$

作 CD 杆的弯矩图时, 先用虚线将 CD 杆的杆端弯矩相连, 再以此虚线为临时基线, 将相应简支梁在跨中集中荷载单独作用下的弯矩图叠加即可。

③ BD 杆。杆段上无均布荷载作用, 弯矩图为斜直线。



$$M_{DB} = -40 \times 2 = -80 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{右侧受拉}), M_{BD} = 0$$

弯矩图如图 2-14(c) 所示。

(4) 作轴力图。

① AC 杆。各截面轴力相同, $F_{NAC} = F_{NCA} = -35 (\text{kN})$ 。

② CD 杆。各截面轴力相同, $F_{NCD} = F_{NDC} = -40 (\text{kN})$ 。

③ BD 杆。各截面轴力相同, $F_{NBD} = F_{NDB} = -25 (\text{kN})$ 。

轴力图如图 2-14(d) 所示。

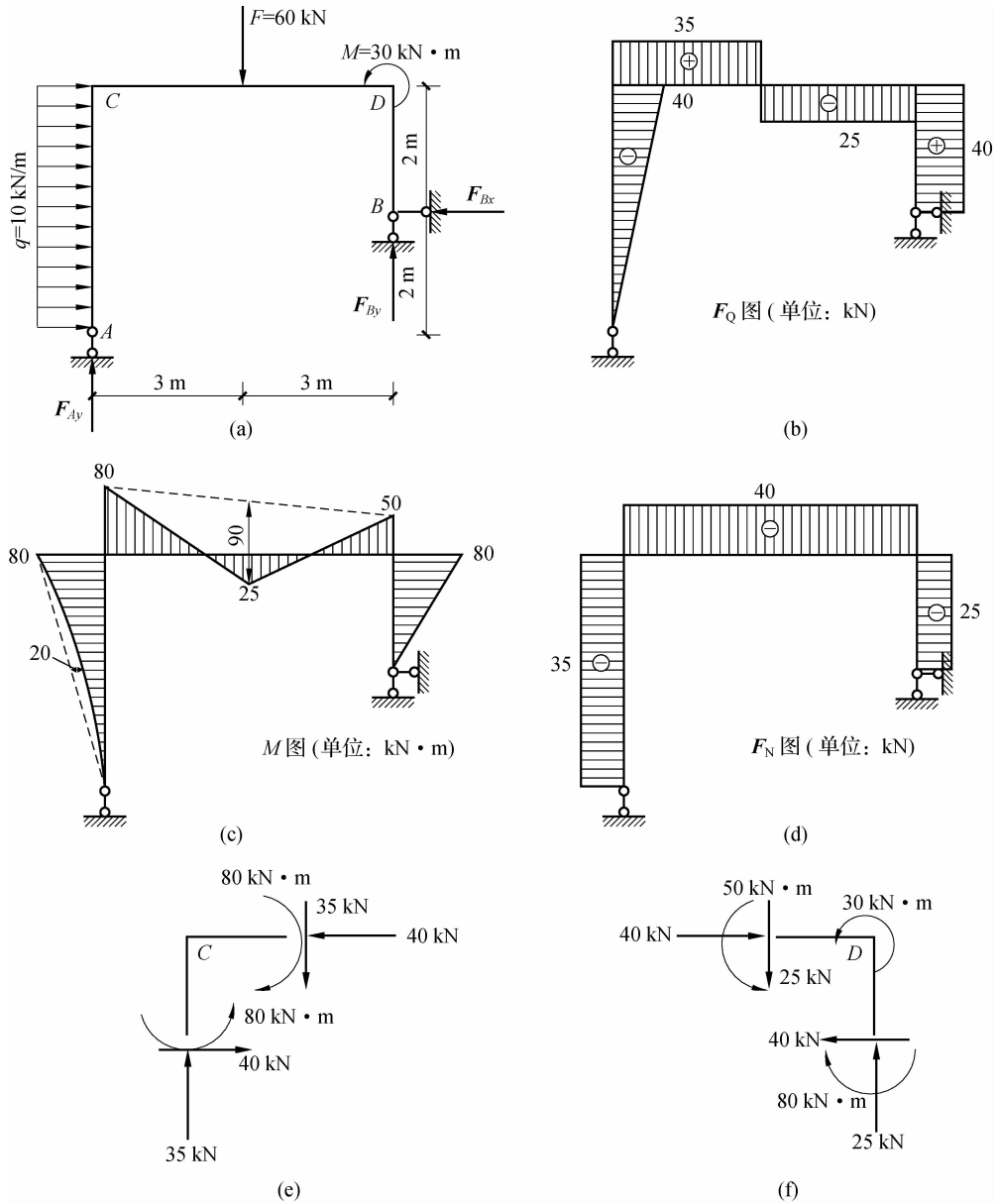


图 2-14

(5)校核。分别取刚结点 C 、 D 为隔离体,受力如图 2-14(e)、(f)所示。各截面内力按真实方向画出,并标明内力的绝对值。

①验证刚结点 C ,有

$$\sum F_x = 40 - 40 = 0, \sum F_y = 35 - 35 = 0, \sum M = 80 - 80 = 0$$

②验证刚结点 D ,有

$$\sum F_x = 40 - 40 = 0, \sum F_y = 25 - 25 = 0, \sum M = 50 + 30 - 80 = 0$$

故以上计算无误。

【例 2-5】 作图 2-15(a)所示三铰刚架的内力图。

【解】 图 2-15(a)所示的三铰刚架由 4 根杆件组成,需分别求出这 4 根杆件的内力。

(1)求支座反力。以三铰刚架整体为研究对象,由平衡条件可得

$$\sum M_B = 0, -8F_{Ay} + 20 \times 4 \times 6 = 0, F_{Ay} = 60(\text{kN})$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{By} - 20 \times 4 = 0, F_{By} = 20(\text{kN})$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - F_{Bx} = 0$$

以构件 CEB 为研究对象,由平衡条件可得

$$\sum M_C = 0, 4F_{By} - 8F_{Bx} = 0, F_{Bx} = 10(\text{kN}), F_{Ax} = 10(\text{kN})$$

(2)作剪力图。

① AD 杆:杆段上无均布荷载作用,剪力图为平行于杆轴的直线。

$$F_{QAD} = F_{QDA} = -10(\text{kN})$$

② DC 杆:杆段上有均布荷载作用,剪力图为斜直线。

$$F_{QDC} = 60(\text{kN}), F_{QCD} = 60 - 20 \times 4 = -20(\text{kN})$$

③ CE 杆:杆段上无均布荷载作用,剪力图为平行于杆轴的直线。

$$F_{QCE} = F_{QEC} = -20(\text{kN})$$

④ EB 杆:杆段上无均布荷载作用,剪力图为平行于杆轴的直线。

$$F_{QBE} = F_{QEB} = 10(\text{kN})$$

剪力图如图 2-15(b)所示。

(3)作弯矩图。

① AD 杆:杆段上无均布荷载作用,弯矩图为斜直线。

$$M_{AD} = 0, M_{DA} = 10 \times 8 = 80(\text{kN} \cdot \text{m})(\text{左侧受拉})$$

② DC 杆:杆段上有均布荷载作用,弯矩图为二次抛物线,凸侧向下,且抛物线极值点位于杆段内。

$$M_{DC} = -10 \times 8 = 80(\text{kN} \cdot \text{m})(\text{上侧受拉}), M_{CD} = 0$$

③ CE 杆:杆段上无均布荷载作用,弯矩图为斜直线。

$$M_{CE} = 0, M_{EC} = -10 \times 8 = -80(\text{kN} \cdot \text{m})(\text{上侧受拉})$$

④ EB 杆:杆段上无均布荷载作用,弯矩图为斜直线。

$$M_{EB} = -10 \times 8 = -80(\text{kN} \cdot \text{m})(\text{右侧受拉}), M_{BE} = 0$$

弯矩图如图 2-15(c)所示。

(4)作轴力图。



- ①AD 杆:各截面轴力相同, $F_{NAD} = F_{NDA} = -60(\text{kN})$ 。
 - ②DC、CE 杆:各截面轴力相同, $F_{NDC} = F_{NCD} = F_{NCE} = F_{NEC} = -10(\text{kN})$ 。
 - ③BE 杆:各截面轴力相同, $F_{NBE} = F_{NEB} = -20(\text{kN})$ 。
- 轴力图如图 2-15(d)所示。

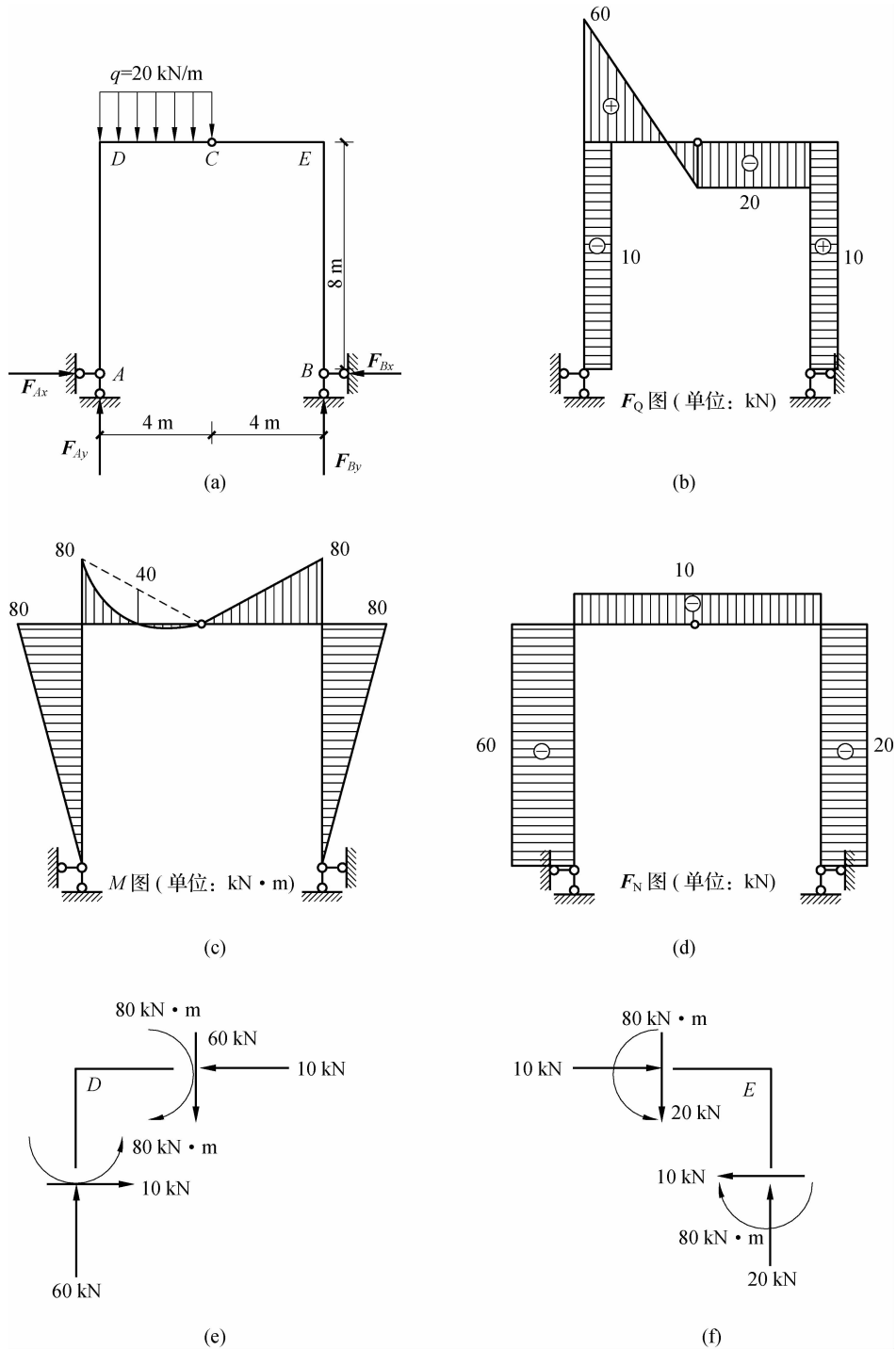


图 2-15

(5)校核。分别取刚结点 D 、 E 为隔离体,受力如图 2-15(e)、(f)所示。各截面内力按真实方向画出,并标明内力的绝对值。

①验证刚结点 D ,有

$$\sum F_x = 10 - 10 = 0, \sum F_y = 60 - 60 = 0, \sum M = 80 - 80 = 0$$

②验证刚结点 E ,有

$$\sum F_x = 10 - 10 = 0, \sum F_y = 20 - 20 = 0, \sum M = 80 - 80 = 0$$

故以上计算无误。

【例 2-6】 作图 2-16(a)所示两跨铰接静定刚架的内力图。

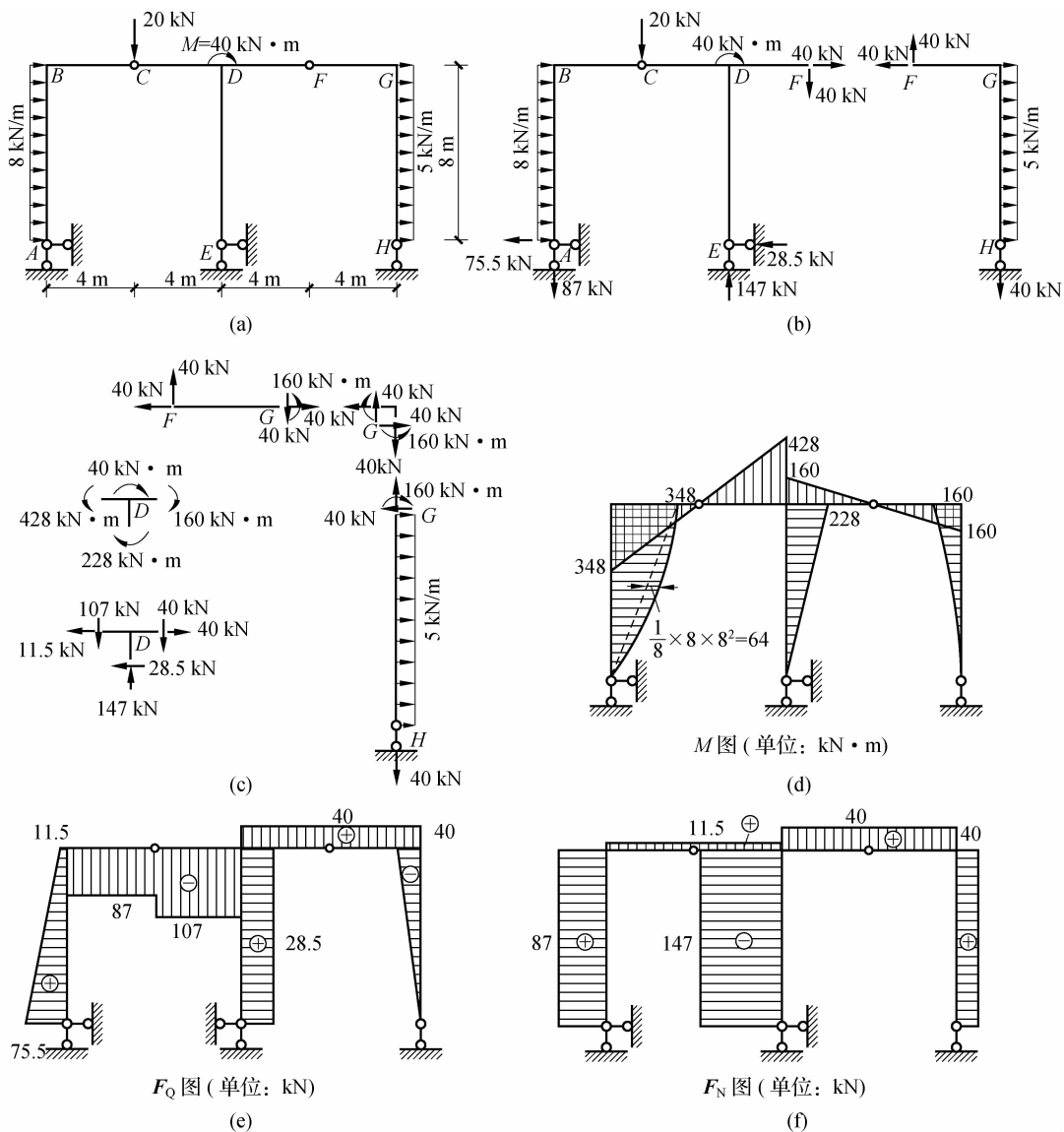


图 2-16



【解】 多跨铰接静定刚架的几何组成性质与多跨铰接静定梁的几何组成性质类似。因此,图 2-16(a)所示的结构分为基本部分 $ABCDEF$ 和附属部分 FGH 。

(1)求支座反力。计算时,先求出附属部分的支座反力,再求出基本部分与附属部分的相互作用力,最后求出基本部分的支座反力。支座反力的计算结果如图 2-16(b)所示。

(2)求附属部分各杆的杆端弯矩,分别取 FG 杆件、结点 G 和 GH 杆件为隔离体,杆端的内力计算结果如图 2-16(c)所示。基本部分为三铰刚架,其杆端内力在【例 2-4】中已做过详细分析,此处不再赘述。

(3)作内力图。根据以上求得的各杆端内力,即可绘制弯矩图、剪力图和轴力图,如图 2-16(d)、(e)、(f)所示。在图 2-16(c)中取出了结点 D 为隔离体,经检验,其所有杆端的内力与作用在其上的外力偶都满足平衡条件,说明计算结果无误。

任务 2.3 三铰拱的内力计算



任务导引

拱是人类建筑史上较为出色的成就之一。三千多年以来,拱以众多数学形状和曲线(如圆、椭圆、抛物线、悬链线)的形式出现,从而形成半圆形拱、内外四心桃尖拱、抛物线拱、椭圆拱、尖顶或等边拱、弓形拱、凯旋门拱、三角形拱等。前面学习的刚架以及本任务研究的拱都是土木工程中跨越空间的方法。在人类发明和利用拱之前,梁必须内外都横跨在柱上,承载依靠的是柱-梁结构(梁与柱间铰接),必须仔细计算柱间距离,以防横梁在过大的弯矩作用下因抗拉能力不够而发生折断。但由于当时人类可以利用的建筑材料只有砖、石、混凝土等脆性材料,它们的抗拉和抗剪性能较差,因此不能用来建造较大跨度的空间结构。古罗马的建筑师们最先广泛应用并发展了半圆形拱。在拱和圆顶出现后,横梁和内柱被取消。拱将结构的重量重新安置在较少且较结实的支承物上,使建筑的内部空间变得宽敞。欧洲历史上著名的拱结构建筑的有古罗马斗兽场、圣索菲亚大教堂、巴黎圣母院、科隆大教堂、佛罗伦萨大教堂、圣天使桥等,而我国最具代表性的拱结构则是安济桥(又名赵州桥)。它们都是具有大跨度特征的穹拱结构。

通过本任务的学习可以了解到,拱的结构特性使拱横截面的正应力以压应力的形式作用且以比较均匀的方式分布,而剪力和弯矩又较小,为压弯联合的截面,脆性材料良好的抗压能力得以发挥。从古至今,拱结构的形式从未过时,和所有建筑一样,它的概念和用途还在发展中。随着新型建筑材料的发明和利用,建筑师可以把许多数学曲线和形状结合起来,用在他们的设计和创造中,让我们在房屋建筑、桥涵建筑和水工等现代建筑中处处可以看到具有拱的特征的新型的结构形式,如钢网壳结构、拱形钢桁架结构、钢筋混凝土拱桥和隧道等。目前,中等跨度桥梁中最为常见的拱桥结构形式有上承式拱桥[见图 2-17(a)]、下承式拱桥[见图 2-17(b)]和中承式拱桥[见图 2-17(c)],它们是根据桥面与拱轴线间的相对关系来划分的。

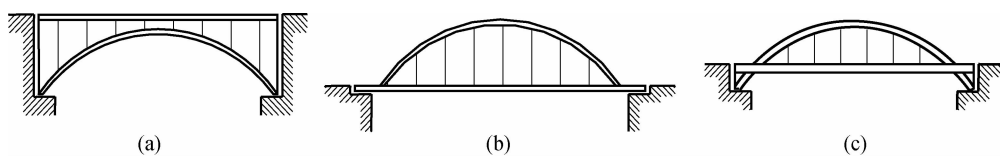


图 2-17

知识点学习

2.3.1 拱的概述

拱结构的特点是杆轴为曲线,而且在竖向荷载的作用下,支座将产生水平反力。这种水平反力又称为水平推力,简称推力。拱结构与梁结构的区别不仅在于外形不同,更重要的还在于竖向荷载作用下是否产生水平推力。例如,图 2-18 所示的两个结构,虽然它们的杆轴都是曲线,但图 2-18(a)所示的结构在竖向荷载的作用下不产生水平推力,其弯矩与相应简支梁(同跨度、同荷载的梁)的弯矩相同,所以这种结构不是拱结构而是一根曲梁。但图 2-18(b)所示的结构,由于其两端都有水平支座链杆,在竖向荷载的作用下将产生水平推力,所以其属于拱结构。由于水平推力的存在,拱中各截面的弯矩将比相应的曲梁或简支梁的弯矩要小,这就使得整个拱体主要承受压力。因此,拱结构可用抗压强度较高而抗拉强度较低的砖、石、混凝土等建筑材料来建造。

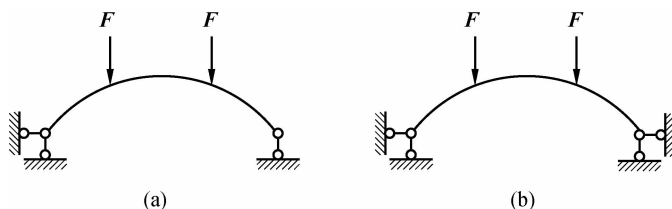


图 2-18

拱结构是建筑结构中应用比较广泛的结构形式之一。在房屋和桥梁建筑中,经常用到拱结构。

拱结构有 3 种常见的形式,其计算简图如图 2-19 所示。图 2-19(a)、(b)所示的无铰拱和两铰拱都是超静定结构,图 2-19(c)所示的三铰拱为静定结构。在本任务中,将只讨论三铰拱的内力计算。

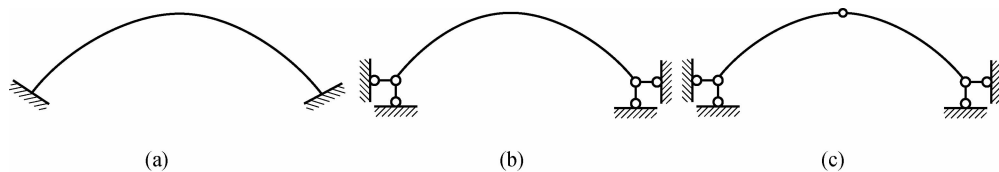


图 2-19

拱结构中最高的一点称为拱顶,三铰拱的中间铰通常安置在拱顶处。拱的两端与支座



的联结处称为拱趾(拱脚)。两个拱趾间的水平距离 l 称为跨度。拱顶到两拱趾连线(起拱线)的竖向距离 f 称为拱高(拱矢)。如图 2-20(a)所示。拱高与跨度之比 f/l 称为高跨比或矢跨比。拱的主要力学性能与高跨比有关。

用作屋面承重结构的三铰拱,常在两铰支座之间设置水平拉杆。这样,水平拉杆内所产生的拉力代替了支座推力的作用,在竖向荷载的作用下,使支座只产生竖向反力。这种结构的内部受力情况与三铰拱完全相同,故称为具有拉杆的拱,简称拉杆拱。拉杆拱的优点在于消除了推力对支承结构(如砖墙、柱等)的影响。拉杆拱的计算简图如图 2-20(b)所示。

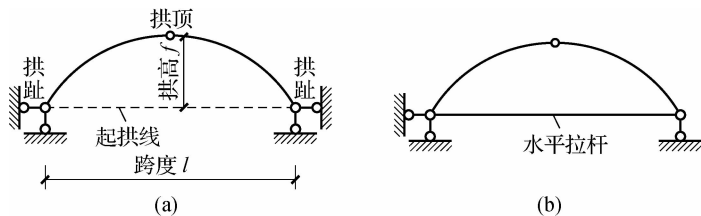


图 2-20

2.3.2 三铰拱支座反力的计算

三铰拱的两端都是铰支座,因此有 4 个未知反力,故需列出 4 个平衡方程进行计算。除了由三铰拱整体平衡列出 3 个方程外,还可利用中间铰处不能抵抗弯矩的特性(弯矩 $M_C=0$)来建立一个补充方程。下面以图 2-21 所示的三铰拱为例,说明三铰拱支座反力的计算方法。

首先考虑图 2-20(a)所示三铰拱的整体平衡,由

$$\sum M_B = F_{Ay}l - F_{P1}b_1 - F_{P2}b_2 - F_{P3}b_3 = 0$$

可得左支座的竖向反力为

$$F_{Ay} = \frac{F_1 b_1 + F_2 b_2 + F_3 b_3}{l} \quad (1)$$

同理,由 $\sum M_A = 0$ 可得右支座的竖向反力为

$$F_{By} = \frac{F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3}{l} \quad (2)$$

由 $\sum F_x = 0$,以 F_H 表示推力,可知

$$F_{Ax} = F_{Bx} = F_H$$

再考虑 $M_C = 0$ 的条件,计算左半拱上所有外力对 C 点的力矩,则有

$$M_C = F_{Ay} \frac{l}{2} - F_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) - F_2 \left(\frac{l}{2} - a_2 \right) - F_{Ax} f = 0$$

故

$$F_H = F_{Ax} = F_{Bx} = \frac{F_{Ay} \frac{l}{2} - F_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) - F_2 \left(\frac{l}{2} - a_2 \right)}{f} \quad (3)$$

式①和式②右边的值恰好等于图 2-21(b)所示相应简支梁的支座反力 F_{Ay}^0 和 F_{By}^0 。式③右边的分子等于相应简支梁上与拱的中间铰位置相对应的截面 C 的弯矩 M_C^0 。由此

可得

$$F_{Ay} = F_{Ay}^0 \quad (2-1)$$

$$F_{By} = F_{By}^0 \quad (2-2)$$

$$F_H = F_{Ax} = F_{Bx} = \frac{M_C^0}{f} \quad (2-3)$$

由式(2-3)可知,推力 F_H 等于相应简支梁截面 C 的弯矩 M_C^0 除以拱高 f ,其值只与3个铰的位置有关,而与各铰间的拱轴形状无关,即推力 F_H 只与拱的高跨比 f/l 有关。当荷载和拱的跨度不变时,推力 F_H 将与拱高 f 成反比,即 f 越大、 F_H 越小;反之, F_H 越大。

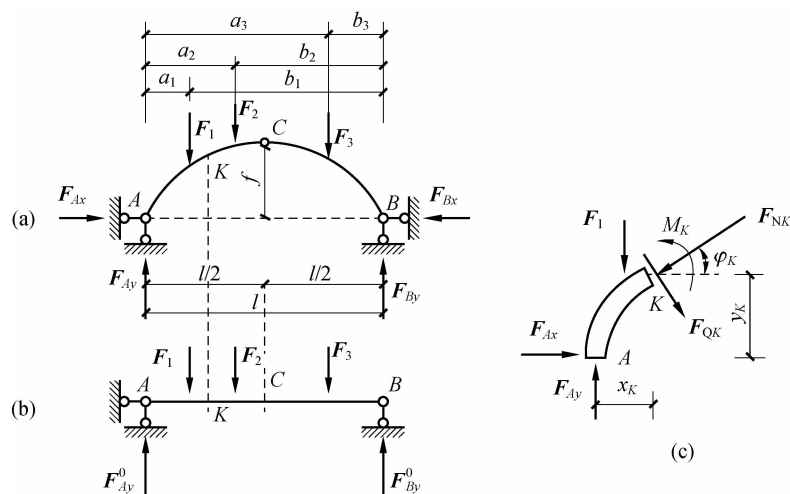


图 2-21

2.3.3 三铰拱截面内力的计算

计算图 2-21 所示结构的内力时,应注意拱轴为曲线,所取截面与拱轴正交,即与拱轴的切线相垂直,拱轴上任意 K 点处拱轴线切线的倾角为 φ_K 。截面 K 的内力可以分解为弯矩 M_K 、剪力 F_{QK} 和轴力 F_{NK} ,其中, F_{QK} 沿截面方向(拱轴法线方向)作用,轴力 F_{NK} 沿垂直于截面的方向(拱轴切线方向)作用。下面分别推导这三种内力的计算公式。

1. 三铰拱弯矩的计算公式

通常规定,弯矩的符号以使拱内侧纤维受拉为正,反之为负。取 AK 段为隔离体,如图 2-21(c)所示。由

$$\sum M_K = F_{Ay}x_K - F_1(x_K - a_1) - F_H y_K - M_K = 0$$

得截面 K 的弯矩

$$M_K = F_{Ay}x_K - F_{P1}(x_K - a_1) - F_H y_K \quad (2-4)$$

根据 $F_{Ay} = F_{Ay}^0$,可知式(2-4)等号右边前两项的代数和等于相应简支梁截面 K 的弯矩 M_K^0 ,所以式(2-4)可改写为

$$M_K = M_K^0 - F_H y_K \quad (2-5)$$

即拱内任一截面的弯矩,等于相应简支梁对应截面的弯矩减去由于拱的推力 F_H 所引



起的弯矩 $F_H y_K$ 。由此可知,推力的存在使得三铰拱中的弯矩比相应简支梁的弯矩要小。

2. 三铰拱剪力的计算公式

通常规定,剪力的符号以使截面两侧的隔离体有顺时针方向转动趋势的为正,反之为负。以 AK 段为隔离体,如图 2-21(c)所示,由平衡条件可得

$$\begin{aligned} F_{QK} + F_1 \cos \varphi_K + F_H \sin \varphi_K - F_{Ay} \cos \varphi_K &= 0 \\ F_{QK} &= (F_{Ay} - F_1) \cos \varphi_K - F_H \sin \varphi_K \end{aligned} \quad (2-6)$$

式中, $(F_{Ay} - F_1)$ 等于相应简支梁在截面 K 处的剪力 F_{QK}^0 , 于是式(2-6)可改写为

$$F_{QK} = F_{QK}^0 \cos \varphi_K - F_H \sin \varphi_K \quad (2-7)$$

式中, φ_K 为截面 K 处拱轴线的倾角。

3. 三铰拱轴力的计算公式

因拱轴通常受压,所以规定使截面受压的轴力为正,反之为负。以 AK 段为隔离体,如图 2-21(c)所示,由平衡条件可得

$$\begin{aligned} F_{NK} + F_1 \sin \varphi_K - F_{Ay} \sin \varphi_K - F_H \cos \varphi_K &= 0 \\ F_{NK} &= (F_{Ay} - F_1) \sin \varphi_K + F_H \cos \varphi_K \end{aligned}$$

即

$$F_{NK} = F_{QK}^0 \sin \varphi_K + F_H \cos \varphi_K \quad (2-8)$$

有了上述公式,就可以求得三铰拱任意截面的内力,从而作出三铰拱的内力图。

2.3.4 三铰拱的合理轴线

在一般情况下,三铰拱的截面上有弯矩、剪力和轴力,处于偏心受压状态,其正应力分布不均匀。但是,我们可以选取一根适当的拱轴线,使其在给定荷载的作用下,各截面只承受轴力,而弯矩为零,这样的拱轴线被称为合理轴线。

由式(2-5)可知,任意截面 K 的弯矩为

$$M_K = M_K^0 - F_H y_K$$

由此可知,三铰拱的弯矩 M_K 是由相应简支梁的弯矩 M_K^0 与 $-F_H y_K$ 叠加得到的。当拱的跨度和荷载已知时, M_K^0 不随拱轴线的改变而改变,而 $-F_H y_K$ 则与拱轴线有关。因此,我们可以在 3 个铰之间恰当地选择拱轴线的形式,使拱中各截面的弯矩 M 都为零。根据各截面弯矩都为零的条件,由式(2-5)可得

$$M = M^0 - F_H y = 0$$

得

$$y = \frac{M^0}{F_H} \quad (2-9)$$

由式(2-9)可知,合理轴线的竖标 y 与相应简支梁的弯矩竖标成正比, $\frac{1}{F_H}$ 是这两个竖标的比例系数。当拱上所受荷载已知时,只需先求出相应简支梁的弯矩方程,再除以推力 F_H , 便可得到拱的合理轴线方程。

任务解析

三铰拱内力图的绘制要求是：内力图画在水平基线上， M 图画在受拉侧；正剪力画在轴上侧；受压的轴力画在轴上侧。

三铰拱内力图的绘图步骤如下：

- (1) 将拱跨度 l (或拱轴) 等分为 8~12 份, 取每一等分截面为控制截面。
- (2) 根据公式计算各控制截面的弯矩、剪力、轴力值。
- (3) 绘制内力图。三铰拱的内力图特征与梁相似, 均为曲线。

【例 2-6】 图 2-22(a) 所示为一个三铰拱, 其拱轴线为抛物线。当坐标原点选在左支座时, 轴线方程为 $y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$, 试绘制其内力图。

【解】 先求支座反力, 根据式(2-1)、式(2-2)和式(2-3)可得

$$F_{Ay} = F_{Ay}^0 = \frac{100 \times 9 + 20 \times 6 \times 3}{12} = 105 \text{ (kN)}$$

$$F_{By} = F_{By}^0 = \frac{100 \times 3 + 20 \times 6 \times 9}{12} = 115 \text{ (kN)}$$

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{105 \times 6 - 100 \times 3}{4} = 82.5 \text{ (kN)}$$

求出支座反力后, 即可根据式(2-5)、式(2-7)和式(2-8)绘制内力图。为此, 将拱跨分成 8 等份, 列表 2-1 算出各截面上的 M 、 F_Q 、 F_N 值, 然后根据表中所得数值绘制 M 、 F_Q 、 F_N 图, 如图 2-22(c)、(d)、(e) 所示。这些内力图是以水平线为基线绘制的。图 2-22(b) 为相应简支梁的弯矩图。

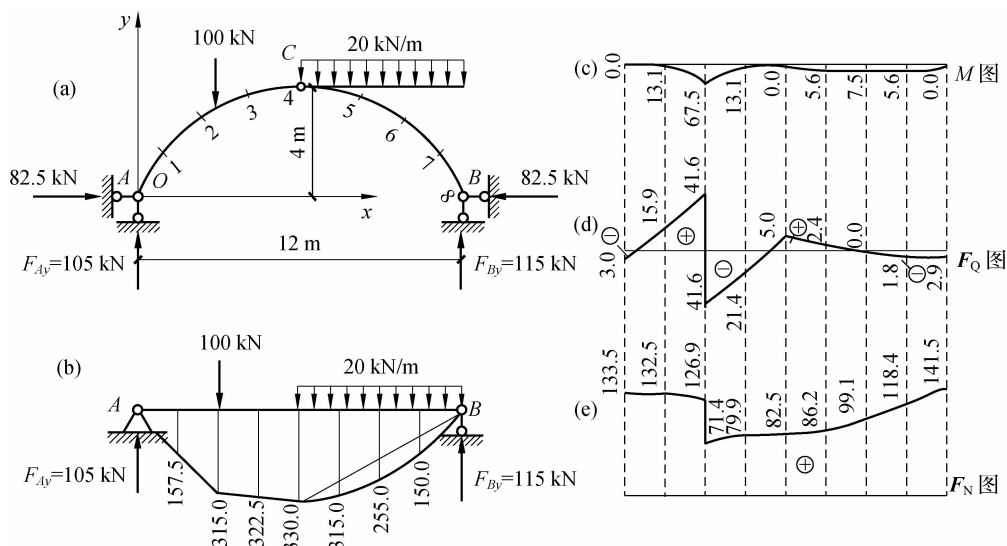


图 2-22

以截面 1 (离左支座 1.5 m 处) 和截面 2 (离左支座 3.0 m 处) 的内力计算为例, 对表 2-1 中的计算说明如下:



在截面 1 处,有 $x_1 = 1.5 \text{ m}$,由轴线方程求得

$$y_1 = \frac{4f}{l^2} x_1 (l - x_1) = \frac{4 \times 4}{12^2} \times 1.5 \times (12 - 1.5) = 1.75 (\text{m})$$

截面 1 处的切线斜率为

$$\tan \varphi_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_1) = \frac{4 \times 4}{12^2} \times (12 - 2 \times 1.5) = 1$$

于是

$$\sin \varphi_1 = \frac{\tan \varphi_1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

根据式(2-5)、式(2-7)和式(2-8)求得该截面的弯矩、剪力和轴力分别为

$$M_1 = M_1^0 - F_H y_1 = 105 \times 1.5 - 82.5 \times 1.75 = 157.5 - 144.4 = 13.1 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$F_{Q1} = F_{Q1}^0 \cos \varphi_1 - F_H \sin \varphi_1 = 105 \times 0.707 - 82.5 \times 0.707 = 74.2 - 58.3 = 15.9 (\text{kN})$$

$$F_{N1} = F_{QK}^0 \sin \varphi_1 + F_H \cos \varphi_1 = 105 \times 0.707 + 82.5 \times 0.707 = 74.2 + 58.3 = 132.5 (\text{kN})$$

因截面 2 处有集中荷载作用,故该截面两边的剪力和轴力不相等,此处 F_Q 、 F_N 图将发生突变。现计算截面 2 处的内力,可得

$$M_2 = M_2^0 - F_H y_2 = 105 \times 3 - 82.5 \times 3 = 315 - 247.5 = 67.5 (\text{kN})$$

$$F_{Q2左} = F_{Q2左}^0 \cos \varphi_2 - F_H \sin \varphi_2 = 105 \times 0.832 - 82.5 \times 0.555 = 87.4 - 45.8 = 41.6 (\text{kN})$$

$$F_{Q2右} = F_{Q2右}^0 \cos \varphi_2 - F_H \sin \varphi_2 = 5 \times 0.832 - 82.5 \times 0.555 = 4.2 - 45.8 = -41.6 (\text{kN})$$

$$F_{N2左} = F_{N2左}^0 \sin \varphi_2 + F_H \cos \varphi_2 = 105 \times 0.555 + 82.5 \times 0.832 = 58.3 + 68.6 = 126.9 (\text{kN})$$

$$F_{N2右} = F_{N2右}^0 \sin \varphi_2 + F_H \cos \varphi_2 = 5 \times 0.555 + 82.5 \times 0.832 = 2.8 + 68.6 = 71.4 (\text{kN})$$

其他各截面内力的计算方法同上,结果见表 2-1。

表 2-1 三铰拱的内力计算

拱轴分点	纵坐标/m	$\tan \varphi_K$	$\sin \varphi_K$	$\cos \varphi_K$	F_{QK}^0
0	0	1.333	0.800	0.599	105.0
1	1.75	1.000	0.707	0.707	105.0
2(左,右)	3	0.667	0.555	0.832	105.0, 5.0
3	3.75	0.333	0.316	0.948	5.0
4	4	0.000	0.000	1.000	5.0
5	3.75	-0.333	-0.316	0.948	-25.0
6	3	-0.667	-0.555	0.832	-55.0
7	1.75	-1.000	-0.707	0.707	-85.0
8	0	-1.333	-0.800	0.599	-115.0

续表

M/kN·m			F _Q /kN			F _N /kN		
M _K	-F _H y _K	M _K	F _{QK} ⁰ cos φ _K	-F _H sin φ _K	F _{QK}	F _{QK} ⁰ sin φ _K	F _H cos φ _K	F _{NK}
0.0	0.0	0.0	63.0	-66.0	-3.0	84.0	49.5	133.5
157.5	-144.4	13.1	74.2	-58.3	15.9	74.2	58.3	132.5
315.0	-247.5	67.5	87.4, 4.2	-45.8	41.6, -41.6	58.3, 2.8	68.6	126.9, 71.4
322.5	-309.4	13.1	4.7	-26.1	-21.4	1.6	78.3	79.9
330.0	-330.0	0.0	5.0	0.0	5.0	0.0	82.5	82.5
315.0	-309.4	5.6	-23.7	26.1	2.4	7.9	78.2	86.2
255.0	-247.5	7.5	-45.8	45.8	0.0	30.5	68.6	99.1
150.0	-144.4	5.6	-60.1	58.3	-1.8	60.1	58.3	118.4
0.0	0.0	0.0	-68.9	66.0	-2.9	92.0	49.5	141.5

【例 2-7】 试求图 2-23(a) 所示对称三铰拱在均布荷载 q 作用下的合理轴线。

【解】 作出相应的简支梁,如图 2-23(b) 所示,其弯矩方程为

$$M^0 = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{1}{2}qx(l-x)$$

由式(2-3)求得

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{\frac{ql^2}{8}}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

所以,由式(2-9)可得合理轴线方程为

$$y = \frac{\frac{1}{2}qx(l-x)}{\frac{ql^2}{8f}} = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

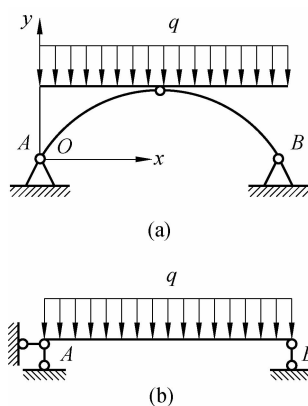


图 2-23

由此可见,在满跨的竖向均布荷载作用下,三铰拱的合理轴线是一条抛物线。因此,房屋建筑中的拱轴线常采用抛物线。



任务 2.4 静定平面桁架及其内力计算



任务导引

梁和刚架构件的截面一般为实腹截面,承受的主要内力为弯矩,横截面上主要产生非均匀分布的弯曲正应力[见图 2-24(a)],在截面的外边缘处正应力最大,而中性层附近的材料所承受的正应力很小,材料的性能得不到发挥。同时,随着跨度的加大,这样的实腹梁的自重也带来了较大的内力,在结构和经济性上都极不合理。因此,随着人们生产实践经验的增加,逐渐形成了格构化的桁架结构形式,如图 2-24(b)所示。这种结构形式将实腹构件中受力较小的中性层附近的材料去掉,剩下两部分:一部分是远离中性层的主要起抗弯作用的上、下翼缘部分,称为上、下弦杆;另一部分是联结上、下弦杆并主要起到抗剪作用的腹杆部分。它们以二力杆件的形式出现,此时在竖向荷载的作用下,构件主要承受轴力,每根杆件均为轴向拉杆或轴向压杆,每根杆件的横截面上应力分布均匀,按拉伸或压杆稳定理论设计这些杆件,材料的力学性能可以得到极大的发挥;同时可以大大减小结构部分带来的自重,比实腹梁更广泛地应用于更大跨度的楼(屋)盖结构和各种空间结构。

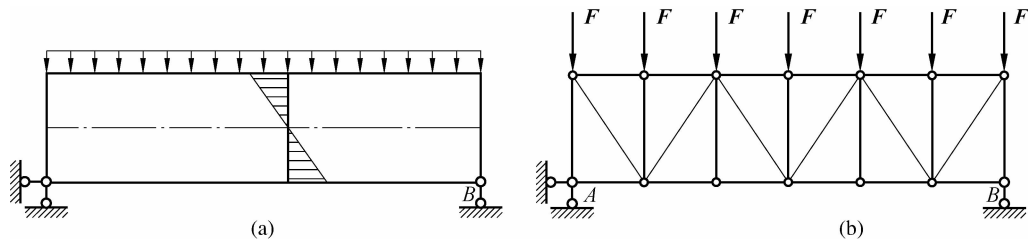


图 2-24

工程中用于制作桁架的建筑工程材料主要有钢材、木材和钢筋混凝土,可以根据建筑功能和空间跨度来选择,不过目前工程中应用最多、可建跨度范围最大的是钢桁架。图 2-25 所示为我国建造的最早的一座简支钢桁架桥梁——钱塘江大桥。图 2-26 所示为 1898 年英国建造的福斯湾悬臂钢桁架桥。



图 2-25



图 2-26

知识点学习

2.4.1 桁架的特点

桁架结构是一种常见的结构形式,在土木工程中有很广泛的应用,尤其是大跨度结构,如屋架、桥梁、井架、起重机架和高压线塔等。如图 2-27(a)、(b)所示的钢筋混凝土屋架和钢木屋架就属于桁架结构。武汉长江大桥和南京长江大桥的主体结构也是桁架结构,如图 2-27(e)所示。

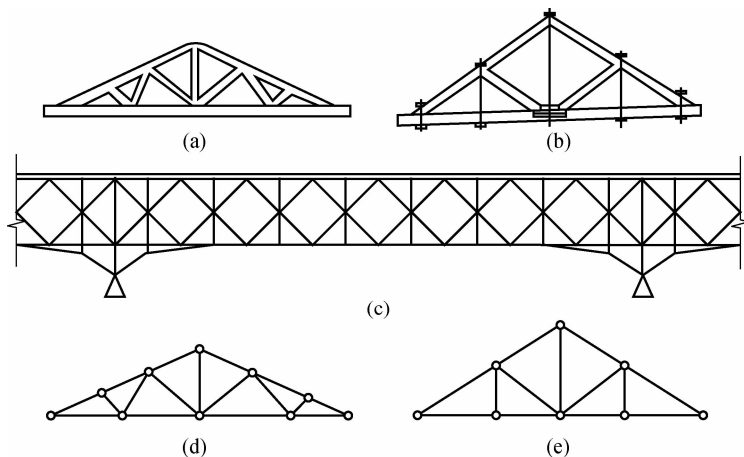


图 2-27

桁架是由若干直杆在两端相互联结组成的几何不变结构。如果各杆件的轴线位于同一平面内,则称为平面桁架结构;如果各杆件的轴线在空间分布,则称为空间桁架结构。

科学试验和理论分析的结果表明,各种桁架具有共同的特性:在结点荷载的作用下,桁架中各杆的截面内力主要是轴力,横截面上的应力基本均匀分布,而弯矩和剪力则很小,可以忽略不计。因此,从力学的观点来看,各结点所起的作用和理想铰是接近的。因此,图 2-27(a)、(b)所示桁架的计算简图分别如图 2-27(d)、(e)所示。桁架与梁相比,其优点是



材料的使用更加经济合理,自重更轻;其缺点是结点多、施工复杂。所以,桁架多用在桥梁、屋架、水闸闸门构架、输电塔架及其他大跨度结构中。

为了简化计算,应选取既能反映结构的主要受力性能,又便于计算的计算简图。通常对实际桁架的计算简图采用下列假定:

- (1) 桁架的各杆之间都是用杆端部铰链相联,且各结点都是光滑无摩擦的理想铰结点。
- (2) 各杆的轴线都是直线且在同一平面内,并通过铰的中心。
- (3) 荷载和支座约束力都作用在结点上,且位于桁架平面内。
- (4) 各杆的重量略去不计,或平均分配在杆件两端的结点上。

满足上述特点的桁架称为理想桁架,理想桁架中的各杆均为二力杆。图 2-28 就是由上述的假设简化得到的图 2-27(a) 所示实际桁架的计算简图。

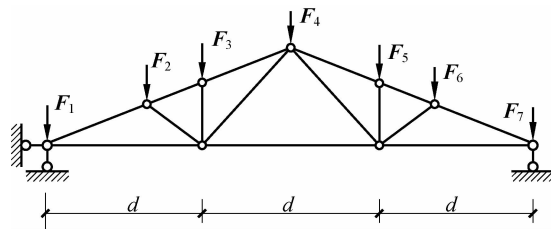


图 2-28

实际工程中的桁架,受力比较复杂,与理想桁架的特点并不完全符合。例如,在钢结构中,结点通常都是铆接或焊接的,有些杆件在结点处可能还是连续的,这就使得结点具有一定的刚性;木桁架的榫接或螺栓联结处的结点构造也不完全符合理想铰的情况;各杆轴不一定绝对平直;结点上各杆轴线也不一定全交于一点;荷载也不一定都作用在结点上;等等。这些因素的影响还会使桁架产生除主要轴力外的其他次要内力(简称次内力)。科学试验计算和工程实践证明,在实际工程中次内力对桁架的影响一般来说是很小的,可以忽略不计,因此本任务只讨论理想桁架的情况。

在桁架中,各杆件由于所处位置的不同,分别有不同的名称,总体可分为弦杆和腹杆两大类。如图 2-29 所示的屋架,桁架上边外围的杆件称为上弦杆,桁架下边外围的杆件称为下弦杆,上弦杆与下弦杆之间的杆件称为腹杆。腹杆又可分为竖杆和斜杆。各杆的联结处称为结点(或节点)。弦杆相邻结点间的区间称为结间,其水平间距离称为结间长度,两支座间的水平距离 l 称为跨度。两支座连线至桁架最高点的距离 h 称为桁高。

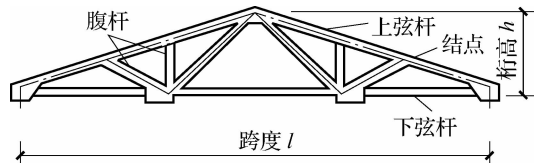


图 2-29

2.4.2 桁架的分类

桁架按照不同的分类方式可分为不同的类型。

1. 按照桁架的几何组成方式分类

桁架按照几何组成方式分类,可分为简单平面桁架、联合桁架和复杂桁架。

(1)简单平面桁架。由基础或一个基本的铰接三角形[3根杆与3个铰结点构成一个铰接三角形,见图 2-30(a)],以后依次增加二元体[见图 2-30(b)、(c)、(d)、(e)、(f)],从而得到无多余约束的几何不变体系,称为简单平面桁架。将构件数和铰结点数分别记为 n 、 m ,根据上述规则,它们之间的关系为

$$n=3+2(m-3)=2m-3$$

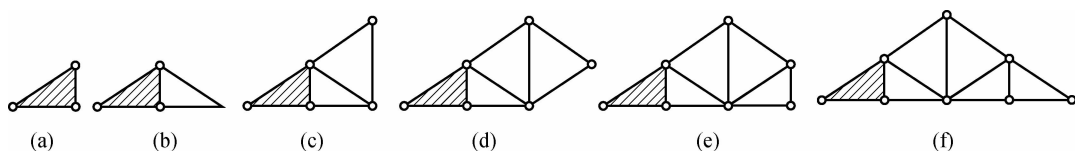


图 2-30

图 2-31(a)、(b)为简单平面桁架,且为静定结构。图 2-31(c)为悬臂式简单平面桁架。显然,如果在简单平面桁架上增加杆件或支承约束力超过 3,则静力学问题将由静定变为超静定。

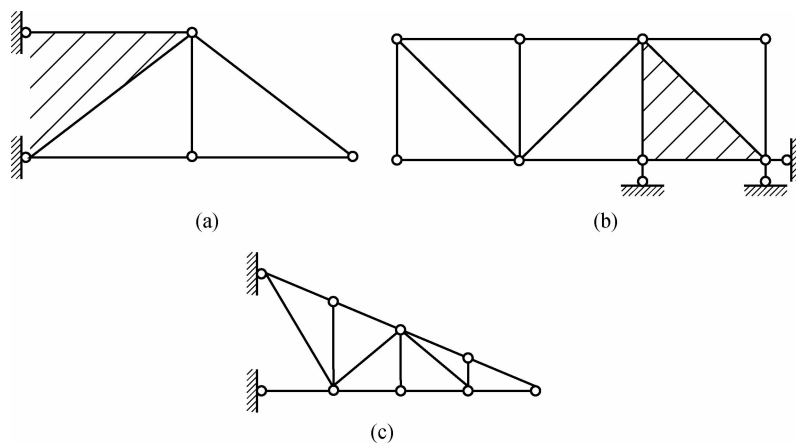


图 2-31

(2)联合桁架。由几个简单桁架按照几何不变体系的组成规则(三刚片规则或两刚片规则)所组成的桁架称为联合桁架,如图 2-32 所示。

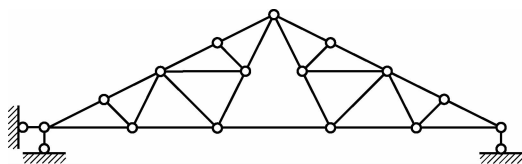


图 2-32

(3)复杂桁架。不按以上两种方式组成的其他桁架称为复杂桁架,如图 2-33 所示。

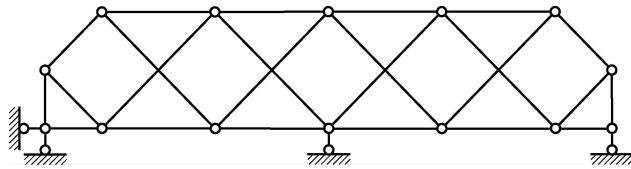


图 2-33

2. 按照桁架的外形特点分类

按照桁架的外形特点分类,桁架可分为三角形桁架、平行弦桁架、梯形弦桁架和抛物线桁架,分别如图 2-34(a)、(b)、(c)、(d)所示。

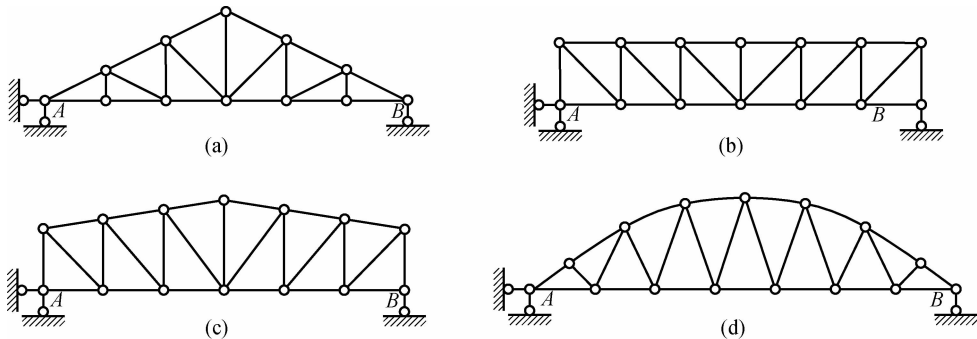


图 2-34

3. 按照整体受力特征分类

按照整体受力特征(或按支座反力的性质)分类,桁架可分为下两类:

- (1) 梁式桁架或无推力桁架。图 2-34 所示均属于梁式桁架。
- (2) 拱式桁架或有推力桁架。图 2-35 所示为拱式桁架,也是有推力桁架,其支座反力的特征与三铰刚架或三铰拱的特征相同。

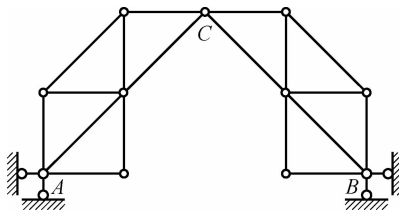


图 2-35

4. 按静力特性分类

按静力特性分类,桁架可分为以下两类:

- (1) 静定桁架。静定桁架是无多余约束的几何不变体系,用静力平衡方程可求解所有支座反力和杆件轴力。
- (2) 超静定桁架。超静定桁架是有多余约束的几何不变体系,需要用超静定结构的求解方法求得所有支座反力和全部内力。

2.4.3 桁架的内力计算

1. 判定桁架中的零杆

桁架中常有一些具有特殊形状的结点(见图 2-36),掌握了这些结点的平衡规律,可为计算提供便利。

根据不同的结点类型,掌握结点的平衡规律。

(1) \angle 形结点。图 2-36(a)所示为不共线的两杆结点,当结点无荷载作用时,两杆的内力均为零。凡内力为零的杆件称为零杆。零杆虽然轴力为零,但不能被当成多余的杆件去掉,静定结构若被去掉任何一根杆件,都会变成几何可变体系而不能承载。

(2) \perp 形结点。 \perp 形结点为三杆相交的结点,分为图 2-36(b)和图 2-36(c)两种情况。

①如图 2-36(b)所示,三杆汇交的结点上无荷载作用,且其中两杆在一条直线上,则第三杆 $F_{N3}=0$,为零杆,而共线的两杆轴力 $F_{N1}=F_{N2}$ (大小相等,同为拉力或同为压力)。

②如图 2-36(c)所示,在其中二杆共线的情况下,若另一杆有共线的外力 F 作用,则有 $F_{N1}=F_{N2}, F_{N3}=F$ 。

(3) X形结点。X形结点为四杆相交的结点,如图 2-36(d)所示。当结点上无荷载作用,且四杆轴两两共线时,同一直线上两杆轴力大小相等、性质相同,即 $F_{N1}=F_{N2}, F_{N3}=F_{N4}$ 。

(4) K形结点。图 2-36(e)、(f)所示的四杆相交的结点为 K形结点,其中,①和②两根杆件共线,当 $F_{N1} \neq F_{N2}$ 时, $F_{N3} = -F_{N4}$; 当 $F_{N1} = F_{N2}$ 时, $F_{N3} = F_{N4} = 0$ 。

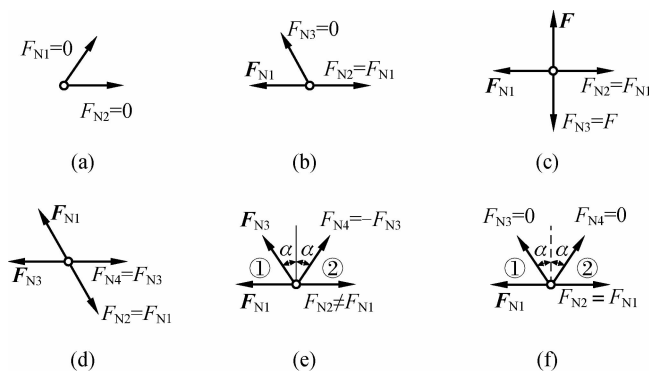


图 2-36

因此,一般情况下,在求桁架内力前,应先判定结构中是否有零杆和内力相同的杆。例如,判定图 2-37 中以虚线表示的各杆皆为零杆,可使计算大为简化。

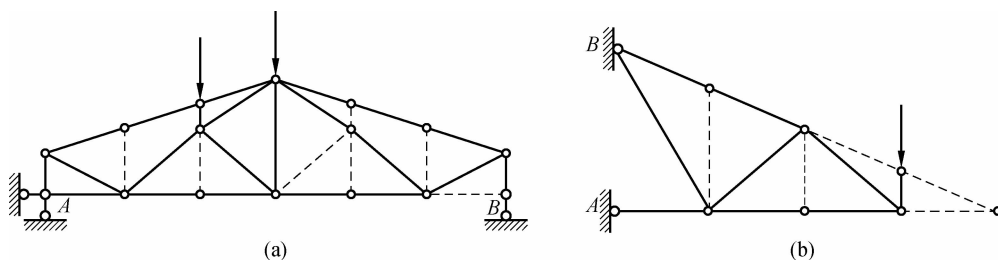


图 2-37



2. 桁架内力的计算方法

1) 结点法

结点法就是取桁架的结点为隔离体,利用结点的静力平衡条件来计算相关杆件的内力或支座反力。因为桁架的各杆只承受轴力,作用于任意一结点的各力组成一个平面汇交力系,所以可就每个结点列出两个平衡方程进行解算。

因为平面汇交力系的平衡方程只有两个($\sum F_x=0$ 和 $\sum F_y=0$),所以运用结点法最多只能求解两个未知量。因此,每次截取的结点上未知轴力的杆件应不多于两根。计算时,可先由桁架整体平衡计算出支座约束力,每次选择所受未知轴力数小于或等于两个的结点进行计算,即可求出整个桁架中各杆的内力。在画结点受力图时,先将杆件对结点的作用力设定为拉力,如果计算结果为正值,则说明假设方向与真实方向相同,即杆件轴力为拉力;反之,杆件轴力为压力。

2) 截面法

截面法是用一假想截面把桁架截为两部分,选取任意一部分为隔离体,建立静力平衡方程求出未知的杆件内力。因为作用于隔离体上的力系为平面一般力系,所以要求所选取的隔离体上未知力的数目一般不应多于 3 个,这样可直接把被截断杆件的全部未知力求出。一般情况下,选取截面时被截断的杆件不应超过 3 根。

截面法适用于联合桁架和简单桁架指定杆件的轴力计算。例如,欲求图 2-38(a)所示桁架中杆 CH 的轴力(F_{N1}),可先用 $n-n$ 截面截开桁架,取右边部分为研究对象,其受力如图 2-38(b)所示,可应用方程 $\sum M_H(\mathbf{F})=0$ 求出轴力 F_{N6} ;再用 $m-m$ 截面截开桁架,取左边部分为研究对象,其受力如图 2-38(c)所示,应用方程 $\sum M_G(\mathbf{F})=0$ 即可求出轴力 F_{N1} 。

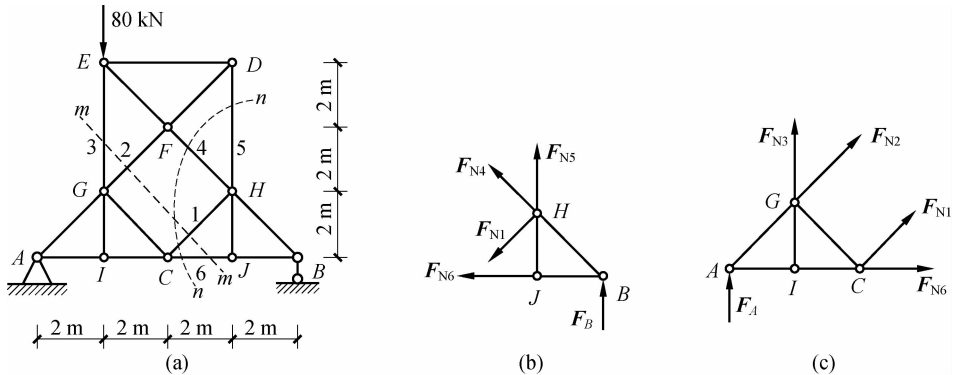


图 2-38

如前所述,用截面法求桁架内力时,应尽量使所截断的杆件不超过 3 根,这样所截杆件的内力均可求出。求解有些问题时,所作截面可能截断了 3 根以上的杆件,但只要被截各杆中,除一杆外,其余各杆均平行和汇交于一点,则该杆的内力仍可首先求得。例如,在图 2-39(a)中,当仅求图中 a 杆的内力时,最简便的方法就是用截面 I-I 截取右下部分为隔离体,受力如图 2-39(b)所示,虽然截断了 4 根杆件,但其中有 3 根是平行的,因此只需列出投影式平衡方程 $\sum F_x=0$,在得到的未知力中只有 F_{Na} 有投影,做到了列一个方程解一个

未知量,计算快速简便。图 2-39(c)所示的问题,当仅求图中 a 杆的内力时,最简便的方法就是用截面 I—I 截取桁架,以左边(或以右边)为隔离体,如图 2-39(d)所示。虽然截断了 5 根杆件,但其中有 4 根汇交于铰结点 C ,故只需列一个力矩式平衡方程 $\sum M_C=0$ 就可求出 F_{Na} 。这两个例子都体现了用截面法求结构中某几根杆内力的快速与简便的特点。

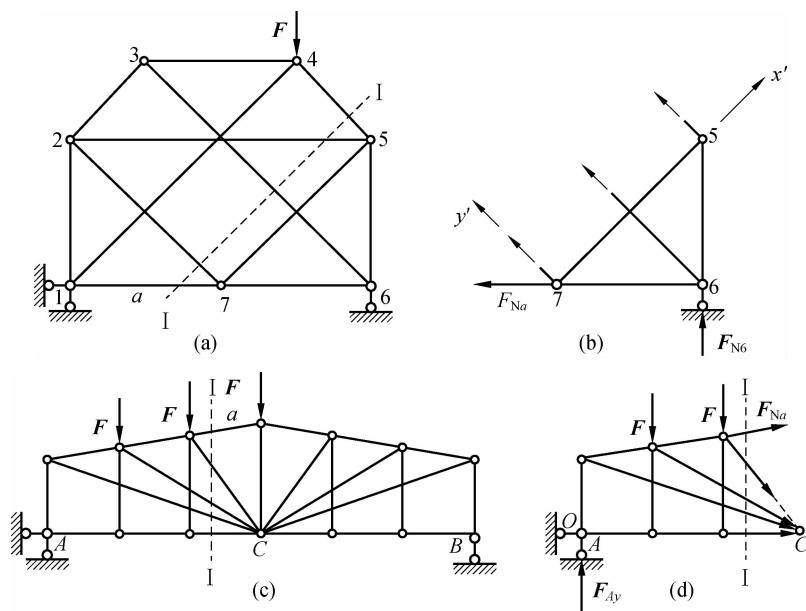


图 2-39

总之,在用截面法求解桁架结构内力时需注意以下几个方面的问题:

(1)列力矩式平衡方程计算力矩时,在力臂不易确定的情况下,注意利用力的分解来求力矩(合力矩定理),而且隔离体确定后,力可以沿着其作用线移动到某一个结点进行分解,不影响隔离体的平衡。

(2)在平衡方程的三种形式中,应注意基本形式中投影轴和矩心的恰当选取。在二力矩式中,投影轴不能垂直于两个矩心;在三力矩式中,三个矩心不能在一条直线上。可以根据需要选取平衡方程的形式。在矩心的选择上应尽量选多个未知力的交点,投影轴应尽量平行(或垂直)于多个未知力的作用线方向。

(3)应用投影法和力矩法的平衡方程时,都应尽量使每个方程含有一个未知量。

3) 联合法

在桁架计算中,有的杆件用一种方法难以求得其内力,通常将结点法和截面法联合应用更为便利。如先用截面法计算联合桁架中联结杆的轴力,或用截面法计算某些杆的轴力,然后再用结点法计算其他杆件的轴力。在联合桁架的计算中,若只需求解某几根指定杆件的内力,一般单独应用结点法或截面法不能一次求出结果时,则需联合应用结点法和截面法进行求解。图 2-40 所示均为联合桁架,只用结点法求杆件内力将会遇到铰结点未知力超过两个的情况,故应将截面法与结点法结合起来联合求解,才能简便、快速地求得待求杆件的内力。

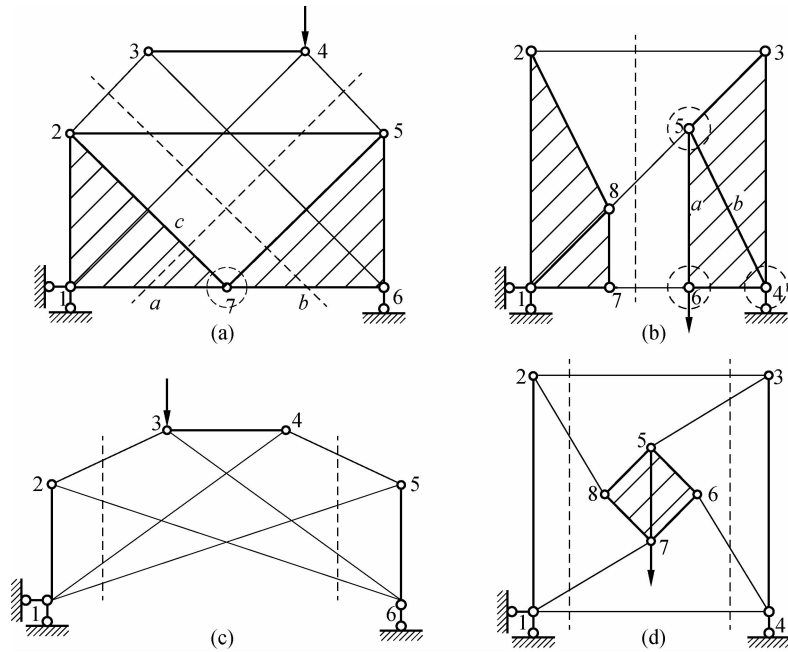


图 2-40

在联合桁架的求解中,需首先解决如下问题:

(1)应先对平面桁架进行几何分析,判定其类型,再选择相应的解法。

(2)当联合桁架由两刚片组成时[见图 2-40(b)],应先截断联系杆件,求出联系杆件的内力,再选择结点求解待求杆(如图中的 a 、 b)的内力。

(3)当联合桁架由三刚片组成时[见图 2-40(a)、(c)、(d)],每两个刚片之间的联系杆件为 4 根,一般用双截面法求解,每个截面有 4 个未知力,两个截面独立有 6 个未知力,建立 6 个方程,联立求解。

任务解析

【例 2-8】 平面桁架的受力情况及尺寸如图 2-41(a)所示,试求桁架各杆的轴力及绘制轴力图。

【解】 由于该桁架及荷载分布都是对称的,在对称位置上的支座约束力和轴力必然相等,故只需计算半边桁架的内力。

(1)计算桁架的支座约束力。取桁架整体为研究对象,根据平衡条件可得

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, F_{By} \times 8 - 8 \times 8 - 10 \times 4 = 0$$

$$F_{By} = \frac{1}{8} \times (8 \times 8 + 10 \times 4) = 13 \text{ (kN)}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{By} - 8 - 8 - 10 = 0$$

$$F_{Ay} = 26 - F_{By} = 13(\text{kN})$$

(2) 计算各杆内力。先从结点 F (或结点 H) 开始, 然后依次选取结点 $G \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ (或结点 $G \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B$) 进行求解。

① 结点 F : 其隔离体如图 2-41(b) 所示。根据平衡条件可得

$$\sum F_y = 0, F_{NFC} = -8(\text{kN})$$

$$\sum F_x = 0, F_{NFG} = 0$$

② 结点 G : 其隔离体如图 2-41(c) 所示。根据平衡条件可得

$$\sum F_y = 0, -F_{NGC} \cos 45^\circ - F_{NGE} \cos 45^\circ - 10 = 0$$

$$\sum F_x = 0, F_{NGE} \sin 45^\circ - F_{NGC} \cos 45^\circ = 0$$

联立求解, 得

$$F_{NGC} = F_{NGE} = -5\sqrt{2}(\text{kN}) = -7.07(\text{kN})$$

③ 结点 C : 其隔离体如图 2-43(d) 所示。根据平衡条件可知

$$\sum F_y = 0, F_{NFC} + F_{NGC} \cos 45^\circ - F_{NCA} = 0$$

$$\sum F_x = 0, F_{NGC} \cos 45^\circ - F_{NCD} = 0$$

联立求解, 得

$$F_{NCD} = 5(\text{kN}), F_{NCA} = -13(\text{kN})$$

④ 结点 D : 其隔离体如图 2-41(e) 所示。根据对称性可得

$$F_{NDA} = F_{NDB}$$

$$\sum F_y = 0, F_{NDA} = -F_{NDB}$$

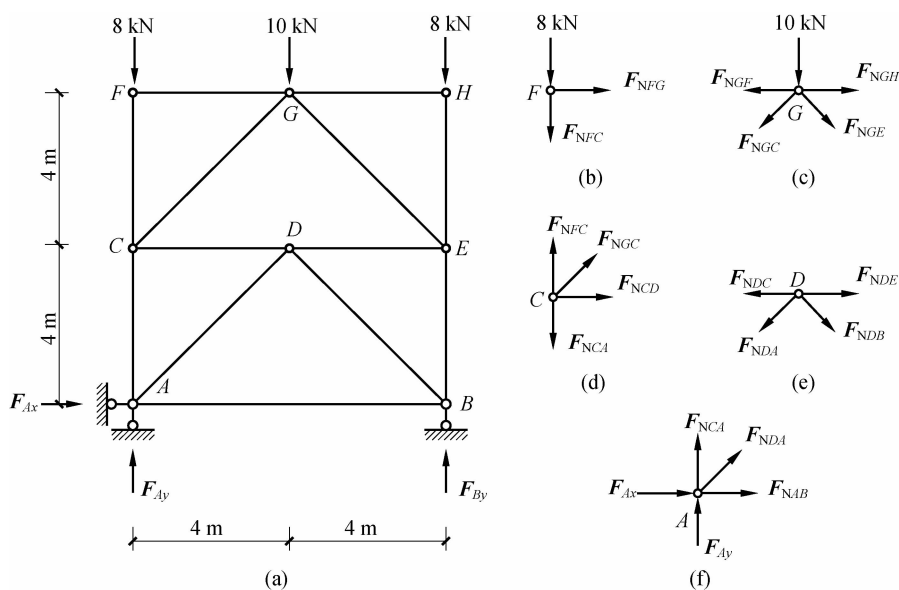


图 2-41

故此可判断出



$$F_{NDA} = F_{NDB} = 0$$

⑤结点 A: 其隔离体如图 2-41 图(f)所示。根据平衡条件可得

$$\sum F_x = 0, F_{NAB} = 0$$

桁架其余杆件的内力, 可以根据对称性求得。

由于桁架的内力只有轴力, 且一个杆各截面的轴力相等, 故作轴力图时, 只需将轴力直接标注在相应杆件的一侧即可, 如图 2-42 所示。

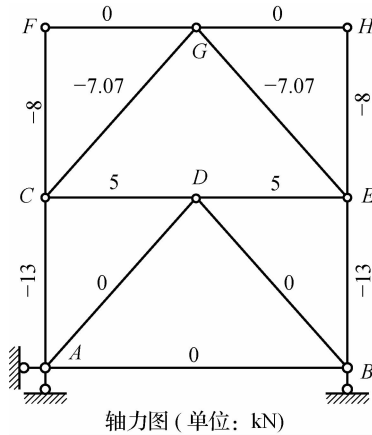


图 2-42

【例 2-9】 试求图 2-43(a) 所示桁架中 1、2、3 杆的轴力, 其中 $\alpha = 60^\circ$ 。

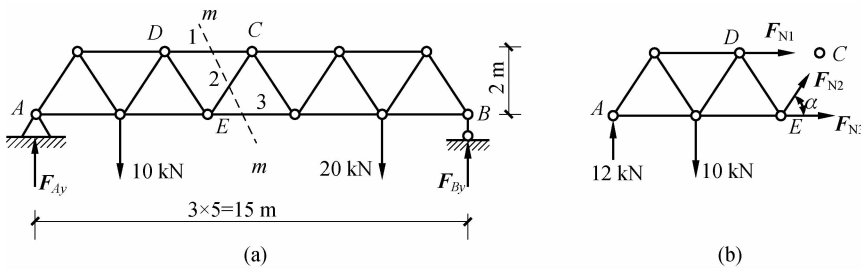


图 2-43

【解】 (1) 求支座反力。取桁架整体为研究对象, 根据平衡条件可得

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, F_{By} \times 15 - 20 \times 12 - 10 \times 3 = 0, F_{By} = 18(\text{kN})$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{By} - 10 - 20 = 0, F_{Ay} = 12(\text{kN})$$

(2) 计算杆轴力。假想用截面 $m-m$ 切断 1、2、3 杆, 取左半部分为隔离体, 受力如图 2-43(b) 所示。根据平衡条件可得

$$\sum M_E = 0, -12 \times 6 + 10 \times 3 - F_{N1} \times 2 = 0, F_{N1} = -21(\text{kN})$$

$$\sum M_C = 0, -12 \times 7.5 + 10 \times 4.5 + F_{N3} \times 2 = 0, F_{N3} = 22.5(\text{kN})$$

$$\sum F_y = 0, 12 + F_{N2} \sin \alpha - 10 = 0, F_{N2} = -2.3(\text{kN})$$

为了计算方便,在列力矩式取矩时要选择合适的矩心,可以将力沿其作用线滑移到便于计算力臂的位置。例如,为了计算 F_{N3} ,可选择对 C 点取矩,所列方程将只含一个未知量;用截面法求桁架各杆件的轴力时,所假想的截面既可以是开放的,也可以是闭合的,平面或曲面都行,但必须将原桁架截断为两个部分;在列平衡方程进行计算时,矩心应选在大多数未知轴力的交点处,且应使投影轴垂直于大多数未知力,以使计算更简便。

【例 2-10】 试求图 2-44(a)所示桁架中杆 a 、 b 、 c 的内力。

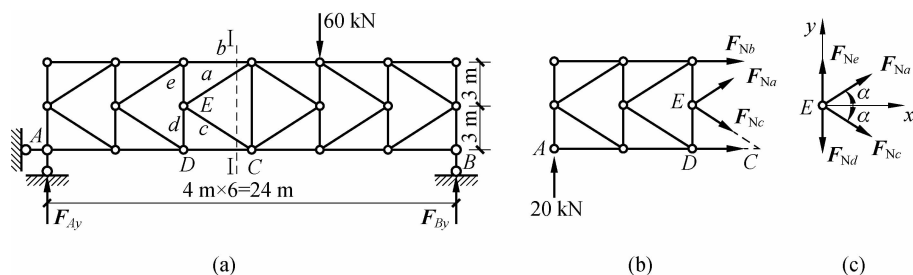


图 2-44

【解】 (1)求支座反力。取整体为研究对象,根据平衡条件可得

$$\sum M_B(\mathbf{F})=0, -F_{Ay} \times 24 + 60 \times 8 = 0, F_{Ay} = 20(\text{kN})$$

$$\sum F_y = 0, 20 + F_{By} - 60 = 0, F_{By} = 40(\text{kN})$$

(2)求杆的轴力。假想用截面 I—I 将桁架截断,取左半部分为隔离体,受力如图 2-44(b)所示。由于此截面切断了 4 根杆件,将会产生 4 个未知力,仅由所取得的隔离体不能算出所有杆件的轴力,需要由其他条件算出某一个未知力或某两个未知力的关系,从而使该截面只含有 3 个独立的未知轴力,这样才能进行进一步的计算。

取结点 E 为研究对象,受力如图 2-44(c)所示。由平衡条件可得

$$\sum F_x = 0, F_{Na} \cos \alpha + F_{Nc} \cos \alpha = 0$$

$$F_{Na} = -F_{Nc}$$

再根据图 2-44(b)所示的隔离体列平衡方程,得

$$\sum F_y = 0, F_{Na} \sin \alpha - F_{Nc} \sin \alpha + 20 = 0$$

$$F_{Na} = -16.7(\text{kN}), F_{Nc} = 16.7(\text{kN})$$

$$\sum M_C(\mathbf{F})=0, -20 \times 12 - F_{Na} \cos \alpha \times 6 - F_{Nb} \times 6 = 0$$

$$F_{Nb} = -26.7(\text{kN})$$

项目小结

1. 多跨静定梁的类型

根据多跨静定梁的几何组成规律,将多跨静定梁分为连续简支型多跨静定梁、间隔搭接型多跨静定梁、混合型多跨静定梁三种类型。



2. 多跨静定梁的几何组成

(1)基本部分。基本部分是指不依赖于其他部分能独立与基础组成一个几何不变体系的部分,或者说本身就能独立地承受荷载并能维持平衡的部分。

(2)附属部分。附属部分是指不能独立承受荷载的几何可变体系,它需要与基本部分相联结才能承受荷载。

3. 多跨静定梁的层次图

为了清楚地表示多跨静定梁各部分之间相互支承与依赖的关系,把基本部分画在最下层,各附属部分依次画在其相邻基本部分的上层,梁段之间的中间铰链用形式上的固定铰支座(支座与基本部分固定)表示,这样形成的图形称为层次图。

4. 多跨静定梁的计算原则

计算多跨静定梁时,应遵循先附属部分后基本部分的原则。

5. 计算多跨静定梁内力的步骤

计算多跨静定梁内力的步骤可归纳为以下三步:

(1)对结构进行几何组成分析,按几何组成分析中刚片的选取次序确定基本部分和附属部分,作出层次图。

(2)根据所作层次图,从上层向下层依次取研究对象,计算各梁的约束力。

(3)按照作单跨梁内力图的方法,分别作出各梁段的内力图,然后再按原顺序将各图联结在一起,即得多跨静定梁的内力图。

6. 作刚架内力图的基本方法

作刚架内力图的基本方法是先将刚架拆成单个杆件,求各杆件的杆端内力,分别作出各杆件的内力图;然后将各杆的内力图合并在一起即得到刚架的内力图。在求解各杆的杆端内力时,应注意结点的平衡。

7. 三铰拱的内力计算

三铰拱的内力计算应与相应简支梁的剪力和弯矩联系起来进行。这样可将求三铰拱的内力归结为求拱的水平推力及相应简支梁的剪力和弯矩,然后代入相应公式计算即可。

8. 求解静定平面桁架内力的基本方法

求解静定平面桁架内力的基本方法是结点法和截面法。前者是以结点为研究对象,用平面汇交力系的平衡方程求解内力,一般首先选取的结点未知内力的杆不超过两根;而截面法是用假想的截面把桁架断开,取一部分为研究对象,用平面任意力系的平衡方程求解内力,应注意假想的截面一定要把桁架截断为两部分(每一部分必须有一根完整的杆件),一个截面截断未知内力的杆件一般不应超过3根。

9. 静定结构的不同类型及比较

静定结构主要有静定梁、静定刚架、静定拱、静定桁架和组合结构。

(1)静定梁包括单跨静定梁和多跨静定梁。单跨静定梁可分为简支梁、外伸梁和悬臂梁,是组成各种结构的基本形式之一。多跨静定梁是使短梁跨越小跨度的一种较合理的结构形式。

(2)静定刚架分为简支刚架、悬臂刚架和三铰刚架。它是直杆经刚结点联结组成的结

构。由于有刚结点,各杆之间可以传递弯矩,内力分布较为均匀,可以充分发挥材料的性能;同时刚结点处的刚架杆数少,可以形成较大的内部空间。

(3)静定拱主要有三铰拱和带拉杆的三铰拱。静定拱是由曲杆组成,在竖向荷载作用下,支座处有水平反力的结构。水平推力使拱上的弯矩比相同情况下的梁的弯矩小得多,因而材料可以得到充分利用。又由于拱主要是受压,因此可以利用抗压性能好且抗拉性能差的砖、石和混凝土等作为建筑材料。

(4)静定桁架是由等截面直杆相互用铰链联结组成的结构。理想桁架的各杆均为只受轴向力的二力杆,内力分布均匀,可以用较少的材料跨越较大的跨度。

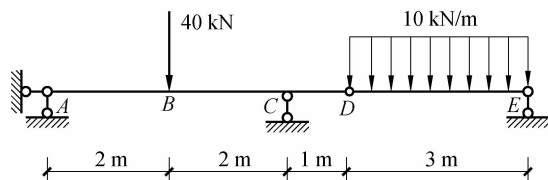
(5)组合结构是由各种静定平面结构组合而成的结构。

10. 静定结构的特性

静定结构是没有多余约束的几何不变体系。静定结构的反力和内力只用静力平衡条件就可以确定。静定结构在温度改变、支座移动和制造误差等影响下,不会产生内力和反力,但能使结构产生位移。当平衡力系作用在静定结构的某一内部几何不变部分上时,其余部分的内力和反力不受其影响;当对静定结构的某一内部几何不变部分上的荷载进行等效变换时,只有该部分的内力发生变化,其余部分的内力和反力均保持不变;当对静定结构的一个内部几何不变部分进行组成上的局部构造变换时,只有该部分的内力发生变化,其余部分的内力均保持不变。

思考与练习

- (1)分别说明多跨静定梁中基本部分与附属部分的几何组成和受力特点。
- (2)试根据层次图排列出由各梁段构建多跨静定梁的施工次序,排列出求解多跨静定梁约束力时选取研究对象的顺序。
- (3)多跨静定梁在梁段之间的铰链处无集中力偶作用时,弯矩总是等于零;当铰链处有集中力偶作用时,弯矩应等于多少?
- (4)刚架中的刚结点能传递弯矩,如果刚架的某一刚结点上只有两个杆件,且无外力偶作用,则结点上的两个杆端弯矩有什么关系?如果有外力偶作用,这种关系还存在吗?
- (5)如何根据刚架的弯矩图作它的剪力图,又如何根据剪力图作出其轴力图?
- (6)在某一荷载的作用下,静定桁架中可能存在零杆,由于零杆表示该杆不受力,因此该杆可以拆去。此种做法正确吗?
- (7)计算桁架内力时,应如何利用其几何组成特点简化计算来避免解算联立方程?
- (8)作图 2-45 所示多跨静定梁的剪力图和弯矩图。



(a)

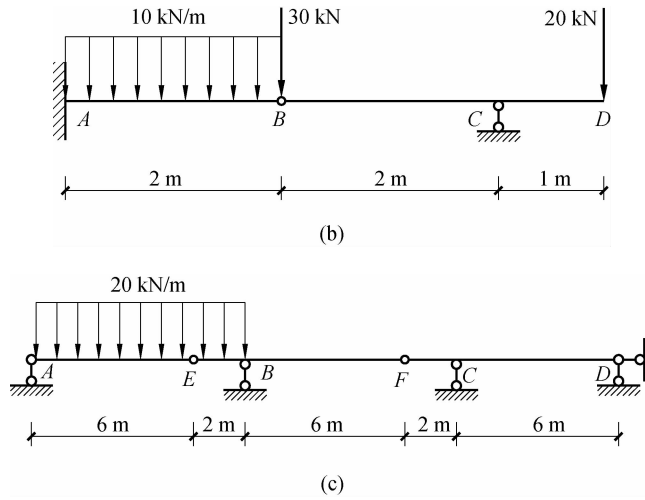
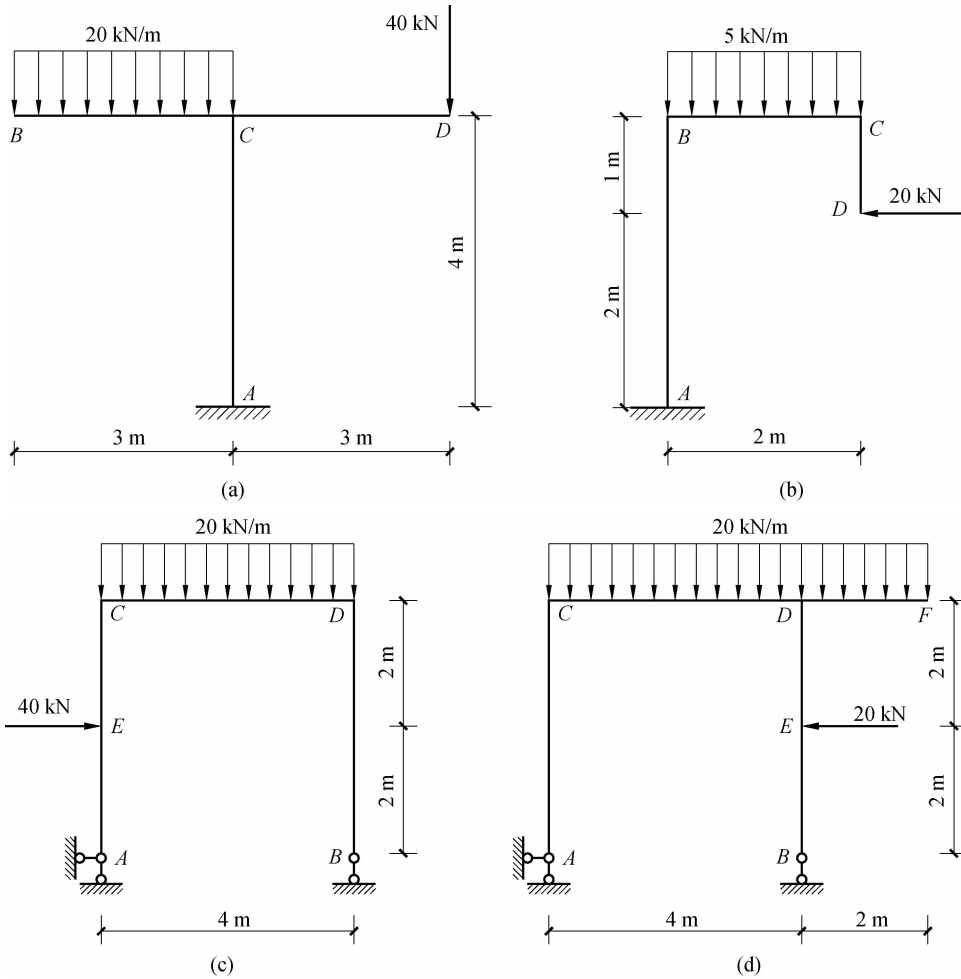


图 2-45

(9) 作图 2-46 所示各刚架的内力图(剪力图、弯矩图和轴力图)。



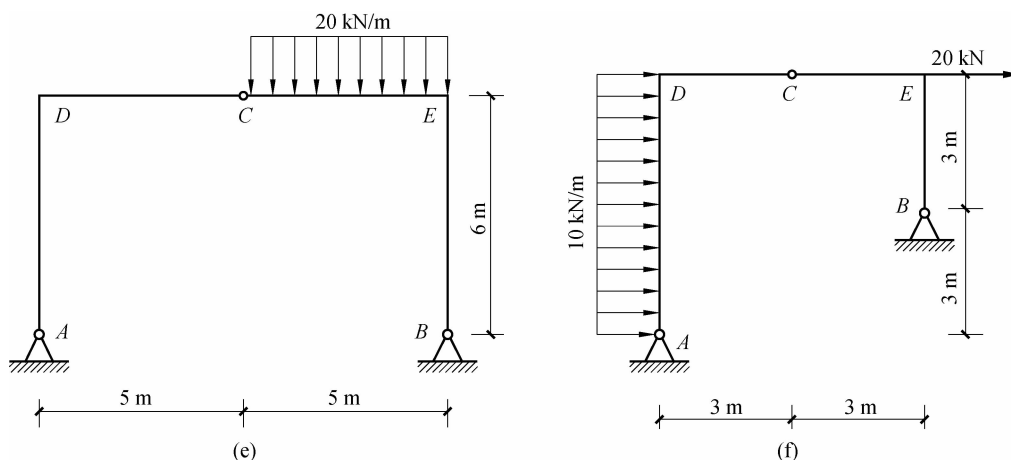


图 2-46

(10) 求图 2-47 所示圆弧拱的支座反力, 并求截面 K 处杆的内力(轴力、剪力和弯矩)。

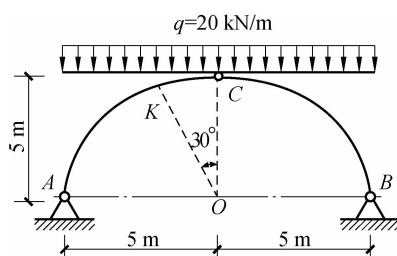


图 2-47

(11) 判断图 2-48 所示桁架中的零杆。

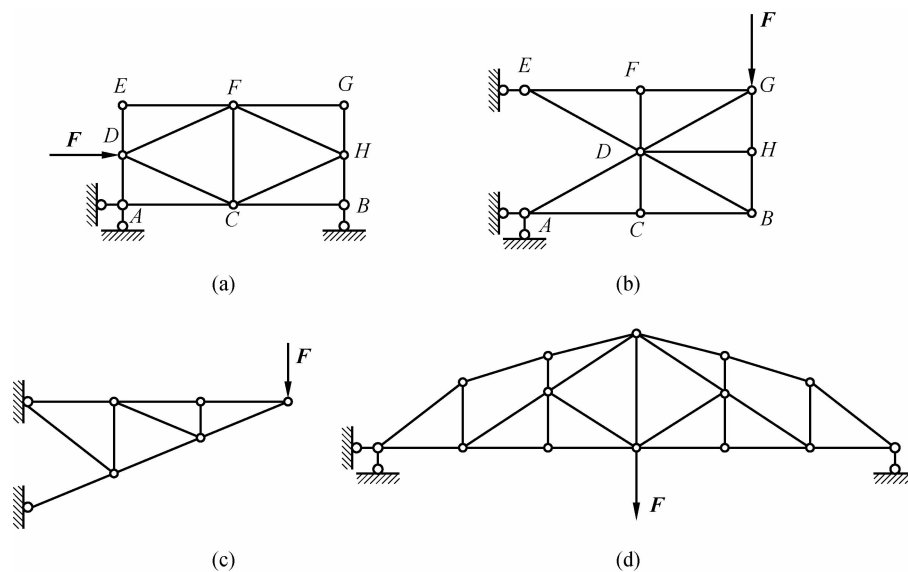


图 2-48



(12) 试用结点法求图 2-49 所示桁架中指定杆件的轴力。

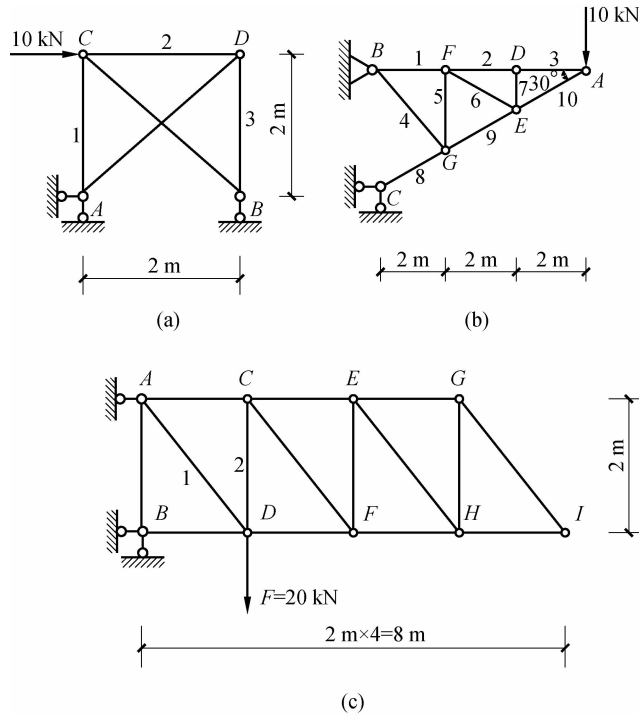


图 2-49

(13) 用截面法求图 2-50 所示桁架中指定杆件的轴力。

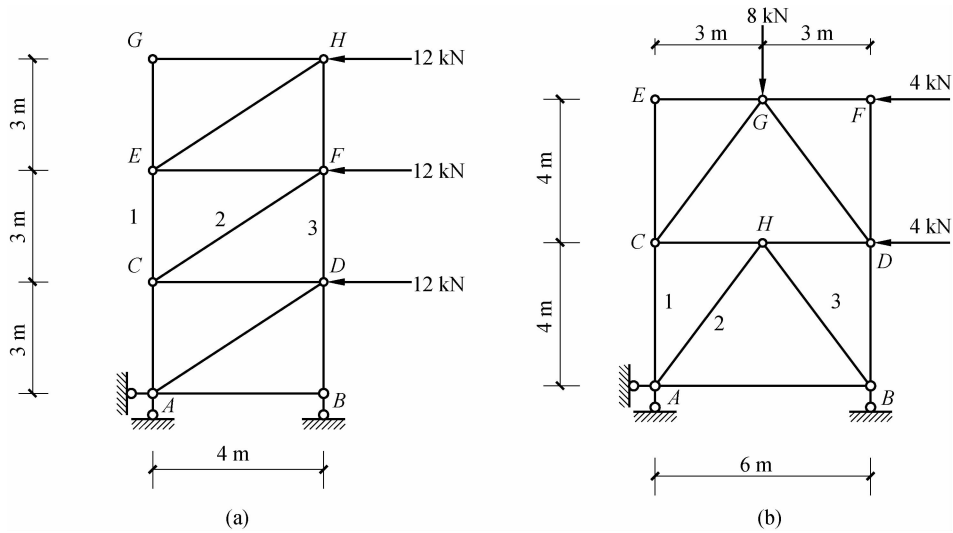


图 2-50