第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分学研究的主要对象；极限是微积分学研究的基本工具，贯穿高等数学的始终；连续是函数的一个重要性态. 本章通过简要复习函数的基本知识，学习极限与连续的概念，掌握极限的运算，为进一步学习微积分知识奠定基础.

第一节　函　　数

函数是微积分研究的对象，中学数学应用“集合”与“对应”已经给出了函数概念，并在此基础上讨论了函数的一些简单性质. 在这里除对中学数学的函数及其性质重点复习外，根据需要将对函数作进一步讨论.

一、函数的概念与性质

1. 函数的概念

在实际问题中，经常会遇到两类不同的量：一类在所考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，称为**常量**；另一类在所考察的过程中是变化的，可以取不同数值，称为**变量**.

实际问题中的诸变量之间往往是相互联系的，一个变量随另一个变量的变化而变化，这种关系通常表现为变量取值的对应关系，即函数关系.

引例　某名品鞋店出售某名牌鞋的单价为 500 元/双. 显然

销 售 量	销售收入
1 双	500 元
2 双	1 000 元
3 双	1 500 元
…	…

分析　对于集合 $A=\{1,2,3,\cdots\}$ 中任一值，按照乘以 500 的法则，在集合 $B=\{500,1\ 000,1\ 500,\cdots\}$ 中有唯一一个值与它对应. 如果用 x 表示 A 中的任一值，y 表

示 B 中相对应的值,则根据乘以 500 的法则知,$y=500x$,它反映了实际问题中销售量 x 与销售收入 y 之间的函数关系.一般地,有如下定义.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量,D 是给定的非空数集,如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时,变量 y 按照一定的法则 f 都有唯一确定的数值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**,记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**,变量 y 称为**因变量**(或**函数**),数集 D 称为函数的**定义域**,f 称为函数的**对应法则**.

当 x 取确定数值 $x_0\in D$ 时,通过法则 f,函数有唯一确定的值 y_0 与之相对应,称 y_0 为函数 $y=f(x)$在 x_0 处的**函数值**,记为

$$y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0).$$

由全体函数值构成的集合称为函数的**值域**,记为 M,即 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

由函数的定义可以看出,定义域和对应法则是确定函数的两个必不可少的要素,也就是说,如果两个函数的对应法则和定义域都相同,那么这两个函数就是相同的函数.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的,如引例中,函数 $y=500x$ 的定义域为 $A=\{1,2,3,\cdots\}$.若不考虑函数的实际意义,而抽象地研究函数,则规定函数的定义域是使其表达式有意义的一切实数组成的集合,一般考虑以下几个方面:

(1) 分式函数的分母不能为零;

(2) 偶次根式的被开方式必须大于等于零;

(3) 对数函数的真数必须大于零;

(4) 三角函数与反三角函数要符合其定义;

(5) 如果函数表达式中含有上述几种函数,则应取各部分定义域的交集.

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$; (2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\ln(2x+4)$.

解 (1) 由 $25-x^2\geqslant 0$,得 $-5\leqslant x\leqslant 5$,所以函数的定义域为 $[-5,5]$.

(2) 因为 $\begin{cases}3-x>0,\\2x+4>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x<3,\\x>-2,\end{cases}$ 所以函数的定义域为 $(-2,3)$.

2. 函数的性质

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义(区间 I 为函数 $f(x)$的整个定义域或其定义域的一部分),则函数一般具有下列几种特性.

1）有界性

定义 2　如果存在正数 M，使对任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**；否则，称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

例如，$y=\cos x$ 在其定义域内是有界的.

2）单调性

定义 3　若对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**（或**单调减少**）. 区间 I 称为**单调增区间**（或**单调减区间**）；单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**；单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

例如，$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

3）奇偶性

定义 4　设区间 I 关于原点对称，若对任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**偶函数**；若对任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**奇函数**；若函数既不是奇函数也不是偶函数，则称为**非奇非偶函数**.

例如，$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数，$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，$y=\sin x+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是非奇非偶函数.

4）周期性

定义 5　如果存在不为零的实数 T，使得对于任意的 $x\in I$，$x+T\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是**周期函数**，T 是 $y=f(x)$ 的一个**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的**最小正周期**.

例如，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

二、反函数与复合函数

1. 反函数

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每个数 y，在 D 中都有唯一确定的数 x 与之对应，且使 $y=f(x)$ 成立，则确定了一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数中 x 与 y 互换位置，即记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$.

在同一坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$

对称.

例如,引例中函数 $y=500x$ 的反函数为 $y=\frac{1}{500}x$,其定义域为$\{500,1\ 000,1\ 500,\cdots\}$,值域为$\{1,2,3,\cdots\}$.

2. 复合函数

定义 7 设 $y=f(u)$,其中 $u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,其中 u 称为**中间变量**.

例如,$y=\sqrt{u}$,$u=2+\sin x$ 可复合成 $y=\sqrt{2+\sin x}$.

复合函数还可以有多个中间变量,如 $y=\mathrm{e}^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x+1$ 复合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$,这里 u,v 都是中间变量.

注意 并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如,$y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+5$ 就不能构成复合函数. 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,$u=x^2+5\geqslant 5$,此时 $y=\arcsin u$ 无定义.

例 2 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=(1+2x)^2$; (2) $y=3^{\tan^2 x}$; (3) $y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$.

解 (1) $y=(1+2x)^2$ 可以看做由 $y=u^2$,$u=1+2x$ 复合而成.

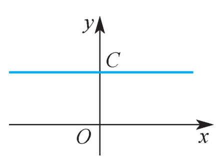
(2) $y=3^{\tan^2 x}$ 可以看做由 $y=3^u$,$u=v^2$,$v=\tan x$ 复合而成.

(3) $y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$ 可以看做由 $y=\arctan u$,$u=2^v$,$v=\sqrt{x}$ 复合而成.

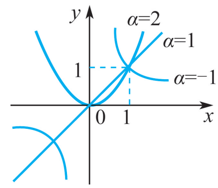
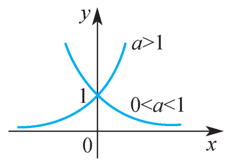
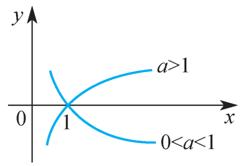
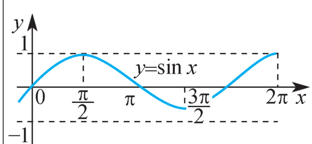
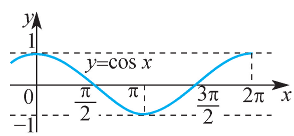
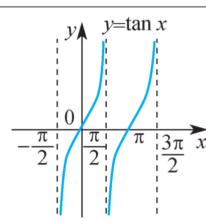
三、初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**. 为后面学习方便起见,现将这六类基本初等函数的表达式、定义域、值域、图形、性质等列表表示出来(见表 1-1).

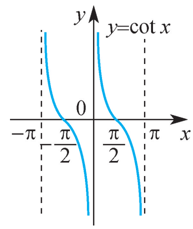
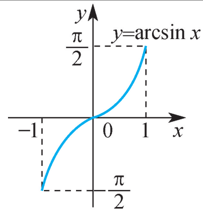
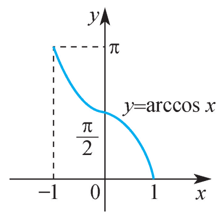
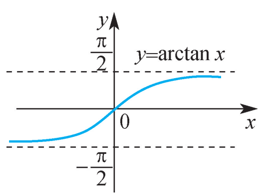
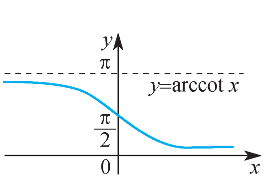
表 1-1

函 数	定义域和值域	图 形	性 质
常数函数 $y=C$ (C 为常数)	$x\in(-\infty,+\infty)$		有界、偶函数

续表

函数		定义域和值域	图形	性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$ (α 为实数)		定义域由 α 的取值决定，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		在第一象限内，当 $\alpha>0$ 时，单调增加；当 $\alpha<0$ 时，单调减少
指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0$，且 $a\neq1$，a 为常数)		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过点 $(0,1)$，在 x 轴上方. 当 $0<a<1$ 时，单调减少；当 $a>1$ 时，单调增加
对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$，且 $a\neq1$，a 为常数)		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过点 $(1,0)$，在 y 轴右边. 当 $0<a<1$ 时，单调减少；当 $a>1$ 时，单调增加
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		过原点，奇函数，有界，周期为 2π，在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，有界，周期为 2π，在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 内单调增加，在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，无界，周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$

续表

函数		定义域和值域	图形	性质
三角函数	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，无界，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		过原点，奇函数，有界，单调增加
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界，单调减少
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		过原点，奇函数，有界，单调增加
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界，单调减少

定义 8 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=x\cos x$，$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$y=e^{5x+1}\cos x$ 等都是初等函数.

四、分段函数

有时一个函数要用几个式子表示，如 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**. 但它仍旧是一个函数，而不是几个函数，这是因为它符合一个函数的定义，只不过在定义域的不同部分用不同的式子来表示而已. 在计算分段函数的函数值时，应该按对应于定义域的不同部分的不同表达式进行计算.

例 3　设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, & 1<x\leqslant 2,\\ 3x-4, & 2<x\leqslant 3,\\ -\dfrac{5}{2}x+\dfrac{25}{2}, & 3<x\leqslant 5.\end{cases}$ 求 $f(1)$，$f(4)$及函数的定义域.

解　$f(1)=2\times 1=2$，$f(4)=-\dfrac{5}{2}\times 4+\dfrac{25}{2}=\dfrac{5}{2}$.

函数的定义域为$[0,5]$.

注意　分段函数不一定是初等函数.

五、常用的经济函数

1. 总成本函数

某商品的成本是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入(劳力、原料、设备等)的价格或费用总额，可分为固定成本和变动成本两部分. **固定成本**是指在一定时期内不随产量 q 变化的那部分成本，如厂房、设备费等，记为 C_0；**变动成本**是指随产量 q 变化而变化的那部分成本，如原材料费等，记为 $C_1(q)$. 于是总成本函数的一般形式是

$$C(q)=C_0+C_1(q),$$

当产量 $q=0$ 时，对应的成本函数值 $C(0)$就是产品的固定成本值.

设 $C(q)$为成本函数，称 $\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}$为**单位成本函数**或**平均成本函数**.

例 4　某公司生产某产品，固定成本为 2 万元，每当生产一台产品成本增加 0.3 万元，求：

(1)总成本函数，平均成本函数；

(2)当生产 100 台该产品时的总成本和平均成本.

解 (1) 设产量为 q 台，取货币单位：万元，则

总成本函数 $C(q)=2+0.3q$.

平均成本函数 $\bar{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{2}{q}+0.3$.

(2) 产量为 100 台时的总成本为 $C(100)=2+0.3\times100=32$(万元)，

平均成本为 $\bar{C}(100)=\frac{2}{100}+0.3=0.32$(万元).

2. 需求函数与供给函数

需求是指在一定价格条件下，消费者愿意购买并且有支付能力购买的商品量. 供给是指在一定价格条件下，生产者愿意出售的商品量. 决定商品的需求量和供给量的因素很多，但最重要的是商品的价格因素，如果假定其他因素为常量，仅研究价格和需求及价格和供给之间的关系，就可得到需求函数和供给函数.

需求函数表示的就是商品需求量和价格这两个经济量之间的数量关系

$$Q=Q(p),$$

其中 Q 表示需求量，p 表示价格. 需求函数的反函数称为**价格函数**，记为 $p=p(Q)$，习惯上将价格函数也统称为需求函数.

常见的需求函数有以下几种类型：

(1) 线性需求函数 $Q=a-bp(a>0,b>0)$；

(2) 指数需求函数 $Q=Ae^{-bp}(A>0,b>0)$.

供给函数表示的就是商品供给量和价格这两个经济量之间的数量关系

$$S=S(p),$$

其中 S 表示供给量，p 表示价格.

常见的供给函数有以下几种类型：

(1) 线性供给函数 $S=dp-c(c>0,d>0)$；

(2) 指数供给函数 $S=Ae^{dp}(A>0,d>0)$.

一般地，需求函数是价格的单调减函数，供给函数是价格的单调增函数.

当市场上某种商品的需求量与供给量相等时，需求量与供给量持平，此时该商品市场处于平衡状态，称为**供需平衡**，这时商品的价格称为**市场平衡价格**或**均衡价格**，记为 p_0，对应的需求量称为**均衡量**，记为 Q_0.

当市场价格高于均衡价格时，供应量大于需求量，即商品供过于求，会导致商品价格下降；当市场价格低于均衡价格时，供应量小于需求量，即商品供不应求，会导致商品价格上升.

例 5 设某商品的需求函数为 $Q=a-bp(a>0,b>0)$，供给函数为 $S=dp-c(c>0,d>0)$，求均衡价格 p_0.

解　在均衡价格 p_0 处，需求量等于供给量，即 $a-bp_0=dp_0-c$，解出 p_0，得 $p_0=\dfrac{a+c}{b+d}$，所以均衡价格 p_0 为$\dfrac{a+c}{b+d}$.

3. 收益函数和利润函数

总收益是指生产者出售一定量产品所得到的全部收入，是销售量的函数. 当产品销量为 q，价格为 p 时，收益函数的一般形式是

$$R(q)=p\cdot q.$$

如果产销平衡，即产量为 q，销量也为 q 时，利润函数的一般形式是

$$L(q)=R(q)-C(q).$$

当 $L(q)=R(q)-C(q)>0$ 时，生产者盈利；

当 $L(q)=R(q)-C(q)<0$ 时，生产者亏损；

当 $L(q)=R(q)-C(q)=0$ 时，生产者盈亏平衡，使 $L(q)=0$ 的点 q_0 称为**盈亏平衡点**（又称为**保本点**）.

例 6　已知某厂生产某种产品的总成本函数为 $C(q)=500+2q$，其中 q 为该产品的产量，如果该产品的售价为每件 6 元，求：

（1）生产 200 件该产品时的利润；

（2）生产该产品的盈亏平衡点.

解　（1）由题意知，$C(q)=500+2q$，$R(q)=6q$. 因此，利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)=6q-(500+2q)=4q-500,$$

故生产 200 件该产品时的利润为

$$L(200)=4\times200-500=300(\text{元}).$$

（2）由 $L(q)=0$，即 $4q-500=0$，解得 $q=125$，故盈亏平衡点为 125 件.

随堂测试

习题 1-1

1. 下列各组函数是否是相同的函数？

（1）$y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；　　（2）$y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$与 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$；

（3）$y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$与 $y=x^2+x+1$.

2. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{5}{x^2+2}$；　（2）$y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\lg(4-x)$；　（3）$y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2.\end{cases}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$；　(2) $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$；　(3) $y=x^2-x^3$；　(4) $y=x\sin\frac{1}{x}$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-3$；　(2) $y=\ln(x-1)+1$；　(3) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

6. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=2^{\sin x}$；　(2) $y=\ln\sin 2x$；　(3) $y=\cos^2(\sqrt{x}+1)$；　(4) $y=\arctan(\ln x)$.

7. 某商品的需求函数为 $p+3q=75$，供求函数为 $9q=2p-15$，求均衡价格.

8. 某厂生产产品 1 000 吨，定价为 130 元/吨，当售出量不超过 700 吨时，按原定价出售，超过 700 吨的部分按原价的九折出售. 试将销售收入表示成销售量的函数.

9. 设某产品每次售 10 000 件时，每件售价为 50 元，若每次多售 2 000 件，则每件相应地降价 2 元，如果生产这种产品的固定成本为 60 000 元，变动成本为每件 20 元，最低产量为 10 000 件. 试求：(1) 总成本函数；(2) 收益函数；(3) 利润函数.

10. 某厂生产一种元器件，生产能力为日产 100 件. 每日的固定成本为 150 元，每件的平均可变成本为 10 元.

(1) 求该厂此元器件的日总成本函数及平均成本函数；

(2) 若每件售价 14 元，写出收益函数；

(3) 写出利润函数并求盈亏平衡点.

第二节　极　　限

在人们的日常生活中，经常用到这样的描述：用市场变化趋势来研究产品需求量的状况；用公司发展的趋势来分析公司未来的前途等. 这种趋势用在数学上就是极限，极限可以看成是变量变化的终极状态. 本节将给出极限的概念，并研究它的性质及运算.

一、极限的概念

1. 数列的极限

定义 9　按一定顺序排列的无穷多个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 称为**数列**，简记为 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为该数列的**通项**或**一般项**.

例如，数列

$$\{u_n\}:3,6,12,\cdots,3\cdot 2^{n-1},\cdots;$$

$$\{v_n\}:1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;$$

$$\{y_n\}:\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots,$$

它们的通项依次为 $3\cdot 2^{n-1}$，$(-1)^{n+1}$，$\frac{1}{2^n}$.

数列也可看成自变量为正整数 n 的函数：$x_n=f(n)$，称为**整标函数**. 其定义域是全体正整数，当自变量 n 依次取 $1,2,3,\cdots$时，对应的函数值就排成数列$\{x_n\}$.

从上述数列中容易看出，当 n 无限增大时，数列$\{u_n\}$的通项 $3\cdot 2^{n-1}$ 的值也无限增大；数列$\{v_n\}$的通项$(-1)^{n+1}$在 1 与 -1 之间交替变化，它没有一个确定的终极趋势；数列$\{y_n\}$的通项$\dfrac{1}{2^n}$的值无限接近于 0. 这种"当 n 无限增大时，数列的通项无限地接近于某个确定的常数 A"的现象，用数学语言描述出来就是数列的极限.

定义 10　对于数列$\{x_n\}$，若当 n 无限增大时，通项 x_n 无限接近于某个确定的常数 A，则常数 A 称为数列$\{x_n\}$的**极限**，此时也称数列$\{x_n\}$**收敛**于 A，记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$. 若数列$\{x_n\}$的极限不存在，则称数列$\{x_n\}$**发散**.

由定义 10，显然$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$，即当 $n\to\infty$时，数列$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$收敛；当 $n\to\infty$时，数列$\{(-1)^{n+1}\}$和$\{3\cdot 2^{n-1}\}$是发散的.

2. 函数的极限

数列是一种特殊形式的函数，把数列的极限推广可得到函数的极限，根据自变量的变化过程，分两种情况讨论.

1）$x\to\infty$时函数 $f(x)$的极限

定义 11　设函数 $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，若当$|x|$无限增大时，相应的函数值 $f(x)$无限接近于某一确定的常数 A，则 A 称为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty),$$

其中 $x\to\infty$表示 x 的绝对值无限增大.

若只当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时，函数趋近于某一确定的常数 A，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A(\text{或} \lim_{x\to-\infty} f(x)=A).$$

从图 1-1 中容易看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

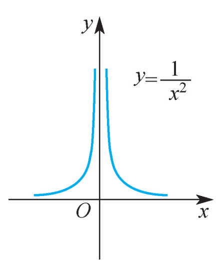


图 1-1

定理 1 极限$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=A$.

2) $x \to x_0$时函数$f(x)$的极限

微课
$x \to x_0$时函数$f(x)$的极限

定义 12 设函数$f(x)$在x_0的某个邻域(点x_0可除外,即$0<|x-x_0|<\delta$,δ为某一正数)内有定义,当自变量x无限趋近于x_0时,函数$f(x)$的值无限趋近于某一确定的常数A,则称A为$x \to x_0$时函数$f(x)$的**极限**,记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0),$$

其中$x \to x_0$表示x既可以从大于x_0的方向趋近于x_0,也可以从小于x_0的方向趋近于x_0.

在讨论当$x \to x_0$时函数$f(x)$的极限问题中,对$x \to x_0$的过程,若限制$x<x_0$或$x>x_0$,便引出了单侧极限的概念.

定义 13 设函数$f(x)$在x_0的某个左半邻域$(x_0-\delta, x_0)$(或右半邻域$(x_0, x_0+\delta)$)内有定义,当自变量x从x_0的左(或右)边无限趋近于x_0时,函数$f(x)$的值无限趋近于某一确定的常数A,则称A为$x \to x_0$时函数$f(x)$的**左(或右)极限**,记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=A \left(\text{或} \lim_{x \to x_0^+} f(x)=A\right).$$

定理 2 极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=A$.

例 1 设$f(x)=\begin{cases} -x, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ x, & x>0, \end{cases}$求$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$,$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$,并讨论$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$是否存在.

解 由图 1-2 知,$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^-}(-x)=0$,$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+} x=0$,所以$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=0$.

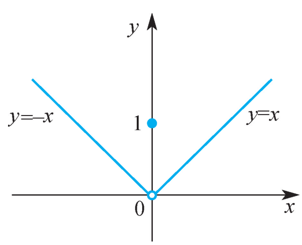


图 1-2

微课
无穷小与无穷大

二、无穷小与无穷大

1. 无穷小

定义 14 在自变量的某一变化过程中,以零为极限的变量称为该变化

过程的**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，所以$\frac{1}{2^n}$为$n\to\infty$时的无穷小；因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$，所以函数$\frac{1}{x^2}$为当$x\to\infty$时的无穷小. 又如，例1中的函数$f(x)$，因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，所以函数$f(x)$为当$x\to 0$时的无穷小.

注意　(1) 判断是否为无穷小必须考虑变化过程，同一个变量在不同的变化过程中，情况会不同，如当$x\to 0$时，x^2是无穷小，但当$x\to 1$时，x^2就不是无穷小.

(2) 无穷小是个变量(零除外)，不能把很小很小的量作为无穷小，如0.000 01不是无穷小. 零是可以作为无穷小的唯一的常数.

无穷小还有以下性质.

性质1　有限个无穷小的和也是无穷小.

例如，当$x\to 0$时，x与$\sin x$都是无穷小，$x+\sin x$也是无穷小.

无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小，如$\lim\limits_{n\to\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个})=1$.

性质2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

例如，当$x\to\infty$时，$\frac{1}{x^2}$是无穷小，$\arctan x$是有界函数，所以$\frac{1}{x^2}\arctan x$也是无穷小.

推论1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

无穷小与函数极限有如下关系.

定理3　函数$\lim f(x)=A$的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha$(其中$\lim\alpha=0$).

定理3中，下面没有标明自变量变化过程的记号“lim”是指自变量x的变化过程可以是$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$中的任何一种，以后不再赘述.

例如，因为$\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^3}$，而$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

2. 无穷大

定义15　在自变量的某一变化过程中，绝对值无限增大的变量称为该变化过程的**无穷大量**，简称**无穷大**.

显然，$n\to\infty$时，n，n^2，n^3，…都是无穷大.

注意　无穷大不趋向于任何确定的常数，所以无穷大的极限不存在. 但为了叙述函数的这一性态，也说“函数的极限是无穷大”，并记为$\lim f(x)=\infty$.

3. 无穷小与无穷大的关系

定理 4 在自变量的同一变化过程中，

(1) 如果函数 $f(x)$是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大；

(2) 如果函数 $f(x)$是无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小.

例如，当 $x\to 0$ 时，x^2 是无穷小，$\dfrac{1}{x^2}$是无穷大.

微课
无穷小量阶的比较

4. 无穷小的比较

定义 16 设 α 与 β 是自变量的同一变化过程中的两个无穷小，

(1) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶**的无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α **低阶**的无穷小；

(3) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$，则称 β 与 α 是**同阶**无穷小. 特别地，当 $c=1$ 时，称 β 与 α 是**等价**无穷小，记为为 $\alpha\sim\beta$.

例如，当 $x\to 0$ 时，$x,2x,x^2$ 都是无穷小，因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 x 高阶的无穷小；由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$，所以当 $x\to 0$ 时，$2x$ 与 x 是同阶无穷小.

三、极限的性质与运算

1. 极限的性质

数列极限是函数极限的特殊情形，都可归结为在自变量的某一变化过程中，函数值无限接近于某一确定的常数，因而它们具有共同的性质. 下面以 $x\to x_0$ 的情形为例来叙述.

性质 1(唯一性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则极限值唯一.

性质 2(有界性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则在 x_0 的某一去心邻域($0<|x-x_0|<\delta$，δ 为某一正数)内函数 $f(x)$有界.

性质 3(保号性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则必存在 x_0 的某一去心邻域，使得在该邻域内，函数 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，

则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

2. 极限的四则运算法则

定理 5　设在自变量 x 的同一变化过程中，极限 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\ (\lim g(x)\neq 0)$.

微课

利用极限的四则运算求简单的极限

法则(1)和法则(2)均可推广到有限个函数的情形. 并有如下推论.

推论 1　$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$（C 为常数）.

推论 2　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$（$n$ 为正整数）.

例 2　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-2)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}(2+x)(3-2x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2}{x^2-9}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-2)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x-\lim\limits_{x\to 2}2=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+3\lim\limits_{x\to 2}x-2$

$$=2^2+3\times 2-2=8.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}(2+x)(3-2x)=\lim\limits_{x\to 1}(2+x)\cdot\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)=3$.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9)=-5\neq 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2}{x^2-9}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9)}=\dfrac{2^3+2}{2^2-9}=-2$.

注意　极限的四则运算法则要求参与运算的各个函数极限均存在，且法则(3)还必须满足分母的极限不为零；否则，不能直接使用法则.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$，故不能直接使用法则(3)求解. 在 $x\to 3$ 时，$x\neq 3$，故可约去公因子 $x-3$，得

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

解　当 $x\to 1$ 时，上式两项极限均不存在，可先通分再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1.$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，分母和分子的极限均为零，不能直接使用极限的四则运算法则. 可先对分子有理化，再求极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$$

例 6 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+1}{4x^5+2x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{7x^3+3}$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x+1}{5x^2-1}$.

解 (1) 当 $x\to\infty$ 时，分子、分母的极限均不存在(无穷大)，不能直接使用极限的四则运算法则. 将分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^5，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2+1}{4x^5+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{4+\frac{2}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x^4}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

(2) 分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{7x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{7+\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{0}{7}=0.$$

(3) 分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^4，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{5x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^4}},$$

由于分子极限为 1，分母极限为 0，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{5x^2-1}=\infty.$$

一般地，当 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m，n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n>m \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } n<m \text{ 时}.\end{cases}$$

微课

两个重要极限

3. 两个重要极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

这个极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1(\square\text{代表同一变量}).$$

例 7　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2\times 1=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

若令 $t=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$时，$t\to 0$，于是又可得

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}\ \text{或}\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

该重要极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}(\square\text{代表同一变量})$$

或

$$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}(\square\text{代表同一变量}).$$

随堂测试

例 8　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^x$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=\mathrm{e}^3$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^3=\mathrm{e}$.

习题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$；　(2) $x_n=\dfrac{n+1}{n+2}$；　(3) $x_n=2+\dfrac{1}{2^n}$；　(4) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$及 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，并判定极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否

存在.

3. 指出下列各题中，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $y=\cot x(x\to 0)$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{-x}(x\to +\infty)$；

(3) $y=\log_a x(a>1,x\to 0^+)$；　　(4) $y=2^x(x\to -\infty)$.

4. 利用无穷小的性质求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cos\frac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2-x-1)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-1}{x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-2x}{4x^2+x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$；　(6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$；　(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{1+x^3}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x+1}{x^2+2x+2}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+2}{2x^3-x+3}$；　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$.

6. 求 a 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-2a, & x<0,\\ x^2-a+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限存在.

7. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$（$x$ 为非零实数）；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}+4}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x+3}$；　(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

8. 证明当 $x\to 0$ 时，$2x^4+x^2$ 是比 x 高阶的无穷小.

第三节　函数的连续性

自然界中许多现象的变化过程都是连续不断的，如气温、生物的生长等都是随着时间连续变化的，这种现象反映在数学上就是函数的连续性.

一、函数连续的概念

为了建立函数连续性的定义，首先引入增量的概念.

定义 17　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量由 x_0 变到 x（x 仍在该邻域内）时，称差 $x-x_0$ 为自变量在 x_0 处的**增量**，记为 Δx，即 $\Delta x=x-x_0$. 相应地，函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$，称差 $f(x)-f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**增量**，记为 Δy，即

$$\Delta y=f(x)-f(x_0) \text{或} \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

函数增量的几何意义如图 1-3 所示.

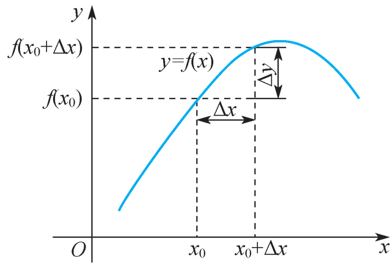


图 1-3

例 1　设函数 $y=f(x)=x^2$.

(1) 当 x 从 -1 改变到 2 时，求自变量的增量与函数的增量；

(2) 当 x 从 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，求函数的增量.

解　(1) 自变量的增量 $\Delta x=2-(-1)=3$，函数的增量

$$\Delta y=f(2)-f(-1)=2^2-(-1)^2=3.$$

(2) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=(2x_0+\Delta x)\Delta x$.

从自变量的增量与函数的增量的关系出发，下面给出函数在某点处连续的定义.

定义 18　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数增量也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处**连续**，x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

若令 $x_0+\Delta x=x$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0,$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

于是，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义又可叙述如下.

定义 19　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

微课
函数在一点的连续性

例 2　证明函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

证　因为 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，故函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则

称函数 $f(x)$在点 x_0 处**右连续**. 显然,函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的充分必要条件是它在点 x_0 处既左连续,又右连续.

综上所述,函数 $f(x)$在点 x_0 处连续,必须同时满足以下三个条件:

(1) 函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义;

(2) 函数 $f(x)$的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

若以上三条中有一条不满足,函数 $f(x)$就在点 x_0 处间断(即不连续),点 x_0 称为函数 $f(x)$的**间断点**. 例如,$x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$的间断点.

例 3 判定函数 $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x<0, \\ 3x+1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^3+1) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (3x+1) = 1$,且 $f(0)=1$,于是

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0),$$

所以 $f(x)$在 $x=0$ 处左连续且右连续,从而 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

若函数 $f(x)$在区间(a,b)内的每一点都连续,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内**连续**,或称 $f(x)$是区间(a,b)内的**连续函数**;若函数 $f(x)$在区间(a,b)内连续,且在左端点 a 处右连续,在右端点 b 处左连续,则称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上**连续**,此时也称 $f(x)$是闭区间$[a,b]$上的**连续函数**.

二、连续函数的运算与性质

1. 连续函数的运算

定理 6 两个连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数,两个连续函数的复合函数也是连续函数.

由于所有的基本初等函数在其定义域内都是连续的,结合定理 6,得出下面的结论.

定理 7 所有的初等函数在其定义区间(包含在定义域内的区间)上都是连续函数.

由初等函数的连续性知,若 $f(x)$是初等函数,且 x_0 是 $f(x)$的定义区间内的点,则 $f(x)$在 $x \to x_0$ 时的极限值等于 $f(x)$在 x_0 处的函数值,即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

例 4 求 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin x}{e^x \sqrt{1+x^2}}$.

解 因为 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x \sqrt{1+x^2}}$是初等函数,且在 $x=2$ 处有定义,所以

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin x}{e^x \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sin 2}{e^2 \sqrt{1+2^2}} = \frac{\sin 2}{e^2 \sqrt{5}}.$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}=\ln \mathrm{e}=1$.

注意　对于连续函数,极限符号与函数符号可以交换运算次序.

2. 闭区间上连续函数的性质

定义在闭区间上的连续函数,在理论和应用中有很多重要的性质. 下面将对这些性质给予简单的介绍.

定义 20　对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$,如果有 $x_0\in I$,使得对于任一 $x\in I$ 都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\,(f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$在区间 I 上的**最大值**(**最小值**).

定理 8(最值定理)　闭区间上的连续函数在该区间上一定存在最大值和最小值.

如图 1-4 所示,函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在点 ξ_1 处取得最大值,在点 ξ_2 处取得最小值.

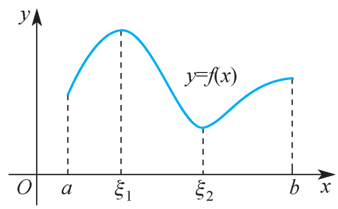


图 1-4

推论(有界性定理)　闭区间上的连续函数在该区间上一定有界.

定理 9(介值定理)　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,C 为介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任何数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=C$.

如图 1-5 所示,对介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任何一个数 C,直线 $y=C$ 与连续曲线 $y=f(x)$有三个交点,使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(\xi_3)=C$.

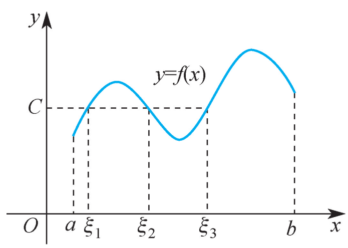


图 1-5

随堂测试

推论(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

如图 1-6 所示，连续曲线 $y=f(x)$ 满足 $f(a)<0$，$f(b)>0$，那么曲线与 x 轴必有交点 $\xi\in(a,b)$，这时有 $f(\xi)=0$.

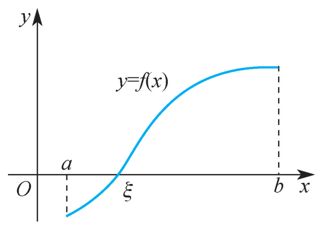


图 1-6

例 6 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证 函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$. 根据零点定理，在区间 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$. 因此，方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

习题 1-3

1. 设函数 $y=2x^2-1$，当 x 从 $x_1=1$ 改变到 $x_2=\frac{1}{2}$ 时，求自变量的增量与函数的增量.

2. 已知某产品的生产函数 $y=x+4x^2-0.2x^3$，其中 y 是产量，x 是原料的投放量. 问：当 $x=10$ 个单位时，再继续投放 1 个单位的原料，产量的增量 Δy 是多少？

3. 讨论下列分段函数在分段点处的连续性.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 2, \\ 2+x, & x>2; \end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant 1, \\ 1, & |x|>1; \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0, \\ \sin x, & x\geqslant 0; \end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x+a, & x\geqslant 0, \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0, \end{cases}$ 试确定常数 a 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\cos x$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}(a>0\text{ 且 }a\neq 1)$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{x}$； (4) $\lim\limits_{t\to-2}\dfrac{e^t+1}{t}$.

6. 证明方程 $x^3+2x-6=0$ 至少有一个根介于 1 和 3 之间.

复习题一

A　组

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\ln(x-1)$的定义域为________.

2. 若 $f(x)$是以 2 为周期的周期函数，且在闭区间$[0,2]$上 $f(x)=2x-x^2$，则在闭区间$[2,4]$上，$f(x)=$________.

3. $f(x)=\begin{cases} x^2-9, & 0\leqslant x<3, \\ x^2, & -3\leqslant x<0 \end{cases}$ 的反函数是________.

4. 设 $f(x)=\ln x, g(x)=\sin x$，则 $f[g(x)]=$________，$g[f(x)]=$________.

5. $\lim\limits_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x}=$________，$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=$________.

6. 设$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-ax+4}{x-1}=-3$，则 $a=$________.

7. 设 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$，则 $f(1)=$________.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x, & 0<x<1, \\ 1, & 1\leqslant x<2, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to0} f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to1} f(x)=$________，间断点为________.

二、选择题

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant1, \\ \sqrt{x^2-1}, & |x|>1 \end{cases}$ 的定义域是(　　).

A. $[-1,1]$　　B. $(-\infty,+\infty)$　　C. $(-1,1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2. 函数 $y=\lg(x-1)$在区间(　　)内有界.

A. $(1,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

3. 下列函数中，为偶函数且在$(-\infty,0)$内单调减少的是(　　).

A. $y=x^2+2x+2$　　B. $y=1-x^2$　　C. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$　　D. $y=\log_2|x|$

4. 下列函数为复合函数的是(　　).

A. $e^x+\sin x$　　B. $\sin\sqrt{x}$　　C. $-2+\cos x$　　D. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

5. 当 $x\to0$ 时，下列变量为无穷小的是(　　).

A. e^{x^2}　　B. $\dfrac{x-1}{x+1}$　　C. $\sin^2 x$　　D. $\cos\dfrac{1}{x}$

6. 当 $x\to0$ 时，$\sin x$ 与 x 相比是(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 等价无穷小　　D. 以上都不对

7. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$是函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的(　　).

A. 充分条件且不是必要条件　　B. 必要条件且不是充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不是充分条件也不是必要条件

8. 如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处间断,则(　　).

A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在　　B. $f(x_0)$不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$　　D. 以上三种情况至少有一种发生

三、综合题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a$,求 a 的值.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}\arctan x$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$;　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}$;　(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\dfrac{1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$;　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{\sqrt{2}x}$;　(7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2-1}{x^2+x}$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}a+x^2, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \ln(b+x+x^2), & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,试确定 a 和 b 的值.

4. 证明方程 $x-2\sin x=1$ 至少有一个小于 3 的正根.

5. 某工厂生产某种产品的总成本函数为 $C(q)=q^3-9q^2+33q+10$,该产品的需求函数为 $q=75-p$(p 为价格),求:(1)产量为 10 时的平均成本;(2)产量为 10 时的利润.

6. 某公司生产某产品 q 件时,固定成本为 2 000 元,生产一件产品的变动成本为 28 元,每件产品的售价为 p 元,又需求函数为 $q=150-2p$,求利润函数.

B　组

1. 设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$,求 a,b 的值.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\tan^2 x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0,\\ x^2-2x+k, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 当 k 取何值时,函数 $f(x)$在其定义域内连续?

4. 小明到南岳观日出,早上 8 时从山下一宾馆出发,沿一条路径上山,下午 5 时到达山顶并留宿于山顶一宾馆. 次日观日出后,于早上 8 时沿同一路径下山,下午 5 时回到山下同一宾馆. 试用零点定理分析:小明必在两天内的同一时刻经过某一地点.

第二章　一元函数的导数与微分

在研究变量的变化时，不仅需要研究变量与变量之间的对应关系（即函数）、变量的变化趋势（即极限），还要研究变量变化的快慢程度——函数在一点处的变化率，即导数. 导数是以一种简洁的方式来表述一个变量的变化怎样影响另一个变量的变化. 实际上，经济学中的很多问题恰与这种分析方式有关. 例如，研究一个厂商的产出怎样影响它的成本以及一个国家的货币供给如何影响该国的通货膨胀等. 另外，在日常生活、生产和科学研究中，还常常会遇到在什么条件下可以使原料最省、时间最少、效率最高等问题，这往往可以归结为求函数的最大值与最小值. 而导数是解决这些问题最有力的工具，学习导数可以获得解决上述问题的思路和方法. 本章讲述一元函数导数的概念、求导数的方法以及导数在经济中的一些应用.

第一节　导数的概念及几何意义

一、导数的概念

在引入导数的概念前，先来讨论两个实际问题.

引例 1　平面曲线的切线斜率.

设有曲线 C 及 C 上的一点 M，在点 M 外另取 C 上一点 N，作割线 MN. 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，如果割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT，直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的**切线**（见图 2-1）.

微课
导数的定义

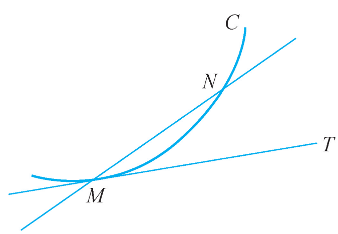


图 2-1

下面求函数 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线斜率.

分析　如图 2-2 所示，在点 M 外另取 C 上的一点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，于是割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

其中 φ 为割线 MN 的倾角. 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，有 $\Delta x\to 0$. 如果当 $\Delta x\to 0$ 时，上式的极限存在，设为 k，即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则此极限 k 是割线斜率的极限，也就是切线的斜率. 这里 $k=\tan\alpha$，其中 α 是切线 MT 的倾角. 于是，通过点 M 且以 k 为斜率的直线 MT 便是曲线 C 在点 M 处的切线.

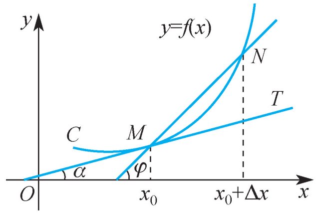


图 2-2

引例 2　收益对销售量的变化率.

设某商品的总收益 R 是销售量 q 的函数 $R(q)(q>0)$，求当销售量为 q_0 个单位时总收益的变化率.

分析　如果销售量 q 由 q_0 改变到 $q_0+\Delta q$，则总收益取得相应的改变量

$$\Delta R=R(q_0+\Delta q)-R(q_0).$$

总收益的平均变化率为$\dfrac{\Delta R}{\Delta q}=\dfrac{R(q_0+\Delta q)-R(q_0)}{\Delta q}$，其经济内涵为平均销售价格.

如果极限 $MR=\lim\limits_{\Delta q\to 0}\dfrac{\Delta R}{\Delta q}=\lim\limits_{\Delta q\to 0}\dfrac{R(q_0+\Delta q)-R(q_0)}{\Delta q}$存在，则此极限就表示销售量为 q_0 个单位时的总收益变化率，其经济内涵为销售过程中的即时定价.

上述两个问题的实际意义完全不同，但从数量关系来看都是研究当自变量的增量趋于零时，函数的增量与自变量增量的比值的极限问题. 数学上把这种特定的极限称为函数的导数.

定义 1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 $\Delta x(\Delta x\neq 0, x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内)时，相应地函数有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处**可导**，并称此极限值为函

数 $y=f(x)$在点 x_0 处的**导数**，记为

$$f'(x_0),\ y'\big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}\text{或}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0},$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果上述极限不存在，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处**不可导**.

根据导数的定义，曲线 C 在点 $M(x_0,y_0)$处的切线斜率就是曲线 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数，即 $k=\tan\alpha=f'(x_0)$；产量为 q_0 时收益对销售量的变化率为 $MR=R'(q_0)$.

若令 $x=x_0+\Delta x$，则函数 $f(x)$在点 x_0 处的导数也可表示为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

例 1　求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数.

解　当 $x=1$ 时，$y=1$；当 $x=1+\Delta x$ 时，$y=(1+\Delta x)^2$，故

$$\Delta y=(1+\Delta x)^2-1=2\Delta x+(\Delta x)^2,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=2+\Delta x,$$

所以 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

由函数 $f(x)$在点 x_0 处的左极限与右极限的定义，可得函数 $f(x)$在点 x_0 处的左导数与右导数的定义.

定义 2　如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

与

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称它们分别为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的**左导数**和**右导数**，分别记为 $f'_-(x_0)$和$f'_+(x_0)$.

显然，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $y=f(x)$在点 x_0 处的左导数和右导数都存在且相等，即 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

例 2　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$，$f'_-(0)$，并判断 $f'(0)$是否存在.

解　$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\Delta x=0$，

$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1$，

因为 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以 $f'(0)$不存在.

定义 3 若函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内每一点处都可导，则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内**可导**. 若函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内可导，并且在区间的左、右端点处 $f'_+(a)$与 $f'_-(b)$都存在，则称函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上**可导**. 若函数 $y=f(x)$在某区间内可导，则对于该区间内的每一个 x，都有唯一确定的导数值 $f'(x)$与之对应，这样就确定了一个新的函数，称为函数 $y=f(x)$的**导函数**，简称**导数**，记为 $f'(x)$，y'，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

由导数的定义，若 $y=f(x)$在某区间 I 上可导，则 $y=f(x)$在 I 上的导函数为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

显然，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$就是导函数 $f'(x)$在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

例 3 设函数 $f(x)=x^3$，求 $f'(x)$，$f'(2)$.

解 因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)=3x^2,$$

所以 $f'(x)=3x^2$，$f'(2)=3x^2\big|_{x=2}=12$.

由导数的定义可知，求函数 $y=f(x)$的导数可分为以下三个步骤：

(1) 求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2) 算比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

(3) 取极限 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

运算熟练后不必细分步骤. 下面利用导数的定义求一些简单函数的导数.

例 4 求函数 $f(x)=C$(C 为常数)的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$.

例 5 求幂函数 $f(x)=x^n$(n 为正整数)的导数.

解

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1}\right]=nx^{n-1},\end{aligned}$$

即$(x^n)'=nx^{n-1}$(n 为正整数).

一般地，对任何幂函数 $y=x^\alpha$($\alpha\in\mathbf{R}$)，都有$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha\in\mathbf{R}$).

例 6 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x,$$

即$(\sin x)'=\cos x$.

同理可得$(\cos x)'=-\sin x$.

例 7　求对数函数 $f(x)=\log_a x\,(a>0,a\neq 1)$的导数.

解　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]=\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right]=\log_a e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x\ln a},$$

即$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，有$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

二、导数的几何意义

由前面的讨论可知，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$等于函数所表示的曲线 C 在相应点 $M(x_0,y_0)$处的切线斜率，即 $f'(x_0)=\tan\alpha$（α 为倾角），这就是导数的几何意义（见图 2-3）.

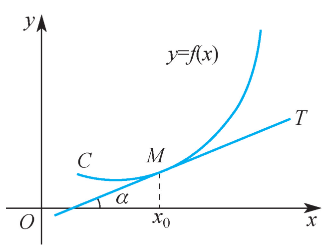


图 2-3

根据导数的几何意义及直线的点斜式方程可知，若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数存在，则曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

过切点 $M(x_0,y_0)$ 且与切线垂直的直线称为曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的**法线**. 若 $f'(x_0)\neq 0$，则过点 $M(x_0,y_0)$ 的法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

例 8 求抛物线 $y=x^2$ 在点 $(2,1)$ 处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义知，抛物线 $y=x^2$ 在点 $(2,1)$ 处的切线斜率为

$$k=y'\big|_{x=2}=2x\big|_{x=2}=2\times 2=4,$$

所求的切线方程为

$$y-1=4(x-2)，\text{即 } y=4x-7,$$

法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{4}(x-2)，\text{即 } y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}.$$

三、导数与连续的关系

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ 存在. 由函数的极限与无穷小的关系知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

其中 α 当 $\Delta x\to 0$ 时为无穷小. 上式两边同乘以 Δx，得

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x,$$

由此可见，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$. 这就是说，函数 $y=f(x)$ 在点 x 处是连续的.

定理 1 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则函数在该点必连续.

由定理 1 知，函数可导必连续，但是连续却不一定可导.

例 9 讨论函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

即 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，而

$$f'_{+}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

即 $f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$，所以函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

习题 2-1

1. 用导数定义求下列函数的导数.

(1) $y=2x-1$；　　(2) $y=x^2+1$；　　(3) $y=\cos x$.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f'(x)$，$f'(2)$，$f'(-3)$.

3. 设 $f'(x_0)$或 $f'(0)$存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 各表示什么？

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，其中 $f(0)=0$；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$；　　(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=A$.

4. 求下列曲线在指定点的切线方程和法线方程.

(1) 曲线 $y=\sin x$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{1}{2}\right)$处；　　(2) 曲线 $y=\sqrt{x}$在点(9,3)处.

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

6. 试确定常数 a，b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续且可导.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 求 $f'_+(0)$，$f'_-(0)$，问 $f'(0)$是否存在？

第二节　导数的运算

按照定义计算导数通常比较复杂或不太可行. 本节将介绍一般函数的求导方法，下面先给出求导的运算法则.

一、导数的四则运算法则

定理 2　如果函数 $u=u(x)$与 $v=v(x)$在点 x 处可导，那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点 x 处可导，并且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

(2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$，特别地，$(Cf(x))'=Cf'(x)$($C$ 为常数)；

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$　$(v(x)\neq 0)$.

法则(1)与(2)可推广到有限多个可导函数的情形.

例 1　求下列函数的导数.

(1) $y=2x^5-\log_2 x+\cos x+\ln 6$; (2) $y=x^3\mathrm{e}^x$; (3) $y=\tan x$.

解 (1) $y'=(2x^5-\log_2 x+\cos x+\ln 6)'$

$$=(2x^5)'-(\log_2 x)'+(\cos x)'+(\ln 6)'=10x^4-\frac{1}{x\ln 2}-\sin x.$$

(2) $y'=(x^3\mathrm{e}^x)'=(x^3)'\mathrm{e}^x+x^3(\mathrm{e}^x)'=3x^2\mathrm{e}^x+x^3\mathrm{e}^x$.

(3) $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$$

即$(\tan x)'=\sec^2 x$.

同理可得$(\cot x)'=-\csc^2 x$.

注意 $\sec x$ 是正割函数，且 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$\sec^2 x=1+\tan^2 x$；$\csc x$ 是余割函数，且 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，$\csc^2 x=1+\cot^2 x$.

二、反函数的导数

定理 3 若函数 $x=\varphi(y)$在区间 I_y 内单调、可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$在区间 $I_x=\{x\,|\,x=\varphi(y),y\in I_y\}$内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

例 2 求指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$的导数.

解 因为 $y=a^x$ 的反函数为 $x=\log_a y$，且$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y\ln a}$，所以

$$y'=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=y\ln a=a^x\ln a,$$

即$(a^x)'=a^x\ln a$.

特别地，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

例 3 求 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 因为 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数，$x=\sin y$ 在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调、可导，且$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\cos y\neq 0$，所以

$$y'=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

同理可得$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

例 4　求 $y=\arctan x$ 的导数.

解　因为 $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 的反函数，$x=\tan y$ 在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调、可导，且$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\sec^2 y\neq 0$，所以

$$y'=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

即$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

同理可得$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

三、导数的基本公式

到目前为止，六类基本初等函数的导数都求出来了，为了便于记忆与应用，现归纳如下：

(1) $(C)'=0$（C 为常数）；

(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）；

(3) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$（$a>0, a\neq 1$）；

(4) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

(5) $(a^x)'=a^x\ln a$（$a>0, a\neq 1$）；

(6) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(7) $(\sin x)'=\cos x$；

(8) $(\cos x)'=-\sin x$；

(9) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$；

(10) $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$；

(11) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(12) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(13) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；

(14) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

四、复合函数的导数

定理 4　若函数 $u=\varphi(x)$在点 x 处可导，函数 $y=f(u)$在点 $u=\varphi(x)$处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x 处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\text{或 } y'=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

微课

复合函数的求导法则

复合函数的求导法则可以推广到任意有限多个中间变量的情形. 下面以两个中间变量为例,设 $y=f(u),u=\varphi(v),v=\psi(x)$都可导,则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\text{或 }y'=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x).$$

当然,这里假定上式右端所出现的导数在相应点处都存在. 这种复合函数的求导法则又叫**链式法则**.

例 5 求函数 $y=\ln\cos x$ 的导数.

解 函数 $y=\ln\cos x$ 是由 $y=\ln u,u=\cos x$ 复合而成的,因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=(\ln u)'=\frac{1}{u},\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\cos x)'=-\sin x,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\cdot(-\sin x)=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-\tan x.$$

例 6 求函数 $y=\tan^3\sqrt{x}$的导数.

解 函数 $y=\tan^3\sqrt{x}$是由 $y=u^3,u=\tan v,v=\sqrt{x}$复合而成的,因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=(u^3)'=3u^2,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\sec^2 v,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=3u^2\cdot\sec^2 v\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3\tan^2\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

复合函数求导熟练后,可不必写出中间变量,直接利用链式法则,按照复合的次序,由外向里,层层求导即可.

例 7 求函数 $y=\arctan 2x$ 的导数.

解 $y'=(\arctan 2x)'=\dfrac{1}{1+4x^2}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{1+4x^2}.$

例 8 求函数 $y=\sin\ln\dfrac{2x}{1+x^2}$的导数.

解
$$\begin{aligned}y'&=\left(\sin\ln\frac{2x}{1+x^2}\right)'\\&=\cos\ln\frac{2x}{1+x^2}\cdot\left(\ln\frac{2x}{1+x^2}\right)'\\&=\cos\ln\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2}{2x}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'\\&=\cos\ln\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2}{2x}\cdot\frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{1-x^2}{x(1+x^2)}\cos \ln \frac{2x}{1+x^2}.$$

五、隐函数的导数及对数求导法

1. 隐函数的导数

函数 $y=f(x)$ 表示变量 y 与 x 之间的对应关系，这种对应关系有不同的表达方式. 例如，$y=\sin x$，$y=\sqrt{1+x}$ 等，其特点是：因变量 y 和含有自变量 x 的式子分别位于等号的两边，称此类函数为**显函数**. 而有些函数中，因变量 y 与自变量 x 之间的关系以方程 $F(x,y)=0$ 的形式出现，这样的函数称为**隐函数**，如 $e^{x+y}-xy=0$，$2x-y+1=0$ 等.

下面探讨隐函数的求导方法.

首先把方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 代入原方程，结果是恒等式

$$F[x,f(x)]\equiv 0,$$

将这个恒等式的两端对 x 求导，所得结果也必然相等. 但注意，左端 $F[x,f(x)]$ 是将 $y=f(x)$ 代入 $F(x,y)$ 后所得的结果，所以当方程 $F(x,y)=0$ 的两端对 x 求导时，要记住 y 是 x 的函数，然后利用复合函数求导法则去求导，这样便可得到要求的导数.

例 9 求由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 所确定的隐函数的导数 y'.

解 方程两边同时对 x 求导. 注意到 y 是 x 的函数，由复合函数求导法则得

$$y+xy'-e^x+e^y y'=0,$$

解出 y'，得隐函数的导数为

$$y'=\frac{e^x-y}{x+e^y}.$$

例 10 求椭圆 $4x^2+y^2=8$ 在点 $(1,-2)$ 处的切线.

解 方程两边分别对 x 求导. 注意到 y 是 x 的函数，得

$$8x+2yy'=0,$$

从而 $y'=-\dfrac{4x}{y}$.

于是，椭圆在点 $(1,-2)$ 处的切线斜率为

$$y'\Big|_{\substack{x=1\\y=-2}}=-\frac{4x}{y}\Big|_{\substack{x=1\\y=-2}}=2,$$

因此，切线方程为 $y+2=2(x-1)$，即 $2x-y-4=0$.

2. 对数求导法

由于对数具有化积商为和差的性质，在有的求导运算中，可以先将函数取自然对数，然后利用隐函数的求导法则求导，这就是所谓的**对数求导法**. 这是一种特殊的

求导法，主要利用对数函数的运算性质及前面的隐函数求导思路解决一些复杂函数求导问题，如幂指函数 $y=[u(x)]^{v(x)}$ 或多个因子连乘、除、乘方、开方的函数的导数.

例 11 求函数 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 先在等式两边取绝对值，再取对数，得

$$\ln|y|=\ln\left|\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\right|=\frac{1}{3}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|],$$

上式两边对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right),$$

于是

$$\begin{aligned}y'&=\frac{y}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)\\&=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).\end{aligned}$$

例 12 求函数 $y=x^x(x>0)$ 的导数.

解 两边同时取对数，得

$$\ln y=x\ln x,$$

上式两边再对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+1,$$

于是

$$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

六、高阶导数

定义 4 若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，则称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的**二阶导数**，记为 y''，$f''(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

类似地，二阶导数的导数称为**三阶导数**，记为 y'''，$f'''(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3f(x)}{\mathrm{d}x^3}$；三阶导数的导数称为**四阶导数**，记为 $y^{(4)}$，$f^{(4)}(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^4f(x)}{\mathrm{d}x^4}$. 一般地，$f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 ***n* 阶导数**，记为 $y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^nf(x)}{\mathrm{d}x^n}$. 二阶或二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

由高阶导数的定义知，求函数 $y=f(x)$ 的高阶导数，只需连续多次求导数即可，

因此仍可应用前面的求导方法进行计算.

例 13　已知函数 $f(x)=\cos^2 x$,求 $f''(x)$,$f''(0)$.

解　$f'(x)=2\cos x\cdot(\cos x)'=-\sin 2x$,$f''(x)=-2\cos 2x$,$f''(0)=-2$.

例 14　求指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$的 n 阶导数.

解　$y'=a^x\ln a$,$y''=a^x\ln^2 a$,$y'''=a^x\ln^3 a$,依此类推 $y^{(n)}=a^x\ln^n a$,即

$$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a.$$

特别地,$(e^x)^{(n)}=e^x$.

随堂测试

习题 2-2

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=\dfrac{x^5+\sqrt{x}+1}{x^3}+e^3$;　(2) $y=(x-\cot x)\cos x$;　(3) $y=(1+x^2)\arctan x+1$;

(4) $y=\dfrac{1}{x+\cos x}$;　(5) $y=x^2\cos x\ln x$;　(6) $y=\dfrac{1-10^x}{1+10^x}$.

2. 求下列复合函数的导数.

(1) $y=(x^3-x)^6$;　(2) $y=\cos\sqrt{x}$;　(3) $y=\arcsin(1-x)$;　(4) $y=\ln(x^2+\cos x)$;

(5) $y=\sin 2x+\cos x^3$;　(6) $y=e^{\sin x}$;　(7) $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$;　(8) $y=x\sqrt{1+x^2}$.

3. 求下列隐函数的导数.

(1) $x=y+\arctan y$;　(2) $\dfrac{x}{y}=\ln(xy)$;　(3) $e^{x+2y}=xy+2$.

4. 用对数求导法求下列函数的导数.

(1) $y=(\sin x)^x(\sin x>0)$;　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}(3-x)^3}{(2x+1)^4}$.

5. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=e^x\sin x$;　(2) $y=\ln\sin x$;

(3) $y=\dfrac{x}{1+x}$;　(4) $y=\ln(1+x^2)+9$.

6. 设函数 $y=(x+10)^6$,求 $f''(0)$,$f'''(2)$.

第三节　微　　分

前面介绍的导数是描述函数在某点处的变化率.有时还需要考虑某点处当自变量有较小改变时,函数值相应的改变量大小,而要精确计算函数值的改变量往往很复杂,于是引入微分的概念.

一、微分的概念及几何意义

1. 微分的概念

引例 3 一块正方形金属薄片受温度变化影响时，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$（如图 2-4 所示），问此薄片的面积改变了多少？

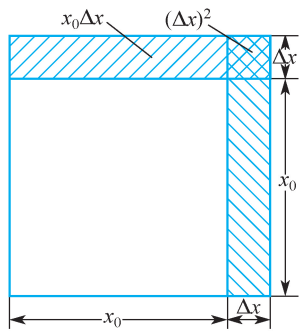


图 2-4

分析 设此薄片的边长为 x，面积为 y，则 $y=x^2$，薄片受温度变化影响时，面积的改变量可看成是当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时，函数 y 相应的增量 Δy，即

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

上式中，Δy 由两部分组成：第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，称为 Δy 的线性主部；第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小，即

$$\Delta y=2x_0\Delta x+o(\Delta x),$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，$(\Delta x)^2$ 可以忽略不计，面积增量 Δy 可以近似地用 $2x_0\Delta x$ 表示，即

$$\Delta y\approx 2x_0\Delta x,$$

因为 $y'=2x$，故当 $|\Delta x|$ 很小时，有 $\Delta y\approx y'|_{x=x_0}\cdot\Delta x$.

此结论对于一般的可导函数也是成立的，称 $y'|_{x=x_0}\cdot\Delta x$ 为函数 y 在点 x_0 处的微分.

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则称 $f'(x_0)\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**微分**，记为 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$，即 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$. 此时，称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

例 1 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的微分.

解 函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为

$$\mathrm{d}y|_{x=1}=(x^2)'|_{x=1}\cdot\Delta x=2\Delta x,$$

在 $x=3$ 处的微分为

$$\mathrm{d}y|_{x=3}=(x^2)'|_{x=3}\cdot\Delta x=6\Delta x.$$

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为**函数的微分**，记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x.$$

例 2　求函数 $y=x^2+\ln x$ 的微分.

解　$\mathrm{d}y=(x^2+\ln x)'\Delta x=\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)\Delta x.$

显然，函数的微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 与 x 和 Δx 有关.

例 3　求函数 $y=x^2$ 在 $x=2$，$\Delta x=0.001$ 时的改变量及微分.

解　$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2.001^2-2^2=0.004\ 001.$

因为 $y'=2x$，$y'|_{x=2}=4$，所以

$$\mathrm{d}y|_{x=2}=y'|_{x=2}\cdot\Delta x=4\times 0.001=0.004.$$

当函数 $y=x$ 时，函数的微分 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=x'\Delta x=\Delta x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$. 于是函数 $y=f(x)$ 的微分可以写成

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

上式两边同除以 $\mathrm{d}x$，有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$，即导数等于函数的微分与自变量的微分之商. 因此导数也称为**微商**.

导数和微分是密切相关的，可导函数一定可微，可微函数也一定可导.

2. 微分的几何意义

如图 2-5 所示，点 $M(x_0,y_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上一点，当自变量 x 有微小改变量 Δx 时，得到曲线上另一点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，于是 $MQ=\Delta x$，$NQ=\Delta y$. 过点 M 作曲线的切线 MT，其倾角为 α，则

$$QP=MQ\cdot\tan\alpha=f'(x_0)\Delta x，即\ \mathrm{d}y=QP.$$

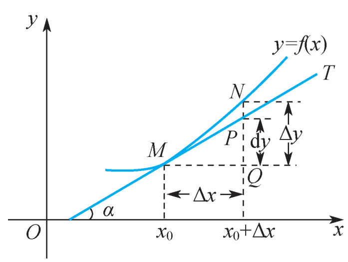


图 2-5

由此可知，微分 $\mathrm{d}y$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处切线的纵坐标的改变量. 当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y-\mathrm{d}y|$ 比 $|\Delta x|$ 小很多，因此在点 M 附近，可用切线段近似代替曲线段，俗称“以直代曲”.

二、微分基本公式与运算法则

由 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 可知，由导数的基本公式与运算法则就可得到微分基本公式和运算法则.

1. 微分基本公式

(1) $\mathrm{d}(C)=0$（C 为常数）；

(2) $\mathrm{d}(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x(\alpha\in\mathbf{R})$；

(3) $\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x(a>0,a\neq1)$；

(4) $\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；

(5) $\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x(a>0,a\neq1)$；

(6) $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(7) $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$；

(8) $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$；

(9) $\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$；

(10) $\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$；

(11) $\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(12) $\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(13) $\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(14) $\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. 函数和、差、积、商的微分运算法则

设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 在 x 处可微，则

(1) $\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}u(x)\pm\mathrm{d}v(x)$；

(2) $\mathrm{d}[u(x)v(x)]=v(x)\mathrm{d}u(x)+u(x)\mathrm{d}v(x)$；

(3) $\mathrm{d}[Cu(x)]=C\mathrm{d}u(x)$（$C$ 为常数）；

(4) $\mathrm{d}\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]=\dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x)-u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}(v(x)\neq0)$.

3. 复合函数的微分法则

若 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，$y=f(u)$ 在点 u 处可导，则

$$\mathrm{d}y=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}\varphi(x)=f'(u)\mathrm{d}u,$$

上式称为**微分形式不变性**，即不论 u 是自变量或中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分都具有 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 形式.

例 4　求函数 $y=\cos(2x+1)$ 的微分.

解　$\mathrm{d}y=\mathrm{d}[\cos(2x+1)]=-\sin(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=-2\sin(2x+1)\mathrm{d}x$.

微课
微分在近似计算中的应用

三、微分在近似计算中的应用

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq0$ 且 $|\Delta x|$ 很小时，有近似公式

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x,$$

移项可得

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

例 5　计算 $\sin 61^\circ$的近似值.

解　已知 $61^\circ=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}$. 设 $f(x)=\sin x, x_0=\frac{\pi}{3}, \Delta x=\frac{\pi}{180}$,则

$$\sin 61^\circ=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)=\sin(x_0+\Delta x)\approx\sin x_0+\cos x_0\cdot\Delta x$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}\approx 0.875.$$

习题 2-3

1. 已知 $y=x^3-x$,计算当 $x=2$,Δx 分别等于 1,0.1,0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$ 的值.

2. 填空.

(1) $\mathrm{d}(\quad)=x\mathrm{d}x$;　(2) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$;　(3) $\mathrm{d}(\quad)=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$;

(4) $\mathrm{d}(\quad)=\cos 3t\mathrm{d}t$;　(5) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　(6) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

3. 求下列函数的微分.

(1) $y=3x^2+2$;　(2) $y=x\cos x$;　(3) $y=\frac{x}{2-x}$;

(4) $y=\arctan\sqrt{x}$;　(5) $y=\ln\sin\frac{x}{2}$;　(6) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$.

4. 利用微分求近似值.

(1) $\ln 1.01$;　(2) $\mathrm{e}^{-0.02}$.

复习题二

A　组

一、填空题

1. 已知 $f'(x_0)$存在,则由导数定义知,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$________.

2. 如果 $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导且 $f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$________.

3. 若极限$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=2$,则 $f'(a)=$________.

4. 若 $f(u)$可导,则 $y=f(\sin\sqrt{x})$的导数为________.

5. $f(x)$在点 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$和右导数 $f'_+(x_0)$都存在且相等是 $f(x)$在点 x_0 处可导的________条件.

6. $f(x)$在点 x_0 处可导是 $f(x)$在点 x_0 处连续的________条件，$f(x)$在点 x_0 处连续是 $f(x)$在点 x_0 处可导的________条件.

7. 已知 $xy+x+y=1$，则$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$________.

8. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x$，则 $f'(x)=$________.

二、选择题

1. 设 $f(x)$可导，且下列各极限均存在，则下列等式不成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$　　B. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=f'(a)$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$　　D. $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, & x>1,\\ 1, & x\leqslant1,\end{cases}$ 则 $f(x)$在 $x=1$ 处(　　).

A. 不连续　　B. 连续，但不可导

C. 连续且有一阶导数　　D. 有任意阶导数

3. 设函数 $y=x^3+5x^2-8x+9$ 的一阶导数为 0，则 $x=$(　　).

A. $\frac{2}{3}$或 4　　B. $-\frac{2}{3}$或 4　　C. $\frac{2}{3}$或-4　　D. $-\frac{2}{3}$或-4

4. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-5)$，则 $f'(0)=$(　　).

A. 0　　B. $-5!$　　C. $5!$　　D. -15

5. 函数 $y=|x-2|$在点 $x=2$ 处的导数为(　　).

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 不存在

6. 下列各式正确的是(　　).

A. $\mathrm{d}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　B. $\mathrm{d}(x+1)=x\mathrm{d}x$

C. $\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x\mathrm{d}x$　　D. $\mathrm{d}(\arccos x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

7. 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)$，则 $f''(0)=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. -2

8. $y=\mathrm{e}^x$ 的过原点的切线方程为(　　).

A. $y=\mathrm{e}x$　　B. $y=-\mathrm{e}x$

C. $y=-\mathrm{e}^{-1}x$　　D. $y=\mathrm{e}^{-1}x$

三、综合题

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=5x^2-2^x+3\mathrm{e}^x+\log_2 3$；　(2) $y=a^x\cdot\mathrm{e}^x$；　(3) $y=\arcsin(1-2x)$；

(4) $y=\ln\cos(x+2)$；　(5) $y=x+\arctan y$；　(6) $\cos(xy)=x^2y^2$.

2. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=\ln(1-x^2)$；　(2) $y=(1+x^2)\cos x$.

3. 求下列函数的微分.

（1）$y=\frac{x}{1+x^2}$；　　（2）$y=e^{ax}\cos bx$；　　（3）$y=\sin xy$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+b, & x\geqslant 1, \\ ax+3, & x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，求 a 与 b 的值.

5. 问曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 上哪一点的切线与直线 $y=3x-1$ 平行？

6. 设某国的国民经济消费模型为 $y=10+0.4x+0.01x^{0.5}$，其中 y 为总消费（单位：十亿元），x 为可支配收入（单位：十亿元）. 当 $x=100.05$ 时，问总消费是多少？

B　组

1. 求下列函数的导数或微分.

（1）$y=(\arctan x^2)^2$，求 y'；　（2）$y=(\ln x)^x\ (x>1)$，求 dy；

（3）$y=\frac{(x+1)\sin x}{e^x}$，求 $y'|_{x=0}$.

2. 求曲线 $x^3-xy+y^2=11$ 在 $x=2$ 处的切线方程与法线方程.

3. 已知单摆运动的周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 $g=980\ \text{cm/s}^2$，l 为摆长（单位：cm）. 设原摆长为 20 cm，为使周期 T 增大 0.05 s，摆长约需加长多少？

第三章　微分中值定理及导数的应用

函数的变化率即函数的导数刻画了函数相对自变量的变化快慢程度，在实际问题中有着非常广泛的应用. 本章将在介绍微分中值定理的基础上，引出计算极限的新方法——洛必达法则，并以导数为工具，进一步研究函数的某些性态，解决一些实际问题.

第一节　微分中值定理

微分中值定理在微积分理论中占有重要地位，它建立了函数与导数之间的联系，提供了导数应用的基础理论依据. 本节介绍罗尔定理、拉格朗日中值定理以及柯西中值定理，这三个定理统称为**微分中值定理**.

一、罗尔定理

定理 1(罗尔定理)　若函数 $y=f(x)$满足：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导；

(3) $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

罗尔定理的几何意义是：若连续曲线除端点外处处都有不垂直于 x 轴的切线，且端点的函数值相等，则曲线上至少存在一点，过该点的切线平行于 x 轴(见图 3-1).

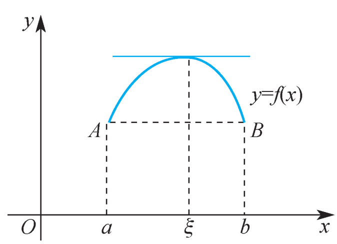


图 3-1

例 1 验证罗尔定理对函数 $f(x)=2x^2-x-3$ 在区间 $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$ 上的正确性，并求出罗尔定理结论中的 ξ.

解 由初等函数的连续性知，函数 $f(x)=2x^2-x-3$ 在 $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$ 上连续，又 $f'(x)=4x-1$ 在 $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 内存在，且 $f(-1)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$ 上满足罗尔定理的条件.

令 $f'(\xi)=0$，解得 $\xi=\frac{1}{4}\in\left(-1,\frac{3}{2}\right)$，即所求的 ξ 为 $\frac{1}{4}$.

二、拉格朗日中值定理

定理 2(拉格朗日中值定理) 若函数 $y=f(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

上式称为**拉格朗日中值公式.**

显然，罗尔定理是拉格朗日中值定理在 $f(a)=f(b)$ 时的特殊情况.

拉格朗日中值定理的几何意义：若连续曲线除端点外处处都有不垂直于 x 轴的切线，则曲线上至少存在一点，使该点处曲线的切线平行于过两端点的直线(见图 3-2).

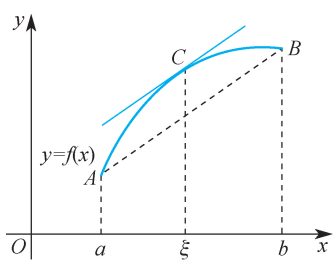


图 3-2

例 2 验证函数 $f(x)=x^3+3x$ 在区间 $[-2,3]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，并求 ξ 的值.

解 由初等函数的连续性可知，$f(x)=x^3+3x$ 在区间 $[-2,3]$ 上连续，又 $f'(x)=3x^2+3$ 在 $(-2,3)$ 内存在，所以函数 $f(x)=x^3+3x$ 在区间 $[-2,3]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件.

由拉格朗日中值定理,得

$$\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=f'(\xi),即\frac{36-(-14)}{5}=3\xi^2+3,$$

解得 $\xi=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}\in(-2,3)$,即所求的 ξ 为 $\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$.

拉格朗日中值定理在微分学中的应用非常广泛,下面介绍两个推论.

推论 1 设函数 $f(x)$在区间 I 上可导,且 $f'(x)\equiv 0$,则 $f(x)$在区间 I 上是一个常数.

推论 2 设 $f(x)$与 $g(x)$都在区间 I 上可导,且 $f'(x)=g'(x)$,则 $f(x)=g(x)+C$(C为常数).

三、柯西中值定理

定理 3(柯西中值定理) 若函数 $f(x)$,$F(x)$满足:

(1)在闭区间$[a,b]$上连续;

(2)在开区间(a,b)内可导,且 $F'(x)\neq 0$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

易知,拉格朗日中值定理是柯西中值定理当 $F(x)=x$ 时的特殊形式.

习题 3-1

1. 函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间$[-1,3]$上是否满足罗尔定理的条件?若满足,求出定理结论中的 ξ 值.

2. 下列函数在指定区间上是否满足拉格朗日中值定理的条件?若满足,求出定理结论中的 ξ 值.

(1) $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$,$[0,1]$;

(2) $f(x)=\ln x$,$[1,2]$.

3. 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,不求出导数 $f'(x)$,试说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根,并指出它们所在的区间.

第二节　洛必达法则

微课
洛必达法则

在求极限的问题中,分子与分母的极限均为 0 或∞,不能直接用极限的四则运算法则来求. 从形式上,把这类当分子、分母都是无穷小或都是无穷大时,两个函数之比的极限可能存在也可能不存在的极限形式称为$\frac{0}{0}$**型未定式**或$\frac{\infty}{\infty}$**型未定式**. 下面给出求未定式的一种简便且重要的法则——洛必达法则.

一、$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

定理 4(洛必达法则) 设函数 $f(x)$与 $F(x)$满足条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=0$(或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\infty$);

(2) 在点 x_0 的某去心邻域内可导,且 $F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A$(或$\infty$),

则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A$(或$\infty$).

注意 (1) 在洛必达法则中将 $x\to x_0$ 改为 $x\to\infty$或其他极限过程时,结论同样成立.

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$仍为$\dfrac{0}{0}$(或$\dfrac{\infty}{\infty}$)型未定式,且 $f'(x)$与 $F'(x)$满足定理 4 中 $f(x)$与 $F(x)$所满足的条件,则可继续使用洛必达法则,依此类推,即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\cdots.$$

例 1 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3^x-2^x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\ln 3-2^x\ln 2}{1}=\ln 3-\ln 2$.

例 2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^n)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$.

例 3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

例 4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}$.

解 这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式,若应用洛必达法则,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1}$,而后者的极限不存在.但显然,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=1-0=1.$$

注意 洛必达法则也有失效的时候,如果利用洛必达法则不能求出最后结果,应采用其他方法来确定未定式的值.

二、其他类型的未定式

除了$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型两种基本未定式外，还有 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 型未定式，它们都可以经过适当变形，化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式后，再应用洛必达法则.

1. $0\cdot\infty$型未定式的求法

步骤：$0\cdot\infty\Rightarrow\frac{1}{\infty}\cdot\infty$或 $0\cdot\frac{1}{0}$.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0.$

2. $\infty-\infty$型未定式的求法

步骤：$\infty-\infty\Rightarrow\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\Rightarrow\frac{0-0}{0\cdot0}$.

例 6 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

随堂测试

3. $0^0,1^\infty,\infty^0$ 型未定式

步骤：$\left.\begin{array}{l}0^0\\1^\infty\\\infty^0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{取对数}}\left\{\begin{array}{l}0\cdot\ln 0\\\infty\cdot\ln 1\\0\cdot\ln\infty\end{array}\right.\Rightarrow0\cdot\infty.$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

解 设 $y=x^x$，取对数得 $\ln y=x\ln x$，当 $x\to0^+$时为 $0\cdot\infty$型未定式，由洛必达法则，

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^0=1.$

习题 3-2

求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2}{\sin^2 x}$； (4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^6}{e^{x^3}}$； (6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$； (7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{\ln(3+x^4)}$； (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^3\ln x$； (10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$； (11) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$； (12) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

第三节 函数的单调性、曲线的凹凸性与拐点

利用导数可以研究函数的性态. 本节介绍利用一阶导数符号判断函数的单调性、利用二阶导数的符号判断曲线的凹凸性的方法.

一、函数的单调性

单调性是函数的一个重要特征. 从图形上看，单调性表现为曲线的上升或下降，经济学中，常常研究函数的升降关系. 例如，商品价格的上涨，往往会引起市场需求的减少和供应的增加；居民收入的增长，会引起社会购买力的增强；银行利率的提高，会增强人们的储蓄欲望等. 这些现象都可以用数学上的单调性来表示.

下面介绍函数的单调性的判别方法.

首先从函数 $y=f(x)$ 的图形上进行直观的分析. 如图 3-3(a)所示，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加，其图形在 (a,b) 内是一条沿 x 轴正向上升的曲线，在曲线上各点处作切线，可以看出切线的斜率非负，即 $f'(x)\geqslant 0$；如图 3-3(b)所示，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调减少，其图形在 (a,b) 内是一条沿 x 轴正向下降的曲线，在曲线上各点处作切线，可以看出切线的斜率非正，即 $f'(x)\leqslant 0$.

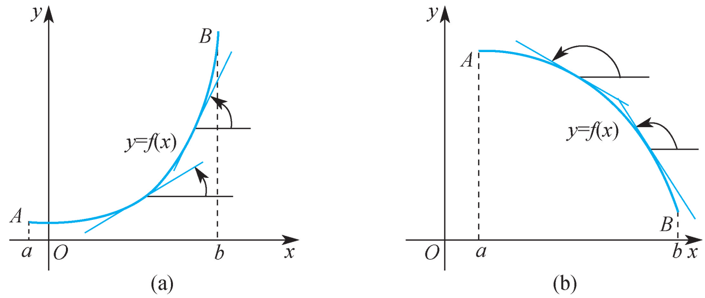


图 3-3

那么,反过来结论是否成立呢?为此,给出如下定理.

定理 5 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,则有

(1) 若在(a,b)内 $f'(x)>0$,则函数 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加;

(2) 若在(a,b)内 $f'(x)<0$,则函数 $f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

注意 若把定理中的闭区间换成其他各种区间,结论仍然成立;并且 $f'(x)>0$ 与 $f'(x)<0$ 分别换成 $f'(x)\geqslant 0$ 与 $f'(x)\leqslant 0$(等号只在个别点处成立),定理 5 的结论仍成立.

例 1 判定函数 $y=x-\sin x$ 在$[0,2\pi]$上的单调性.

解 因为在$(0,2\pi)$内 $y'=1-\cos x>0$,所以函数 $y=x-\sin x$ 在$[0,2\pi]$上单调增加.

根据定理 5 不难验证,函数 $y=x^2$ 及 $y=|x|$在$(-\infty,0]$内单调减少,在$[0,+\infty)$内单调增加,如图 3-4 所示.

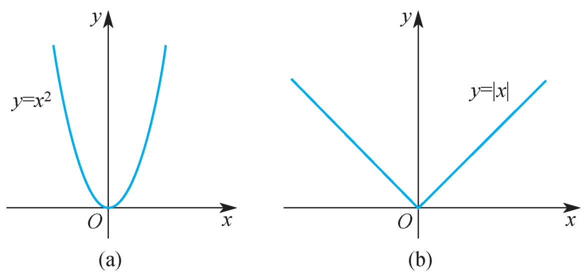


图 3-4

观察函数在单调区间分界点处的导数,可以发现,$y=x^2$ 在点 $x=0$ 处的导数为 0,$y=|x|$在点 $x=0$ 处不可导(即导数不存在).一般地,函数 $f(x)$在单调区间的分界点处,要么导数等于 0(使 $f'(x)=0$ 的点称为该函数的**驻点**),要么导数不存在.由此,讨论函数 $f(x)$的单调性可按下列步骤进行:

(1) 确定函数的定义域;

(2) 求出函数的驻点和不可导点,并以这些点为分界点,将定义域划分为若干个小区间;

(3) 判断每个小区间内导数 $f'(x)$的符号,由定理 5 得出相应的结论.

例 2 讨论函数 $y=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的单调性.

解 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

因为 $y'=\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{x}}$,令 $y'=0$,得 $x_1=-1$,$x_2=1$,另有不可导点 $x_3=0$.

上述三个点将定义域分成四个小区间,列表讨论如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y	↘		↗		↘		↗

所以，函数 $y=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $[-1,0]$ 和 $[1,+\infty)$ 内单调增加，在 $(-\infty,-1]$ 与 $[0,1]$ 内单调减少.

例 3　消费品的需求量 y 与消费者收入 x 有关，在忽略其他因素的前提下，把需求仅看成收入的函数 $y=f(x)$. 在经济学文献中称为恩格尔函数，最简单的形式是 $y=Ax^b$，其中 $A>0$，b 为常数. 讨论 y 的单调性.

解　$y'=Abx^{b-1}$，因为 $x>0$，$A>0$，所以若 $b>0$，则 $y'>0$，y 单调增加；反之则单调减少.

从经济学的角度来理解，收入越高，购买力越强，正常情况下对应商品的需求量也越大，此时恩格尔函数为增函数；反之，若收入增加，对商品的需求量反而减少，只能说明该商品的质量有问题或消费者根本就不需要. 一般来说，若商品的恩格尔函数为 $y=Ax^b$，则当 $b>0$ 时，该商品是正常消费品.

二、曲线的凹凸性与拐点

在研究函数图形的变化情况时，了解它的上升和下降的规律是重要的，但单调性还不能全面反映函数图形的变化. 如图 3-5 所示的两条曲线，沿 x 轴正向都是单调上升的，但这两条曲线的弯曲方向不同，一个向上弯曲而另一个向下弯曲，也就是凹凸性不同.

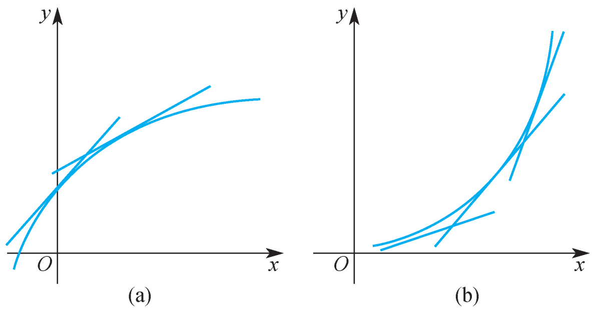


图 3-5

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续，如果函数的曲线位于其上任意一点的切线的上方，则称该曲线在区间 I 上是**凹的**；如果函数的曲线位于其上任意一点

的切线的下方，则称该曲线在区间 I 上是**凸的**.

如果函数 $f(x)$ 在 I 内具有二阶导数，那么可利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性，这就是下面的曲线凹凸性的判定定理. 这里仅就 I 为闭区间的情形来叙述定理，当 I 不是闭区间时，定理类同.

定理 6 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，那么

(1) 若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 内是凹的；

(2) 若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 内是凸的.

定义 2 连续曲线 $y=f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点，称为曲线 $y=f(x)$ 的**拐点**.

拐点既然是曲线凹凸的分界点，那么在拐点左右两侧近旁 $f''(x)$ 必异号. 因此，在拐点处 $f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在. 从而确定曲线的拐点坐标或判断曲线凹凸性的步骤如下：

(1) 确定函数的定义域；

(2) 求出使 $f''(x)=0$ 的点及使 $f''(x)$ 不存在的点，并用这些点把函数的定义域分成若干个小区间；

(3) 判断每个小区间内 $f''(x)$ 的符号，从而判定曲线在各小区间内的凹凸性及曲线的拐点，并写出最后的结论.

例 4 求曲线 $y=x^4-6x^3+12x^2-10$ 的凹凸区间及拐点.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

因为 $y'=4x^3-18x^2+24x$，所以 $y''=12x^2-36x+24$，令 $y''=0$，得 $x_1=1$，$x_2=2$，列表讨论如下：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	+	0	−	0	+
y	凹	拐点 $(1,-3)$	凸	拐点 $(2,6)$	凹

所以，曲线 $y=x^4-6x^3+12x^2-10$ 在 $(-\infty,1]$ 与 $[2,+\infty)$ 内为凹的，在 $[1,2]$ 内为凸的，拐点为点 $(1,-3)$ 与点 $(2,6)$.

例 5 设 $p(t)$ 为每日 t 时刻某公司的股票价格. 图 3-6 给出了某天 $p(t)$ 的曲线（称为走势曲线），试说明该天股票的走势.

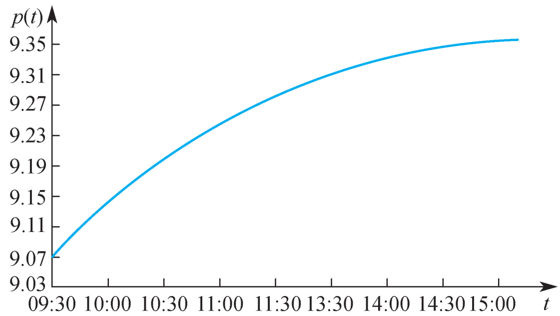


图 3-6

解　图 3-6 中曲线为上升的凸曲线，因此$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}>0$，$\dfrac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}t^2}<0$.

$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}>0$ 说明该天的股票价格是单调上升的；$\dfrac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}t^2}<0$ 说明股票价格上升的速度是单调减少的，即股票价格上升的速度越来越慢.

习题 3-3

1. 判定下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y=x^2+2x-1,(-1,+\infty)$；　　(2) $y=\ln x-2x,\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

2. 求下列函数的单调区间.

(1) $y=2x+\dfrac{8}{x}(x>0)$；　　(2) $y=x^3-\dfrac{1}{x}$.

3. 求下列函数曲线的凹凸区间和拐点.

(1) $y=x^3-5x^2+3x-5$；　　(2) $y=x\mathrm{e}^{-x}$.

4. 某公司用二阶导数来评估不同广告战的相关业绩. 假设所有广告都提高销量，如果在一次新的广告战中，销量关于时间的曲线为凹的，试说明该公司的经营情况如何？为什么？如果曲线是凸的呢？

第四节　函数的极值与最值

在日常生活和经济管理中，许多问题都可以归结为极值或最值问题. 本节将讨论函数的极值及其导数之间的关系，从而提供求函数极值或最值的方法.

微课
函数的极值及其求法

一、函数的极值

函数的极值，指的是所谓函数的“局部最值”. 从图 3-7 中不难看出，点 x_1 附近任何一点的函数值都比 $f(x_1)$ 要小，而点 x_2 附近的任何一点的函数

值都比 $f(x_2)$要大. 下面给出函数极值的一般性定义.

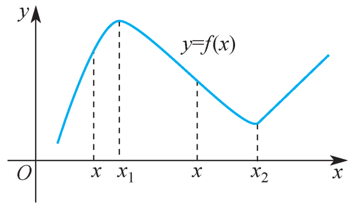


图 3-7

定义 3　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,若对该邻域内任一点 $x(x\neq x_0)$都有

(1) 若 $f(x)<f(x_0)$,则称 $f(x_0)$为函数 $f(x)$的**极大值**,x_0 称为函数 $f(x)$的**极大值点**;

(2) 若 $f(x)>f(x_0)$,则称 $f(x_0)$为函数 $f(x)$的**极小值**,x_0 称为函数 $f(x)$的**极小值点**.

函数的极大值和极小值统称为**极值**. 极大值点和极小值点统称为**极值点**.

显然,函数的极大值点是函数由增变减的分界点,函数的极小值点是函数由减变增的分界点. 由于函数单调区间的分界点是函数的驻点或使其一阶导数不存在的点,因此,函数的驻点和使其一阶导数不存在的点是函数的可能极值点,于是,有以下结论.

定理 7(极值存在的必要条件)　若函数 $f(x)$在 x_0 处可导,且在 x_0 处取得极值,则 $f'(x_0)=0$.

定理 8(极值的第一充分条件)　设函数 $f(x)$在点 x_0 处连续,且在点 x_0 的某一去心邻域内可导. 若

(1) 当 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$,而当 $x>x_0$ 时,$f'(x)<0$,则函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,而当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,则函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极小值;

(3) 当 $x<x_0$ 与 $x>x_0$ 时,$f'(x)$具有相同的符号,则函数 $f(x)$在点 x_0 处无极值.

综上所述,求函数 $f(x)$的极值点和极值的一般步骤为:

(1) 确定函数的定义域;

(2) 求出使 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$不存在的点,并用这些点将函数的定义域分成若干个小区间;

(3) 在每个小区间上确定 $f'(x)$的符号,根据驻点与不可导点两侧 $f'(x)$的符

号确定极值点，并求出极值.

例 1　求 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-x$ 的极值.

解　函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

因为 $f'(x)=\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=1$，另有不可导点 $x_2=0$. 用这两个点将定义域分成三个区间，列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	不存在	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以，函数在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$，在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

如果函数存在二阶导数且在驻点处的二阶导数不为零，则有下面的定理.

定理 9(极值的第二充分条件)　设函数 $f(x)$在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极小值.

例 2　求函数 $f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 的极值.

解　$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$，$f''(x)=6x+6$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-4$，$x_2=2$，由于 $f''(-4)=-18<0$，所以极大值为 $f(-4)=60$，而 $f''(2)=18>0$，所以极小值为 $f(2)=-48$.

注意　*如果函数只有驻点且在驻点的二阶导数不为零的情况下，用定理 9 求解比较简单，但有不可导点或在驻点的二阶导数为零的情况下，必须用定理 8 解决.*

二、函数的最值

函数在区间上的最值是全局性的概念，是函数在所考察的区间上全部函数值中最大者和最小者，与极值的概念是有区别的.

随堂测试

闭区间上连续函数一定有最大值和最小值，最大值与最小值可能在区间内的点(必定是极值点)取得，也可能在区间的端点取得. 因此，只要求出函数的所有极值点及端点处的函数值并加以比较，便可得到函数在该区间上的最大值和最小值. 故求函数最大值和最小值的步骤如下：

(1) 求驻点和不可导点；

(2) 求区间端点及驻点和不可导点的函数值；

（3）比较大小，最大的就是最大值，最小的就是最小值.

例 3 求函数 $f(x)=x^3-3x+2$ 在 $[-2,3]$ 上的最大值与最小值.

解 $f(x)=x^3-3x+2$ 为 $[-2,3]$ 上的连续函数，$f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$，得 $f(x)$ 在 $[-2,3]$ 上的驻点为 $x_1=-1$，$x_2=1$.

由于 $f(-1)=4$，$f(1)=0$，$f(-2)=0$，$f(3)=20$，因而，$f(x)$ 在 $[-2,3]$ 上的最大值为 $f(3)=20$，最小值为 $f(1)=f(-2)=0$.

习题 3-4

1. 求下列函数的极值.

（1）$f(x)=2x^3-3x^2-12x+21$；　　（2）$f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.

2. 如果函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 取得极值，求 a 的值，它是极大值还是极小值？并求此极值.

3. 求下列函数在给定区间上的最大值与最小值.

（1）$y=x+2\sqrt{x}$，$x\in[0,4]$；　　（2）$y=\sin 2x-x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

4. 函数 $y=x^2-\frac{54}{x}$ $(x<0)$ 在何处取得最小值？

5. 函数 $y=\frac{x}{x^2+1}$ $(x\geqslant 0)$ 在何处取得最大值？

6. 把长为 100 cm 的铁丝分为两段，各围成正方形，怎样分法才能使两个正方形的面积之和最小？

第五节　导数在经济中的应用

随着我国市场经济的不断发展，应用数学知识分析经济及管理领域中的问题，对很多经营决策起了非常重要的作用. 导数在经济领域中的应用十分广泛，本节将介绍导数在经济中的几个简单应用.

一、最优问题

经济管理中的诸如最低成本、最大利润、最高收益、最小费用等问题，在数学上都可归结为求函数的最值问题. 在实际问题中，若根据实际意义分析知，函数 $f(x)$ 确实存在最大值或最小值，而且在所讨论的区间内只有一个驻点 x_0，则 $f(x_0)$ 就是所求的最大值或最小值.

例 1 设某厂生产 q 件产品的总成本为 $C(q)=10\ 000+50q+q^2$（元），问产量为多少件时，每件产品的平均成本最低？

解　平均成本函数为

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{10\ 000}{q}+50+q(q>0),$$

因为 $\overline{C}'(q)=-\dfrac{10\ 000}{q^2}+1$，令 $\overline{C}'(q)=0$，得 $q=\pm 100$(负的舍去). 于是有唯一的驻点 $q=100$，而问题存在最小值，所以产量为 100 件时，每件产品的平均成本最低.

例 2　某厂每批生产 q 台某商品的成本为 $C(q)=5q+200$(万元)，得到的收益为 $R(q)=10q-0.01q^2$(万元)，问每批生产多少台该商品才能使利润最大?

解　利润函数

$$L(q)=R(q)-C(q)=5q-0.01q^2-200(q>0),$$

因为 $L'(q)=5-0.02q$，令 $L'(q)=0$，得唯一驻点 $q=250$，而问题存在最大值，所以只要每批生产 250 台该商品，就可以获得最大利润.

例 3　某工厂 C 到铁路的距离 CA 为 40 km，它需要从距离 A 站 200 km 的 B 站运来原料. 现要在铁路上某处 D 修一条公路与工厂 C 连接. 已知铁路每千米运费与公路每千米运费之比为 3∶5. 为了使原料从 B 站运到工厂 C 的总运费最省，问 D 点应选在何处(见图 3-8)?

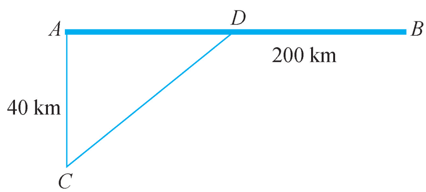


图 3-8

解　设 D 点选在距离 A 站 x km. 设铁路每千米运费是 $3k$，则公路每千米运费是 $5k$，于是从 B 经 D 转到 C 的总运费是

$$f(x)=3k(200-x)+5k\sqrt{40^2+x^2},x\in[0,200].$$

依题意，问题归结为求此函数在[0,200]上的最小值. 为此，对函数求导

$$f'(x)=-3k+\frac{5kx}{\sqrt{40^2+x^2}},$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=30$.

由于 $x=30$ 是函数 $f(x)$ 在定义域内的唯一驻点，从而它就是函数 $f(x)$ 的最小值点，即当 D 点选在距 A 站 30 km 处时总运费最省.

二、边际分析

在经济问题中，常常会使用变化率的概念，变化率分为平均变化率和瞬时变化

率. 平均变化率就是函数改变量与自变量改变量之比；瞬时变化率（简称变化率）就是函数对自变量的导数，即当自变量改变量趋于零时平均变化率的极限.

边际概念是经济学中的重要概念，通常指经济函数的变化率（即导数），它近似地表示：自变量增加一个单位时，相应的经济函数的变化. 边际的概念就是导数的经济学意义.

1. 边际成本

设某企业生产某产品的总成本函数 $C=C(q)$（q 为产量）可导，如果产量由 q_0 增至 $q_0+\Delta q$，则比值

$$\frac{\Delta C}{\Delta q}=\frac{C(q_0+\Delta q)-C(q_0)}{\Delta q}$$

就是产量由 q_0 增至 $q_0+\Delta q$ 这一生产过程中总成本的平均变化率. 令 $\Delta q\to 0$，那么极限

$$\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta q}=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{C(q_0+\Delta q)-C(q_0)}{\Delta q}$$

就是产量为 q_0 个单位时总成本的变化率，称为产量为 q_0 时的**边际成本.**

对任意产量 q，若总成本函数 $C(q)$ 可导，则对产量 q 的导数 $C'(q)$ 称为**边际成本函数**，记为 MC，即

$$MC=C'(q)=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{C(q+\Delta q)-C(q)}{\Delta q},$$

其经济意义为：在产量为 q 的基础上，再增加生产一个单位产品（$\Delta q=1$）所增加的总成本. 这是因为

$$\Delta C(q)=C(q+1)-C(q)\approx C'(q).$$

例 4 某企业生产某产品 q 吨的总成本为 $C(q)=1\ 000+7q+50\sqrt{q}$（元），试求：

（1）产量从 100 吨增加到 225 吨时，总成本的平均变化率；

（2）产量为 100 吨时的边际成本，并说明其经济意义.

解 （1）产量从 100 吨增加到 225 吨时，总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C}{\Delta q}=\frac{C(225)-C(100)}{225-100}=\frac{3\ 325-2\ 200}{125}=9\text{（元/吨）}.$$

（2）边际成本函数为 $C'(q)=7+\frac{25}{\sqrt{q}}$，因此，产量为 100 吨时的边际成本为

$$C'(100)=7+\frac{25}{\sqrt{100}}=9.5,$$

它表示当产量为 100 吨时，再多生产 1 吨产品，总成本将增加 9.5 元.

2. 边际收益

类似地，设收益函数为 $R(q)$（q 为销售量），于是，当 $R(q)$ 可导时，边际收益函数（记为 MR）为

$$MR=R'(q)=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{R(q+\Delta q)-R(q)}{\Delta q},$$

其经济意义为：在销售量为 q 的基础上，再多销售一个单位产品所增加的收益.

例 5　设产品的需求函数为 $q=100-5p$（q 为需求量，p 为价格），求边际收益函数及需求量为 50 时的边际收益，并解释所得结果的经济意义.

解　根据 $q=100-5p$，得 $p=\dfrac{100-q}{5}$，所以收益函数为

$$R(q)=pq=\frac{100-q}{5}\cdot q=\frac{1}{5}(100q-q^2),$$

从而，边际收益函数为 $R'(q)=\dfrac{1}{5}(100-2q)$，所以需求量为 50 时的边际收益为

$$R'(50)=\frac{1}{5}\times(100-2\times 50)=0,$$

其经济意义为：当销售量为 50 个单位时，多销售1 个单位增加的收益为 0.

3. 边际利润

设利润函数为 $L(q)$（q 为产量），于是，当 $L(q)$ 可导时，其导数 $L'(q)$ 称为**边际利润函数**，记为 ML，即

$$ML=L'(q)=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{L(q+\Delta q)-L(q)}{\Delta q},$$

其经济意义为：在产量为 q 的基础上，再增加生产一个单位产品所增加的利润.

由于 $L(q)=R(q)-C(q)$，两边求导，得 $L'(q)=R'(q)-C'(q)$，即边际利润等于边际收益与边际成本之差.

例 6　某厂生产一批产品的固定成本为 2 000 元，每增产 1 吨产品成本增加 50 元，设该产品的市场需求函数为 $q=1\ 100-10p$（q 为需求量，p 为价格），产销平衡，试求产量为 100 吨时的边际利润，并说明其经济意义.

解　由于 $p=110-\dfrac{q}{10}$，所以收益函数为

$$R(q)=pq=110q-\frac{q^2}{10}.$$

又总成本函数为 $C(q)=2\ 000+50q$，所以利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)=60q-\frac{q^2}{10}-2\ 000,$$

从而，边际利润函数为 $L'(q)=60-\frac{q}{5}$. 因此，当产量为 100 吨时的边际利润为

$$L'(100)=60-\frac{100}{5}=40,$$

其经济意义为：当产量为 100 吨时，多生产 1 吨产品所增加的利润为 40 元.

三、弹性分析

前面所讨论的函数改变量与函数变化率是绝对改变量与绝对变化率. 在一些经济学问题中，有时仅知道函数 $y=f(x)$ 的改变量 Δy 及绝对改变率 $f'(x)$ 是不够的. 例如，设有甲、乙两种商品，其单价分别为 10 元和 100 元. 同时提价 1 元，显然改变量相同，但提价的百分数大不相同，分别为 10% 和 1%. 前者是后者的 10 倍，因此有必要研究函数的相对改变量以及相对变化率，这在经济学中称为弹性.

1. 弹性的概念

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，函数的相对增量 $\frac{\Delta y}{y_0}$ 与自变量的相对增量 $\frac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\frac{\Delta y}{y_0}/\frac{\Delta x}{x_0}$ 称为函数 $f(x)$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的**相对变化率**. 当 $\Delta x\to 0$ 时，若 $\frac{\Delta y}{y_0}/\frac{\Delta x}{x_0}$ 的极限存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**弹性**，记为 $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$.

对一般的函数 $y=f(x)$，若 $f(x)$ 可导，则有

$$\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}=\frac{x}{y}y',$$

称为 $y=f(x)$ 的**弹性函数**.

函数 $y=f(x)$ 的弹性 $\frac{Ey}{Ex}$ 反映了随 x 的变化 $f(x)$ 变化幅度的大小，也就是 $f(x)$ 对 x 变化反映的强烈程度或灵敏度. $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ 表示在点 $x=x_0$ 处，当 x 产生 1% 的改变时，$f(x)$ 近似地改变 $\left|\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}\right|\%$.

注意　弹性研究的是相对变化率. 因此，弹性没有单位.

例 7　已知函数 $y=50\mathrm{e}^{4x}$，求 $\frac{Ey}{Ex}$ 及 $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=3}$.

解　因为

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x}{y}y'=\frac{x}{50\mathrm{e}^{4x}}\cdot 200\mathrm{e}^{4x}=4x,$$

所以 $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=3}=4\times 3=12$，表明在点 $x=3$ 处，当 x 产生 1% 的改变时，函数 y 会变

化 12%.

2. 需求弹性

经济学中常用到的需求弹性，是指需求对价格的弹性.

设商品的市场需求量为 Q，价格为 p，需求函数 $Q=Q(p)$ 可导，则需求函数的弹性为$\dfrac{EQ}{Ep}=\dfrac{p}{Q}Q'=\dfrac{p}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$，称为该商品的**需求价格弹性**，简称**需求弹性**.

微课
需求弹性分析

因为需求函数是价格的单调减少函数，$\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$一般为负值，所以需求弹性一般为负值，其经济意义为：需求弹性表示在价格为 p 时，价格上涨或下跌 1%时，需求量约减少或增加$\left|\dfrac{EQ}{Ep}\right|$%，它反映了需求量相对变动对价格相对变动的灵敏程度.

当$\left|\dfrac{EQ}{Ep}\right|>1$ 时，即价格变化 1%，需求量的变化高于 1%时，称需求是富有弹性的. 此时，需求量对价格的变化反应较为灵敏，适当降价会使需求量较大幅度上升，从而导致收入增加，而提高价格往往使收入下降.

当$\left|\dfrac{EQ}{Ep}\right|<1$ 时，即价格变化 1%，需求量的变化小于 1%时，称需求是缺乏弹性的. 此时价格的变化对需求量的影响较小，在适当涨价后，不会使需求量有太大的下降，从而使收入增加，一般降价将引起收入的减少.

当$\left|\dfrac{EQ}{Ep}\right|=1$ 时，即价格变化 1%，需求量的变化恰为 1%时，称需求是单位弹性的，这种情况很少见.

例 8　设某商品的需求函数为 $Q(p)=400-100p$（p 为价格），求 $p=1,2,3$ 时的需求弹性，并说明其经济意义.

解　$\dfrac{EQ}{Ep}=\dfrac{p}{Q}Q'=\dfrac{p}{400-100p}(-100)=-\dfrac{p}{4-p}$.

当 $p=1$ 时，$\dfrac{EQ}{Ep}=-\dfrac{1}{4-1}=-\dfrac{1}{3}\approx-0.33<0$，即 $p=1$ 时，若价格下降（上涨）1%，需求量将增加（或减少）0.33%. 由于$\left|\dfrac{EQ}{Ep}\right|=0.33<1$，因此无论涨价或降价，需求量的改变不会很大.

当 $p=2$ 时，$\dfrac{EQ}{Ep}=-\dfrac{2}{4-2}=-1<0$，即 $p=2$ 时，若价格下降（上涨）1%，需求量将增加（或减少）1%. 需求量与价格的相对变化率是相等的.

当 $p=3$ 时，$\frac{EQ}{Ep}=-\frac{3}{4-3}=-3<0$，即 $p=3$ 时，若价格下降(上涨)1%，需求量将增加(或减少)3%. 由于 $\left|\frac{EQ}{Ep}\right|=3>1$，因此价格的变化对需求量的影响较大.

习题 3-5

1. 某产品每日生产 q 件的总成本为 $C(q)=100+6q+0.25q^2$(元)，求平均成本最小时的日产量并求出最小平均成本.

2. 某服装公司规定，卖出 x 套服装时，单价为 $p(x)=150-0.5x$. 同时还规定，生产 x 套服装的总成本为 $C(x)=4\,000+0.25x^2$. 求:(1) 收益函数;(2) 利润函数;(3) 为使得利润最大化，公司必须生产并销售多少套服装?(4) 最大利润是多少?(5) 为实现这一目标，服装的单价应定为多少?

3. 某产品生产 x 件的总成本为 $C(x)=100+\frac{1}{10}x^2$(元). 求:(1) 生产 40 件产品时的平均成本;(2) 生产 40 件到 50 件产品时，成本的平均变化率;(3) 生产 50 件产品时的边际成本.

4. 设某产品的总成本函数和收益函数分别为 $C(q)=3+2\sqrt{q}$，$R(q)=\frac{5q}{q+1}$，其中 q 为该产品的销售量，求该产品的边际成本函数、边际收入函数和边际利润函数.

5. 求下列函数的弹性.

(1) $y=2e^x$;　　(2) $y=x^a$;　　(3) $y=1\,600\left(\frac{1}{4}\right)^x$，求 $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=3}$.

6. 某种商品的需求量 Q(百件)与价格 p(千元)的关系为 $Q(p)=25e^{-0.4p}$，$p\in[0,8]$，求价格为 6 千元时的需求弹性，说明其经济意义，并指出企业能否采取调价措施来增加收入，怎么调整价格较妥当.

复习题三

A　组

一、填空题

1. 函数 $y=\ln(x+1)$在$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理条件，则结论中的 $\xi=$________.

2. 满足方程 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 是函数 $y=f(x)$的________.

3. 如果在(a,b)内恒有 $f'(x)=0$，则在(a,b)内恒有________.

4. 函数 $f(x)$可能极值点有________和________.

5. 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=-1$ 取得极小值-2，则 $a=$________，$b=$________.

6. 函数 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在区间$[-2,2]$上的最小值是________.

7. 设产品的总成本函数 $C(q)=100+0.02q^2$(元)，则该产品在产量为 100 件时的边际成本为________元/件.

8. 设某商品的需求函数 $Q(p)=p(8-3p)$(p 为价格)，则需求对价格的弹性为________.

二、选择题

1. 函数 $y=x^2+3x$ 在$[-3,0]$上满足罗尔定理条件，则结论中的 $\xi=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. 2

2. 下列求极限问题中能使用洛必达法则的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$　　C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\ln x}{x-1}$

3. 若$(x_0, f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点，则（　　）.

A. $f''(x_0)=0$　　B. $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$不存在

C. $f'(x_0)=0$　　D. $f(x_0)=0$

4. $f'(x_0)=0$ 是 $f(x)$在 x_0 取得极值的（　　）.

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 以上都不对

5. 函数 $y=x^3+12x+1$ 在定义域内（　　）.

A. 单调增加　　B. 单调减少　　C. 不增不减　　D. 有增有减

6. 曲线 $y=x^4-24x^2+6x$ 的凸区间是（　　）.

A. $(-2,2)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

7. 某产品的利润函数 $L(x)=20x-x^2$，则要该产品的利润最大，产量应为（　　）.

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

8. 已知某商品的需求函数为 $Q(p)=1-p$，则需求弹性$\dfrac{EQ}{Ep}=$（　　）.

A. $\dfrac{p}{1-p}$　　B. $-\dfrac{p}{1-p}$　　C. $\dfrac{p^2}{1-p}$　　D. $-\dfrac{p^2}{1-p}$

三、综合题

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x^m-a^m}(n\neq m, a\neq 0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{a^x}(a>1)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

2. 求函数 $y=x+\mathrm{e}^{-x}$ 的单调区间.

3. 求函数 $f(x)=x^3-2x^2+1$ 的极值.

4. 某公司生产某种产品的总成本函数为 $C(x)=300+1.1x$，收益函数为 $R(x)=5x-0.003x^2$，试求：(1) 边际成本函数、边际收益函数和边际利润函数；(2) 当产量为 600 及 700 个单位时的边际利润，并说明其经济意义；(3) 当边际成本与边际收益具有何种关系时，利润最大？

5. 生产某种产品的固定成本是 1 000 万元，每多生产 1 台该种产品，其成本增加 10 万元，又知对该产品的需求为 $q=120-2p$（q 是产销量，单位：台；p 是价格，单位：万元）. 求：(1) 使该产品利润最大的产量；(2) 使利润最大的产量时的边际收入.

6. 设某商品的需求函数为 $Q=10\mathrm{e}^{-0.1p}$（Q 为需求量，单位：件；p 为价格，单位：元）.

(1) 若销售此商品，问 p 为多少时收益最大？最大收益是多少？

(2) 求需求弹性函数及当 $p=5$ 时的需求弹性，并说明其经济意义.

B　组

1. 求函数 $y=2x^2-\ln x$ 的单调区间.

2. 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

3.某职业院校为了培养学生的创业能力，鼓励毕业学年的学生在校园里开展各种营销活动. 为了探索创业途径，学生蔡明利用业余时间在学院的一家面包销售点打工. 经过一段时间统计，他发现某种面包以每块 2 元的价格销售时，每天能卖掉 500 块；若价格每提高 1 角，每天就会少卖掉 10 块. 另外，面包销售点每天的固定开销为 40 元，每块面包的成本为 1.5 元. 此后，蔡明决定独自经营该面包销售点. 问：蔡明怎样确定面包的价格，才能使获得的利润最大？

4.对某企业员工的工作效率研究后表明，一个班次（8 小时）的中等水平员工早上 8 点开始工作，在 t 小时后，生产的效率为 $Q(t)=-t^3+9t^2+12t(0\leqslant t\leqslant 8)$. 问：(1) 何时工作效率是提高的？何时工作效率是降低的？(2) 何时工作效率最高？