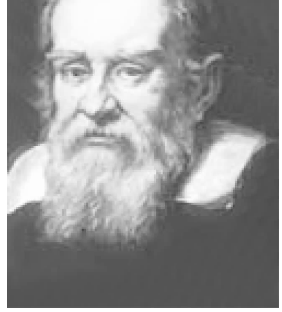
第 1 篇

宏观低速物体的运动规律

第 1 章
质点运动学

科学人物　伽利略



伽利略

伽利略·伽利雷(Galileo Galilei，1564—1642)，意大利著名数学家、物理学家、天文学家和哲学家，近代实验科学的先驱者.

1590 年，伽利略在比萨斜塔上做了“两个球同时落地”的著名实验，从此推翻了亚里士多德的“物体下落速度和重量成比例”学说，纠正了这个持续了 1 900 年之久的错误结论.

1609 年，伽利略创制了天文望远镜(后被称为伽利略望远镜)，并用来观测天体，他发现了月球表面的凹凸不平，并亲手绘制了第一幅月面图. 1610 年 1 月 7 日，伽利略发现了木星的四颗卫星，为哥白尼学说找到了确凿的证据，标志着哥白尼学说开始走向胜利. 借助于望远镜，伽利略还先后发现了土星光环、太阳黑子、太阳的自转、金星和水星的盈亏、月球的周日和周月天平动以及银河是由无数恒星组成等现象. 这些发现拉开了天文学的新序幕.

伽利略著有《星际使者》《关于太阳黑子的书信》《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》和《关于两门新科学的谈话和数学证明》.

力学以机械运动规律及其应用为研究对象，分为运动学和动力学两部分. 运动学只从几何观点研究物体的运动(如位置、速度、加速度等)，不涉及物体间的相互作用. 动力学则是研究物体间相互作用的规律. 为了研究物体的机械运动，我们不仅需要确定描述物体运动的方法，还需要科学合理的抽象复杂的物体运动，提出物理模型，化繁为简，以便突出主要矛盾，以利于解决问题. 我们将在本章研究质点的机械运动.

1.1 质点参考系和坐标系

1.1.1 质点

自然界中的实际物体，总是具有大小和形状的，且其大小和形状可能会产生变化. 它们的运动相当复杂，且各部分的运动也不同，故描述它们的运动是相当困难的. 在很多情况下，物体的大小和形状对物体的运动产生的影响很小，甚至可以忽略，此时就可以把物

体的大小和形状忽略，将其简化为一个几何点，这个几何点称为质点. 此时，只需要描述质点的运动，就能使问题得到极大简化. 例如，地球绕太阳公转的椭圆轨道，主要是由地球与太阳间长达 1.496×10^{11} m 的距离及地球与太阳的质量决定的，地球与太阳的形状和大小及地球的自转等因素都是非常次要的，完全可以忽略不计. 因此，在研究地球绕太阳的运动轨道时，我们可以把太阳和地球都看成具有一定质量的几何点，即质点.

物理学中的质点是有质量而无大小和形状的点，是从实际物体中抽象出来的理想模型，以后还会引入一些理想模型，如刚体、理想气体、点电荷等. 虽然理想模型实际上并不存在，但它有助于揭示事物的主要性质. 因此，建立理想模型是在科学研究中经常应用并行之有效的方法. 理想模型绝非主观臆造，它是在对实际事物进行科学分析的基础上建立起来的.

另外，对于同一物体，由于研究的问题不同，有时可以把它看作一个质点，有时则不能. 不过，在不能将物体看作一个质点时，却总可以把这个物体看作由许多质点组成的，对其中的每一个质点都可以运用质点运动的结论，叠加起来就可以得到整个物体的运动规律. 例如，在研究地球自转时，如果仍然把地球看作一个质点，就无法解决实际问题. 根据具体问题提出相应的物理模型，是很有实际意义的. 可见，质点力学是整个力学的基础.

1.1.2　参考系

自然界中，绝对静止的物体是不存在的. 大到星系，小到电子、原子，无一不在运动. 无论从机械运动来说，还是从其他运动形式来说，自然界的一切物质都处于永恒的运动之中. 运动和物质是不可分割的，物质的运动存在于人们的意识之外，这便是运动本身的绝对性.

描述任何物体的运动情形，都必须选择另一个运动物体或几个保持相对静止的物体群作为参考物. 只有先确定了参考物，才能明确地描述被研究物体的运动情形. 研究物体运动时被选作参考物的物体或物体群，称为参考系. 同一运动过程，相对于不同的参考系有不同的描述. 例如，在地面附近自由下落的物体，以地球为参考系，它做直线运动，以匀速行驶的火车为参考系，它做曲线运动. 在不同参考系中，对同一物体具有不同运动关系的事实，称为运动关系的相对性. 可见，物体的运动是绝对的，描述物体的运动是相对的. 因此，在描述物体运动状态时，必须先指明参考系. 参考系的选择是任意的，通常要视问题的性质和研究方便而定，如研究地球相对于太阳的运动，常选择太阳作为参考系；研究人造卫星的运动，常选择地球作为参考系；研究河水的流动，常选择地面作为参考系；等等.

1.1.3　坐标系

选好参考系，还只能对物体的机械运动做定性描述. 为了定量地研究机械运动，还必须建立与所选参考系相联系的坐标系. 常用的坐标系是直角坐标系，它是由三条标有刻度并相互垂直的坐标轴相交于坐标原点构成的. 另外，还有平面极坐标系、自然坐标系等. 虽然坐标系与参考系有联系，但不应将二者混同，参考系是实物，而坐标系是建立在参考系基础上的数学抽象.

1.2 描述质点运动的物理量

1.2.1 位置矢量

图 1-1 中的点 P 代表我们所讨论的质点，点 O 代表参考系上的一个固定点，建立坐标系时坐标原点就取在这里. 从坐标系的原点 O 引向质点某一时刻所在位置 P 的有向线段 $\overline{OP}$ 称为质点在该时刻的位置矢量 $\boldsymbol{r}$，简称位矢. 在直角坐标系中，位置矢量和坐标的关系是

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

位置矢量的大小为

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

位置矢量的方向可以用矢量与坐标轴的夹角余弦表示，如图 1-2 所示，分别为

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

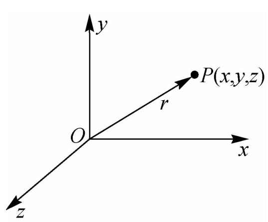


图 1-1

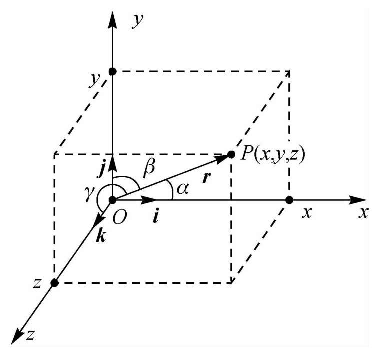


图 1-2

需要说明的是：在直角坐标系中，由于存在关系 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 所以，说明矢量方向时，仅使用其中的两个角度即可.

位置矢量是时间 t 的函数，即

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

式(1-2)又称为质点的运动方程.

位矢是矢量，既有大小又有方向，一般用黑体字母代表矢量.

1.2.2 位移和路程

在一段时间内质点位矢的增量称为它在这段时间内的位移. 如图 1-3 所示，在时刻 t，质点位于 A 点，在时刻 $t+\Delta t$，质点位于 B 点，则称

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-3}$$

为质点在此 Δt 时间间隔内的位移. 它是从位置 A 指向位置 B 的矢量.

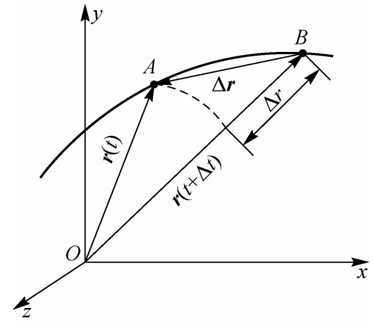


图 1-3

位移与路程不同，位移是矢量，是一段有方向的线段，

一般情况下这一线段不表示质点运动的实际轨迹，而路程则表示质点实际运动的轨迹；位移的大小为该矢量的长度，记作 $|\Delta\boldsymbol{r}|$，一般情况下 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$，因为 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$，是位矢的大小在 Δt 时间间隔内的增量. 式(1-3)在直角坐标系中的具体表示式为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2} \tag{1-5}$$

只有在 Δt 趋近于零时，$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 和 Δr 才可看作相等. 即使在直线运动中，位移和路程也是截然不同的两个概念. 例如，一质点沿直线从 A 点到 B 点又折回 A 点，显然路程等于 A、B 之间距离的两倍，而位移却为零.

1.2.3　速度和速率

速度是表示物体运动快慢的物理量，它等于位移 r 与发生这段位移所用时间 t 的比值，用 $v=s/t$ 表示. 速度的单位是米每秒，符号为 m/s，常用单位还有 km/h、cm/s 等. 速度是既具有大小，又有方向的物理量，即矢量. 速度的方向就是物体运动的方向. 速度的大小称为速率. 速率是标量，它仅表明质点运动的快慢.

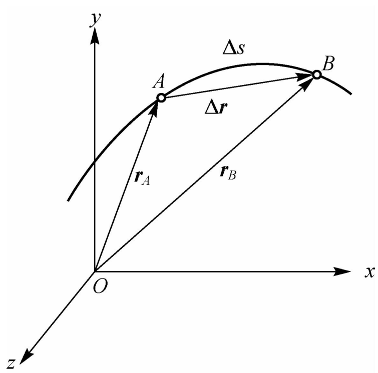


图 1-4

如图 1-4 所示，若在 Δt 的时间内，质点的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$，则 $\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 为 Δt 内的平均速度，即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-6}$$

平均速度是矢量，这个矢量的大小决定于位移的模 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与所取时间间隔 Δt 的比值；这个矢量的方向与位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同.

在时间 Δt 内，质点的路程为 Δs，则 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 为 Δt 内的平均速率，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1-7}$$

这就是说，平均速率是一个标量，等于质点在单位时间内所通过的路程，而不考虑运动的方向，因此平均速率不能和平均速度等同起来. 例如，在某一段时间内，质点环行了一个闭合路径，显然质点的位移等于零，所以平均速度也为零，而平均速率却不等于零.

平均速度只是这段时间内物体运动快慢及运动方向的一个粗略描述，如果想知道某一时刻质点运动的快慢和运动的方向如何，则需要把考虑的时间间隔 Δt 尽可能取小，时间间隔越小，描述则越细致. 当 $\Delta t\to 0$ 时，平均速度的极限值称为瞬时速度(简称速度)，用 $\boldsymbol{v}$ 表示，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

在数学关系上，速度是位置对于时间的一阶导数. 瞬时速度的方向沿曲线切线方向并指向质点前进的一侧，瞬时速度的大小为

$$|\boldsymbol{v}|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-9}$$

由式(1-9)可知,瞬时速度的大小等于瞬时速率.平均速度的大小和方向在很大程度上依赖于所取时间间隔的大小.但是,时间间隔应该取多大,平均速度概念本身并没有加以限定.所以,当使用平均速度来表征质点运动时,总要指明相应的时间间隔.

在直角坐标系中,$\boldsymbol{v}$ 也可以用它的三个分量 v_x、v_y、v_z 表示,与它的三个分量的关系为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-10}$$

在 v_x、v_y、v_z 已知的情况下,$\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1-11}$$

当质点沿 x 轴做直线运动时,在任意时刻的瞬时速率为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1-12}$$

当 $\boldsymbol{v}>0$ 时,表示质点沿 x 轴的正向运动;当 $\boldsymbol{v}<0$ 时,表示质点沿 x 轴的负向运动.

1.2.4　加速度

加速度是反映质点速度随时间变化快慢的物理量.如图 1-5 所示,$\boldsymbol{v}_2$ 表示末速度,$\boldsymbol{v}_1$ 表示初速度,而 $\Delta\boldsymbol{v}$ 表示速度增量.

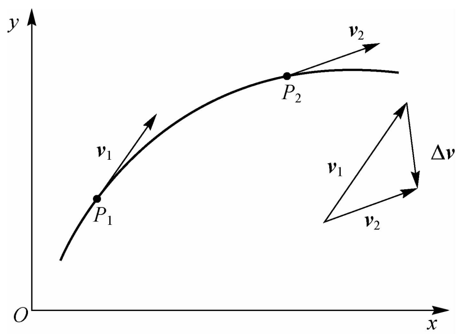


图 1-5

这里要注意,在直线运动中 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向与 $\boldsymbol{v}_1$ 的方向或者相同,或者相反,所以 $\Delta\boldsymbol{v}$ 实际上只反映质点速度在数值上有所变化;而在曲线运动中,$\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向和 $\boldsymbol{v}_1$ 的方向并不一致,$\Delta\boldsymbol{v}$ 所描述的速度变化包括速度方向的变化和速度数值的变化.

在有限时间段内,速度增量与时间的比称为平均加速度.设质点在 t 时速度为 $\boldsymbol{v}_1$,在 $t+\Delta t$ 时速度为 $\boldsymbol{v}_2$,速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$,则平均加速度为

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-13}$$

式中,$\Delta\boldsymbol{v}$ 是矢量,Δt 是标量,因而平均加速度 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 为矢量,其方向与速度的变化量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向一致.

平均加速度只能粗略地描述一段时间内质点运动速度变化快慢及速度方向变化的情况,如果要细致地了解某一时刻质点速度变化的快慢及方向,则需要把平均加速度公式中的时间长度 Δt 尽可能地取小一些.当 $\Delta t\to 0$ 时,平均加速度的极限值称为瞬时加速度,简称加速度,用 $\boldsymbol{a}$ 表示,即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-14}$$

式(1-14)表明质点在 t 时刻附近无限短的一段时间内的速度变化率,即加速度是反映质点速度随时间变化快慢的物理量. 加速度是速度对时间的一阶导数或位置矢量对时间的二阶导数. 加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向为 $\Delta t\to 0$ 时速度变化 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向,即指向轨迹曲线的凹侧. 在直线运动中,加速度的方向与速度方向相同或相反,相同时速率增加,如自由落体运动;相反时速率减小,如竖直上抛运动. 而在曲线运动中,加速度的方向与速度方向并不一致,如斜抛运动中速度方向在抛物线轨迹的切向,而加速度的方向始终在竖直向下的方向上.

在直角坐标系中,加速度的三个分量 a_x、a_y、a_z 分别为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-15}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 可写作

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-16}$$

而加速度的大小为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1-17}$$

例 1-1　已知一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(2-t^2)\boldsymbol{j}$(SI),求:

(1)$t=1$ s 和 $t=2$ s 时的位矢;

(2)$t=1$ s 到 $t=2$ s 内的位移;

(3)$t=1$ s 到 $t=2$ s 内质点的平均速度;

(4)$t=1$ s 和 $t=2$ s 时质点的速度;

(5)$t=1$ s 到 $t=2$ s 内质点的平均加速度;

(6)$t=1$ s 和 $t=2$ s 时质点的加速度.

解:(1)$\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ m

$\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ m

(2)$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ m

(3)$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}}{2-1}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ m/s

(4)$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ m/s

$\boldsymbol{v}_2=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ m/s

(5)$\bar{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\dfrac{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1}{\Delta t}=\dfrac{-2\boldsymbol{j}}{2-1}=-2\boldsymbol{j}$ m/s^2

(6)$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-2\boldsymbol{j}$ m/s^2

例 1-2　一质点沿 x 轴运动,已知加速度为 $\boldsymbol{a}=4t$(SI),初始条件为:$t=0$ 时,$v_0=0$,$x_0=10$ m. 求该质点的运动方程.

解:取质点为研究对象,由加速度定义有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=4t$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{v}=4t\mathrm{d}t$$

由初始条件有

$$\int_0^v \mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t 4t\mathrm{d}t$$

得

$$\boldsymbol{v}=2t^2$$

由速度定义得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=2t^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{x}=2t^2\mathrm{d}t$$

由初始条件得

$$\int_{10}^x \mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_0^t 2t^2\mathrm{d}t$$

即

$$\boldsymbol{x}=\frac{2}{3}t^3+10\ \mathrm{m}$$

例 1-3　已知质点做匀变速直线运动，加速度为 $\boldsymbol{a}$，求该质点的运动方程.

解：由定义 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$$

因为质点做匀变速直线运动，上式可写成

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$$

设 $t=0$ 时，$v=v_0$，将上式两边积分

$$\int_{v_0}^v \mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t=a\int_0^t \mathrm{d}t$$

由此得

$$v=v_0+at \qquad ①$$

又由定义

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v=v_0+at$$

设 $t=0$ 时，$x=x_0$，由上式积分得运动方程为

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \qquad ②$$

由式①、式②消去 t，即得

$$v^2=v_0^2+2a(x-x_0) \qquad ③$$

式①、式②、式③就是匀变速直线运动的公式.

1.3　圆周运动

圆周运动是曲线运动的一个特例，研究圆周运动后，再研究一般曲线运动，也比较简单. 物体定轴转动时，物体中每个质点都做圆周运动. 所以，圆周运动又是研究物体转动的基础.

质点做圆周运动时，经常用角位置、角位移、角速度、角加速度来描述.

1.3.1　圆周运动的角量描述

如图 1-6 所示，设质点在 Oxy 平面内做圆周运动，以圆心 O 为坐标原点，x 轴为参考轴，

质点的位矢和 x 轴的夹角为 θ，质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小不变，故要确定任一时刻质点的位置，只需要一个角量 θ，θ 称为质点的角位置.

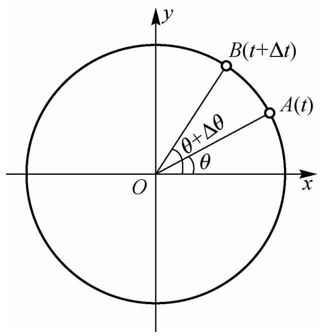


图 1-6

角位置 θ 的单位为弧度（rad），它实际上只代表质点相对于原点的方向. 规定以逆时针旋转为正方向，则角位置 θ 随时间 t 变化的关系式

$$\theta=\theta(t) \tag{1-18}$$

称为角运动方程. 设质点在 t 时刻和 $t+\Delta t$ 时刻分别过 A 点和 B 点，质点在此过程中角位置的变化称为角位移，用 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 表示，即

$$\Delta\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}(t+\Delta t)-\boldsymbol{\theta}(t) \tag{1-19}$$

角位移是矢量，一般取沿逆时针转向的角位移为正值，沿顺时针转向的角位移为负值.

在 Δt 时间段内的角位移 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 与时间间隔 Δt 的比值称为平均角速度，即

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}=\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \tag{1-20}$$

而在无限短时间内角位移与时间间隔的比值称为瞬时角速度，简称为角速度. 根据极限的概念，在 $\Delta t\to 0$ 时，平均角速度的极限就是质点在 t 时刻对 O 点的瞬时角速度，即

$$\boldsymbol{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t} \tag{1-21}$$

式(1-21)表明，角速度是角位置对时间的一阶导数，通常以逆时针转动的角速度为正. 角速度的单位是弧度/秒（rad/s）.

质点在 t 时刻的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_0$，在 $t+\Delta t$ 时刻的角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，在 Δt 时间内的角速度增量 $\Delta\boldsymbol{\omega}$ 与时间 Δt 的比值称为这段时间内质点对 O 点的平均角加速度，用 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 来表示，即

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t} \tag{1-22}$$

在无限短的时间间隔内，角速度增量与其时间间隔之比称为瞬时角加速度，简称为角加速度. 同样根据极限的概念，在 $\Delta t\to 0$ 时平均角加速度的极限即为质点在 t 时刻的瞬时角加速度，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-23}$$

式(1-23)表明，角加速度是角速度对时间的一阶导数，或角运动位移对时间的二阶导数. 角加速度的单位是弧度/平方秒（rad/s^2）.

圆周运动角量的运动学问题完全类似于直线运动的情况. 如果已知角运动方程求角速

度与角加速度，就是使用求导数的方法；如果是已知角加速度和初始条件求角速度和角运动方程，则使用积分的方法. 当碰到角加速度与角速度有关或角加速度与角位置有关的情况时，积分的处理方法与前面的直线运动情况类似.

质点做匀速和匀变速圆周运动时，用角量表示的运动学方程与匀速和匀变速直线运动的运动学方程完全相似. 匀速圆周运动的运动学方程为

$$\theta=\theta_0+\boldsymbol{\omega}t \tag{1-24}$$

匀变速圆周运动的运动学方程为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{\alpha}t\\&\theta=\theta_0+\boldsymbol{\omega}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}t^2\\&\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\omega}_0^2+2\boldsymbol{\alpha}(\theta-\theta_0)\end{aligned}\right\} \tag{1-25}$$

式中，θ、θ_0、$\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{\omega}_0$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别表示角位置、初角位置、角速度、初角速度和角加速度的值.

例 1-4　一飞轮边缘上一点所经过的路程与时间的关系为 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$，v_0、b 都是正的常量.

(1)求该点在时刻 t 的加速度；

(2)t 为何值时，该点的切向加速度和法向加速度大小相等？(已知飞轮的半径为 R)

解：(1)由题意可得，该点的速率为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_0t-\frac{1}{2}bt^2\right)=v_0-bt$$

上式表明，速率随时间 t 变化，该点做匀变速圆周运动.

为了求该点的加速度，应从求切向加速度和法向加速度入手.

切向加速度为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0-bt)=-b$$

法向加速度为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=\frac{\boldsymbol{v}^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

上式表明，加速度的法向分量 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$ 是随时间 t 改变的.

由以上两式可得该点在 t 时刻的加速度，其大小为

$$\boldsymbol{a}=\sqrt{\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}^2+\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}^2}=\sqrt{(-b)^2+\left[\frac{(v_0-bt)^2}{R}\right]^2}=\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}$$

如图 1-7 所示，加速度的方向由它和速度间的夹角 α 确定为

$$\boldsymbol{\alpha}=\arctan\left[\frac{(v_0-bt)^2}{-Rb}\right]$$

加速度矢量已标在图上.

(2)因为切向加速度不随时间变化，随时间改变的只是法向加速度，令两者相等，即可求得所需时间，即

$$b=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

$$\sqrt{bR}=v_0-bt$$

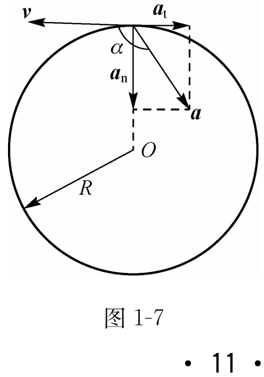


图 1-7

于是得
$$t=\frac{v_0-\sqrt{bR}}{b}$$

例 1-5　图 1-8(a)所示为一曲柄连杆机构，曲柄 OA 长为 r，连杆 AB 长为 l. AB 的一端用销子在 A 处与曲柄 OA 相连，另一端以销子在 B 处与活塞相连. 当曲柄以匀角速度 ω 绕轴 O 旋转时，通过连杆将带动 B 处活塞在气缸内往复运动，试求活塞的运动方程.

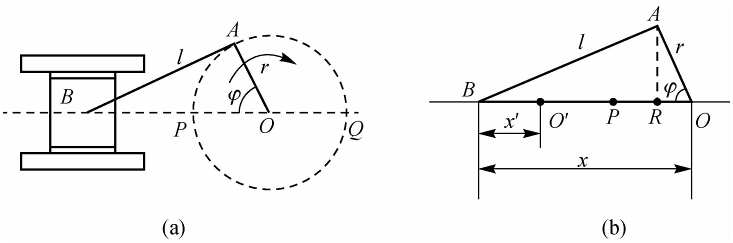


图 1-8

解：取 O 为原点，Ox 轴水平向左，如图 1-8(b)所示；并设开始时，曲柄 A 端在 Ox 轴上的点 P 处. 当曲柄以匀角速度 ω 转动时，在 t 时刻曲柄转角为 $\varphi=\omega t$，这时 B 处活塞的位置为 $x=OR+RB$，即
$$x=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$$
这就是活塞的运动方程.

我们把上式右端第二项按二项式定理展开为级数
$$\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}=l\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\omega t+\cdots\right]$$

一般$\frac{r}{l}<\frac{1}{3.5}$，因此高阶小量可以略去，于是得活塞的运动方程为
$$(e)x=r\cos\omega t+l\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\omega t\right]$$

1.3.2　圆周运动中角量与线量的关系

质点做圆周运动时，角量和线量之间存在着一定的关系. 如图 1-9 所示，设圆的半径为 R，在时间 Δt 内，质点的角位移为 $\Delta\theta$，质点在这段时间内的线位移就是有向线段$\overrightarrow{AB}$. 当 Δt 极小时，有向线段$\overrightarrow{AB}$和弧 AB 等长，即
$$|\overrightarrow{AB}|=R\Delta\theta$$

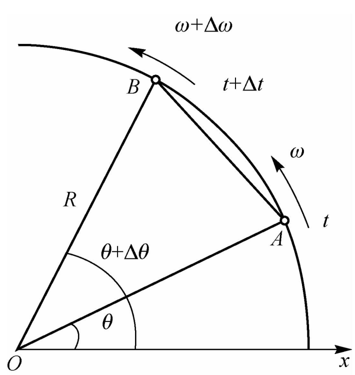


图 1-9

以 Δt 除等式两边，并取极限，可得线速度与角速度之间的关系为
$$\frac{\mathrm{d}|\overrightarrow{AB}|}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t}$$
即
$$\boldsymbol{v}=R\boldsymbol{\omega} \tag{1-26}$$
再将式(1-26)对时间 t 求导，得质点的切向加速度为
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=R\boldsymbol{\alpha} \tag{1-27}$$

而质点的法向加速度为

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}=v\omega=R\omega^2 \tag{1-28}$$

1.4 伽利略相对性原理

1.4.1 伽利略相对性原理概述

为了描述物体的机械运动,我们需要选择适当的参考系.实验表明,在有些参考系中,牛顿运动定律是适用的,而在另一些参考系中,牛顿运动定律并不适用.凡是适用牛顿运动定律的参考系称为惯性系,而不适用牛顿运动定律的参考系则称为非惯性系.一个参考系是不是惯性系只能根据实验观察来加以判断.设想我们已经找到一个惯性系,在这个惯性系内,有一个所受合外力等于零的物体,相对于这个惯性系是静止的.现在,另有一个参考系,它相对于前一个惯性系做匀速直线运动,则在后一个参考系中的观察者看来,该物体所受的合外力仍等于零,不过相对于自己做匀速直线运动.这两种说法虽然不同,但都和牛顿运动定律相符合.因此,相对于惯性系做匀速直线运动的参考系也是一个惯性系.于是,我们的结论是:若惯性系存在,则不只有一个,而是有无数个,一切相对于惯性系做匀速直线运动的参考系也都是惯性系,在这些惯性系内,所有力学现象都符合牛顿运动定律.

经典力学以牛顿运动定律为基础,由这个定律可以导出经典力学的全部定律(如关于动量、角动量和能量的三个守恒定律).可以说,在一切惯性系中力学规律都是相同的,这称为力学相对性原理.这意味着在任意惯性系中力学现象完全相同地进行着,在任意惯性系中所做的任何力学实验都不能确定该惯性系是静止的还是做匀速直线运动的,这是力学相对性原理的另一种表述.伽利略通过观察和实验验证了这一结论,并在《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》一书中进行了生动的描述,所以这个原理称为伽利略相对性原理.

爱因斯坦发展了伽利略相对性原理,提出对于描述一切物理过程的规律,所有惯性系都是等价的.这便是爱因斯坦相对性原理,是爱因斯坦狭义相对论的两个基本原理之一.

1.4.2 伽利略变换

伽利略变换是力学相对性原理的数学表达式,也是牛顿绝对时空观的具体表现.

如图1-10所示,假设O与O'重合时,$t=t'=0$,则质点在K'系中的时空坐标(x',y',z',t')与K系中的时空坐标(x,y,z,t)之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}x'&=x-ut\\y'&=y\\z'&=z\\t'&=t\end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

其逆变换可以表示为

$$\left.\begin{aligned}x&=x'+ut\\y&=y'\\z&=z'\\t&=t'\end{aligned}\right\} \tag{1-30}$$

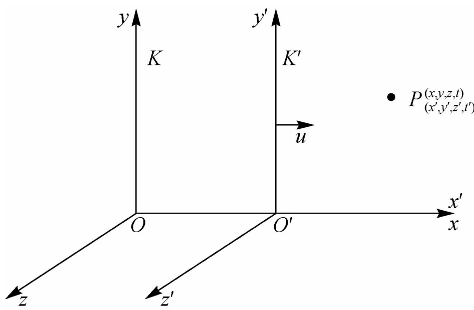


图 1-10

式(1-29)和式(1-30)称为伽利略变换.

由伽利略变换式可以得出:空间中两点的距离、两个事件之间的时间间隔、物体的加速度、两个物体之间的相对速度都是绝对的,即都是关于伽利略变换的不变量. 在经典力学中,伽利略相对性原理是和牛顿运动定律、经典力学绝对时空观交织在一起的.

1.4.3　惯性力

在非惯性系中牛顿运动定律不成立,所以不能直接用牛顿运动定律处理力学问题. 若仍然希望能用牛顿运动定律处理这些问题,则必须引入一种作用于物体上的惯性力. 惯性力不同于前面所说的外力,因为惯性力既没有施力物体,也不存在它的反作用力.

1. 直线加速参考系中的惯性力

若某参考系相对于惯性系做变速直线运动,且各坐标轴的方向保持不变,该参考系就是直线加速参考系. 如图 1-11 所示,固定在车厢里的一个光滑桌面上放着两个滑块 A 和 B. 当车厢以加速度 $\boldsymbol{a}$ 由静止开始做直线运动时,在地面参考系观察,滑块 A 在水平方向上不受任何力的作用,所以保持静止;滑块 B 受到挡板向右的推力而随车厢一起做加速度运动,这与牛顿运动定律的结论相符. 但在车厢这个直线加速参考系中观察,在水平方向上不受力的滑块 A 以加速度 $\boldsymbol{a}$ 在桌面上运动,而受到挡板推力作用的滑块 B 却静止不动,这显然与牛顿运动定律相违背. 为在直线加速参考系中应用牛顿运动定律处理问题,可引入惯性力

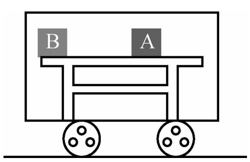


图 1-11

$$\boldsymbol{f}^{*}=-m\boldsymbol{a} \tag{1-31}$$

式(1-31)表示,在直线加速参考系中,惯性力的方向与非惯性系相对于惯性系的加速度的方向相反,大小等于所研究物体的质量与加速度的乘积. 在图 1-11 所示的例子中,若以车厢为参考系,滑块 A(质量为 m_{A})和滑块 B(质量为 m_{B})都受到惯性力的作用,它们的惯性力分别为 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}}^{*}=-m_{\mathrm{A}}\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}}^{*}=-m_{\mathrm{B}}\boldsymbol{a}$. 当车厢以加速度 $\boldsymbol{a}$ 向右运动时,滑块 A 由于受到向左的惯性力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}}^{*}$ 的作用而以加速度 $\boldsymbol{a}$ 向左运动,滑块 B 由于受到向右的推力和向左的惯性力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}}^{*}$ 的共同作用,合力为零,所以静止不动.

2. 匀速转动参考系中的惯性力

如图 1-12 所示,长度为 r 的细绳的一端系一质量为 m 的小球,另一端固定于圆盘的中心,当圆盘以匀角速度绕通过盘心并垂直于盘面的竖直轴旋转时,小球也随圆盘一起转动.

若以地面为参考系，由细绳的张力所提供的向心力 $\boldsymbol{T}$ 使小球做圆周运动，这符合牛顿运动定律，且

$$|\boldsymbol{T}| = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

若以圆盘这个非惯性系为参考系，小球受到细绳的拉力作用却是静止的，这不符合牛顿运动定律. 为了应用牛顿运动定律，可设想小球除了受细绳的张力 $\boldsymbol{T}$ 的作用外，还受到惯性力 $\boldsymbol{f}^*$ 的作用，$\boldsymbol{f}^*$ 可以表示为

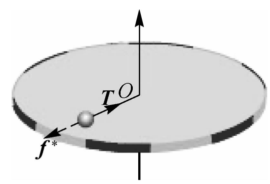


图 1-12

$$\boldsymbol{f}^* = m \cdot 2\boldsymbol{r} \tag{1-32}$$

式中，$\boldsymbol{r}$ 是从转轴向质点(在此是小球)所引的有向线段，且与转轴相垂直. 由于这种惯性力的方向总是背离轴心的，故得名为惯性离心力. 引入惯性离心力后，小球受力满足关系

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{f}^* = 0 \tag{1-33}$$

所以小球保持静止，牛顿运动定律依然成立. 于是我们可以得到这样的结论：若质点在匀速转动的非惯性系中保持静止，则作用于该质点的外力与惯性离心力的合力等于零.

例 1-6　一个质量为 60 kg 的人，站在电梯中的磅秤上，当电梯以 $a=0.5\ \text{m/s}^2$ 的加速度匀加速上升时，磅秤上指示的读数是多少？试用惯性力的方法求解.

解：取电梯为参考系. 已知这个非惯性系以 $a=0.5\ \text{m/s}^2$ 的加速度相对地面参考系运动，与之相对应的惯性力 $\boldsymbol{F}_{惯} = -m\boldsymbol{a}$. 从电梯这个非惯性系看来，人除受到重力 $\boldsymbol{G}$(方向向下)和磅秤对他的支持力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$(方向向上)之外，还要另加一个 $\boldsymbol{F}_{惯}$. 此人相对于电梯是静止的，则以上三个力必须恰好平衡，即

$$F_{\mathrm{N}} - G - F_{惯} = 0$$

于是

$$F_{\mathrm{N}} = G + F_{惯} = m(g+a) = 618\ \text{N}$$

由此可见，磅秤上的读数不等于物体所受的重力 $\boldsymbol{G}$. 当加速上升时，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} > \boldsymbol{G}$；当加速下降时，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} < \boldsymbol{G}$. 前一种情况称为超重，后一种情况称为失重.

复习参考题

1-1　说明选取参考系、建立坐标系的必要性；仅就描述质点运动而言，参考系应该如何选择？

1-2　一质点做直线运动，速度和加速度的大小分别为 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 和 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，证明：

(1) $v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}s$；

(2)当 a 为常量时，式 $v^2 = v_0^2 + 2a(s-s_0)$ 成立.

1-3　一质点沿直线运动，其位置和时间的关系为 $r=8t^2-2t^3$，r 和 t 的单位分别是 m 和 s，求：

(1)2 s 内的平均速度；

(2)第 3 s 末和第 4 s 末的速度.

1-4　质点沿直线运动，在 t 秒后它离该直线上某定点 O 的距离 s 满足关系式 $s=(t-1)^2(t-2)$，s 和 t 的单位分别是 m 和 s. 求：

(1)当质点经过 O 点时的速度和加速度;

(2)当质点的速度为零时它离开 O 点的距离;

(3)当质点的加速度为零时它离开 O 点的距离;

(4)当质点的速度为 12 m/s 时它的加速度.

1-5　在离水面高度为 h 的岸边,有人用绳子拉船靠岸,船在离岸边 s 距离处,当人以速率 v_0 匀速收绳时,试求船的速率和加速度大小.

1-6　一质点沿某直线做减速运动,其加速度为 $\boldsymbol{a}=-C\boldsymbol{v}^2$,$C$ 是正常量.若 $t=0$ 时,质点的速度为 $\boldsymbol{v}_0$,并处于 s_0 的位置上,求任意时刻 t 质点的速度和位置.

1-7　质点做直线运动,初速度为零,初始加速度为 $\boldsymbol{a}_0$,质点出发后每经过 t 时间,加速度均匀增加 b.求经过 t 时间后质点的速度和加速度.

1-8　一艘正在沿直线行驶的舰艇,在发动机关闭后,其加速度方向与速度方向相反,大小与速度的平方成正比,即 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t=-k\boldsymbol{v}^2$,式中 k 为常数.试证明舰艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0\mathrm{e}^{-kx}$.(其中 $\boldsymbol{v}_0$ 是发动机关闭时的速度)

1-9　一架开始静止的升降机以加速度 1.22 m/s^2 上升,当上升速度达到 2.44 m/s 时,有一螺帽自升降机的天花板上落下,天花板与升降机的底面相距 2.74 m.计算:

(1)螺帽从天花板落到升降机的底面所需要的时间;

(2)螺帽相对升降机外固定柱子的下降距离.

1-10　设火箭引信的燃烧时间为 6.0 s,今在与水平面成 45°的方向将火箭发射出去,欲使火箭在弹道的最高点爆炸,问必须以多大的初速度发射火箭?

1-11　质点做曲线运动,其角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 为常量,质点位置的极径与时间的关系可以表示为 $\boldsymbol{\rho}(t)=\boldsymbol{\rho}_0\mathrm{e}^{at}$,其中 $\boldsymbol{\rho}_0$ 和 a 都是常量.求质点的径向速度和径向加速度,以及横向速度和横向加速度.

1-12　用绳子系一物体,使它在竖直平面内做圆周运动,问物体在什么位置上绳子的张力最大?在什么位置上绳子的张力最小?各为多大?

第 2 章 质点动力学

科学人物 牛顿

艾萨克·牛顿(Isaac Newton,1643—1727),英国伟大的数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家.

牛顿1661年进入英国剑桥大学圣三一学院,1665年获文学学士学位.随后两年在家乡躲避瘟疫.在这两年里,他描绘了一生大多数重要科学创造的蓝图.1667年回剑桥后当选为圣三一学院院委,次年获硕士学位.1669—1701年任卢卡斯教授.1696年任皇家造币厂监督,并移居伦敦.1703年任英国皇家学会会长.1706年受女王安娜封爵.他晚年潜心于自然哲学与神学.

牛顿是人类历史上最伟大的科学家之一,他的主要成就是发明了微积分,发现了万有引力定律,创立了经典力学.

牛顿

质点动力学是物理学的重要组成部分,包括牛顿运动定律、动量与冲量、功能关系等内容,是研究物体运动的重要途径和主要手段.

2.1 牛顿运动定律

2.1.1 牛顿第一定律

牛顿第一定律表述为:任何物体都要保持其静止状态或匀速直线运动状态,直到其他物体所作用的力迫使它改变这种状态为止.用 $\boldsymbol{F}$ 表示力,则牛顿第一定律的数学表达式为

$$\text{当 } \boldsymbol{F}=0 \text{ 时}, \boldsymbol{v}=\text{恒矢量} \tag{2-1}$$

牛顿第一定律阐明了以下3个重要概念.

1. 惯性

牛顿第一定律表明任何物体都具有保持其原有运动状态不变的性质,我们把这个性质称为物体的惯性.因而,牛顿第一定律又被称为惯性定律.惯性是物体本身所固有的属性,任何物体在任何状态下都具有惯性.在质点力学范畴,物体的惯性大小与物体的质量有关,因而物体的质量有时也被称为惯性质量.

2. 力

牛顿第一定律指出力的作用是改变物体的运动状态. 这个论断纠正了统治西方近两千年的亚里士多德的错误观点:“推一个物体的力不再去推它时,物体便归于静止.”亚里士多德误认为力的作用是维持运动,然而比亚里士多德约早一百年的中国古代思想家墨翟已经认识到力是改变物体运动状态的原因了,他在《墨经》中写道:“力,刑之所以奋也”;“止,以久也”. 刑即形,指物体;奋,即改变运动状态从静到动或从慢到快. 久即炙,是拒之意,可理解为阻力. 力是物体间的相互作用,是使物体产生加速度的原因,而不是使物体运动的原因. 牛顿第一定律定性地给出了力和加速度之间的关系.

3. 惯性系

牛顿第一定律定义了特殊的参考系,即惯性系. 正如第 1 章所说,运动只有相对于特定的参考系才有意义. 我们把牛顿第一定律在其中成立的参考系称为惯性系;牛顿第一定律在其中不成立的参考系称为非惯性系. 所以,可以把牛顿第一定律作为判断一个参考系是惯性系还是非惯性系的理论依据.

2.1.2　牛顿第二定律

牛顿第二定律表述如下:物体受外力作用时,所获得的加速度的大小与合外力的大小成正比,并与物体的质量 m 成反比,加速度方向与合外力 $\sum\boldsymbol{F}$ 的方向相同,其数学表达式为

$$\sum\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{a} \tag{2-2}$$

式(2-2)中取比例系数为 1,这与力、质量和加速度采用国际单位制有关,是质点动力学的基本方程式.

牛顿第二定律所表达的规律是质点所受合力、自身质量及它所获得的加速度三者之间的瞬时关系. 质点的加速度只在它受力作用时才产生,如果在某一瞬间质点失去了力的作用,在这一瞬间质点也失去了加速度. 此后,质点将以该瞬间的速度做匀速直线运动.

1. 应用牛顿第二定律时的注意事项

(1)牛顿第二定律只能直接应用于质点的运动.

(2)$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 中的 $\boldsymbol{F}$ 是指合外力.

(3)加速度 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 方向一致,说明只有沿力的作用方向物体才能产生加速度. 在直角坐标系中 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 的分量形式为

$$\boldsymbol{F}_x=m\boldsymbol{a}_x,\boldsymbol{F}_y=m\boldsymbol{a}_y,\boldsymbol{F}_z=m\boldsymbol{a}_z$$

这就是说,各方向的分力都只能使物体产生自己方向的加速度. 同样,可把式 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 沿切向和法向分解为

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{t}=m\boldsymbol{a}_\mathrm{t},\boldsymbol{F}_\mathrm{n}=m\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$$

$\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ 和 $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ 分别称为切向分力和法向分力. 它们也只能分别使物体产生自己方向的加速度.

(4)$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 所反映的力与加速度之间的关系是瞬时关系.

2. 度量力和惯性的方法

1)力的度量

使同一物体先后在两个不同的力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的作用下分别获得加速度 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$,因为质量

m 一定，所以由式(2-2)得

$$\frac{\boldsymbol{F}_1}{\boldsymbol{F}_2}=\frac{\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_2}$$

其中加速度和可以测量.如再规定两力之一为标准力，就可根据上式算出另一个力的大小.常用的测力仪器便是根据这个原理制成的.

实验证明，力既有大小，又有方向，而且多个力相加时遵从平行四边形法则，所以力是矢量.

2)惯性的度量

物理学中用来度量物体惯性的物理量称为惯性质量，惯性质量是物体阻碍其自身运动状态变化的固有特性.各物体的惯性质量与它们在相同力的作用下获得的加速度数值成反比.若用 m_1 和 m_2 表示物体 1 和 2 的惯性质量，则有

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{a_2}{a_1}$$

其中加速度和可以测量，选定其中一物体的惯性质量作为惯性质量的单位后，另一物体的惯性质量即可以确定.现在规定“国际千克原器”的质量为 1 千克，它是一个铂合金圆柱体，保存在巴黎国际度量衡局.质量的国际单位是千克(kg).

牛顿第二定律中的质量称为惯性质量，它与万有引力定律中的引力质量概念不同，前者表征物体惯性的大小，后者体现物体产生和感受引力的能力.近代精确实验表明，如果选用适当单位，同一物体的惯性质量和引力质量在数值上相等.

2.1.3　牛顿第三定律

牛顿第三定律可以表达为：两个质点之间的相互作用力(作用力与反作用力)，总是大小相等，方向相反，在同一直线上，分别作用在这两个质点上.

牛顿第三定律的数学表达式为

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}' \tag{2-3}$$

牛顿第三定律又称为作用力和反作用力定律，是对作用力的相互性的说明.

(1)物体间的相互作用力有如下性质.

①相互性：两个物体间力的作用是相互的.施力物体和受力物体对两个力来说是互换的，分别把这两个力称为作用力和反作用力.

②同时性：作用力消失，反作用力立即消失.没有作用力就没有反作用力.

③同一性：作用力和反作用力的性质是相同的.

④方向：作用力和反作用力的方向是相反的，在一条直线上，但它们作用于不同的物体上，因而不可能互相抵消.

⑤大小：作用力和反作用力的大小在数值上是相等的.

图 2-1 所示是关于牛顿第三定律的几个例子，从图中可以看出，作用力和反作用力属于同一种性质.例如，图 2-1(a)中都是摩擦力；图 2-1(b)中是张力；图 2-1(c)中是万有引力；图 2-1(d)中是电性力；图 2-1(e)中是一对磁力.

从图 2-1 中可以看出，作用力和反作用力是分别作用在两个物体上的.这对掌握与应用牛顿第三定律特别重要.

(2)在国际单位制中,力的单位是牛顿(N),简称牛.

$$1\ \mathrm{N}=1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$$

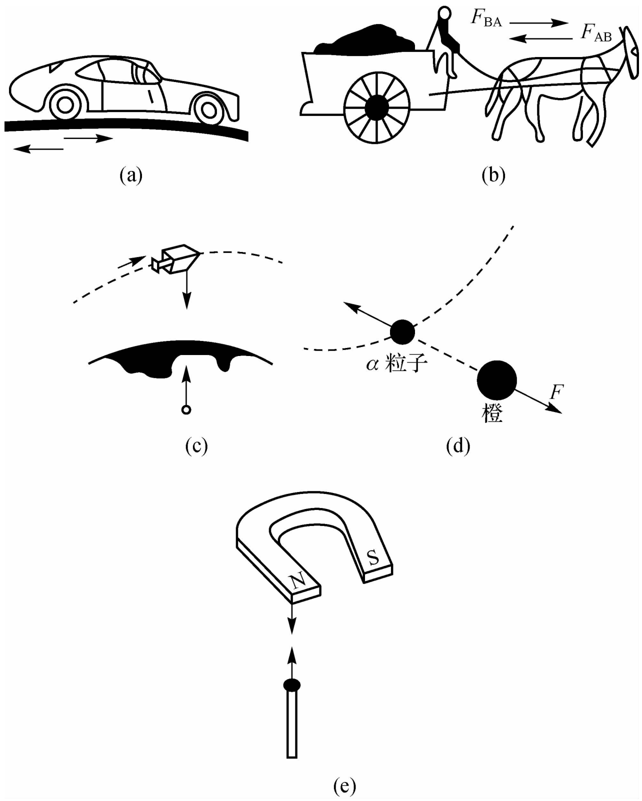


图 2-1

2.1.4　牛顿运动定律应用举例

(1)三条牛顿运动定律是一个整体,不能只注意牛顿第二定律,而把其他两条定律置之脑后. 牛顿第一定律是牛顿力学的思想基础,它说明任何物体都有惯性,牛顿运动定律只能在惯性参考系中应用,力是使物体产生加速度的原因,在惯性系中不能把 ma 误认为力. 牛顿第三定律指出了力有相互作用的性质,为我们正确分析物体受力情况提供了依据. 通常在力学问题中,对每个物体来说,除重力外,其他外力都可以在该物体和其他物体相接触处去寻找,以免把作用在物体上的一些力遗漏掉. 所有这些都是我们在应用牛顿第二定律做定量计算时所必须考虑的.

(2)应用牛顿运动定律求解的问题基本上可以分为以下两种类型:

第一类问题,已知物体的受力情况,求解物体的运动状态.

第二类问题,已知物体的运动状态,求解物体的受力情况.

两类问题的求解思路相同,步骤也一样,具体如下:

①搞清题意,选好研究对象. 若问题中研究对象涉及多个物体,则可用“隔离体法”求解. 所谓隔离体法,是指把每个物体从总体中隔离出来单独作为研究对象,把外界对隔离体的关系通过对它的力反映出来.

②对研究对象进行受力分析,作出受力图.

③根据研究对象的受力情况和问题性质,选择(惯性)参考系,建立合适的坐标系.

④根据牛顿第二定律与物理量间的其他关系(如运动学方面的关系、摩擦力与正压力间的关系、几何关系等)列出方程.

⑤解方程,得出结果,并对结果进行讨论.

例 2-1　如图 2-2 所示,水平地面上有一质量为 M 的物体,静止于地面上. 物体与地面间的静摩擦系数为 μ_s. 若要拉动物体,最小的拉力是多少? 沿何方向?

解:(1)研究对象:M.

(2)受力分析:M 受 4 个力,即重力 $\boldsymbol{G}$、拉力 $\boldsymbol{T}$,地面的正压力 $\boldsymbol{N}$ 和地面对它的摩擦力 $\boldsymbol{f}$,如图 2-3 所示.

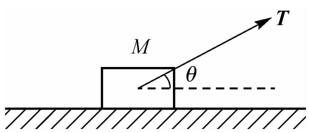


图 2-2

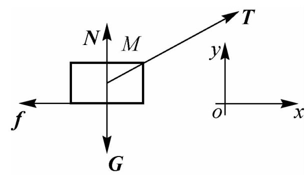


图 2-3

(3)根据牛顿第二定律:

合力:$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{T}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{f}\Rightarrow\boldsymbol{G}+\boldsymbol{T}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{f}=M\boldsymbol{a}$

分量式:取直角坐标系,

x 分量:$T\cos\theta-f=Ma$　①

y 分量:$T\sin\theta+N-G=0$　②

物体起动时,有

$$T\cos\theta-f\geqslant 0 \tag{③}$$

物体刚起动时,摩擦力为最大静摩擦力,即 $f=\mu_s N$,由式②解出 N,求得 f 为

$$f=\mu_s(G-T\sin\theta) \tag{④}$$

将式④代入式③中,有

$$T\geqslant\mu_s Mg/(\cos\theta+\mu_s\sin\theta) \tag{⑤}$$

可见:$T=T(\theta)$. 当 $T=T_{\min}$时,要求分母$(\cos\theta+\mu_s\sin\theta)$最大.

设

$$A(\theta)=\mu_s\sin\theta+\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}=\mu_s\cos\theta-\sin\theta=0$$

$$\Rightarrow\tan\theta=\mu_s$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}\theta^2}=-\mu_s\sin\theta-\cos\theta<0$$

所以 $\tan\theta=\mu_s$ 时,$A=A_{\max}$

$\Rightarrow T=T_{\min}\cdot\theta=\arctan\mu_s$,代入式⑤中,得

$$T\geqslant\mu_s Mg\Big/\left[\mu_s^2\frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}}\right]=\frac{\mu_s Mg}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$$

方向与水平方向夹角为 $\theta=\arctan\mu_s$ 时，即为所求结果.

例 2-2　质量为 m_1、倾角为 θ 的斜块可以在光滑水平面上运动. 斜块上放一小木块，质量为 m_2. 斜块与小木块之间有摩擦，摩擦因数为 μ. 现有水平力 $\boldsymbol{F}$ 作用在斜块上，如图 2-4(a)所示. 欲使小木块 m_2 与斜块 m_1 以相同的加速度一起运动，水平力 $\boldsymbol{F}$ 的大小应该满足什么条件?

解:在本例中，虽然斜块 m_1 与小木块 m_2 之间没有相对运动，但小木块欲与斜块以相同的加速度运动，就必须考虑斜块对小木块的静摩擦力作用，因此仍应将 m_1、m_2 分别当作两个研究对象，隔离物体进行受力分析.

由题意分析，如果水平力 $\boldsymbol{F}$ 过小，则加速度 $\boldsymbol{a}$ 过小，小木块 m_2 有沿斜面下滑的趋势，此时斜块对小木块的静摩擦力沿斜面向上，如图 2-4(b)所示. 如果水平力 $\boldsymbol{F}$ 过大，则加速度 $\boldsymbol{a}$ 过大，小木块就有沿斜面上滑的趋势，此时小木块受到的静摩擦力沿斜面向下，如图 2-4(c)所示.

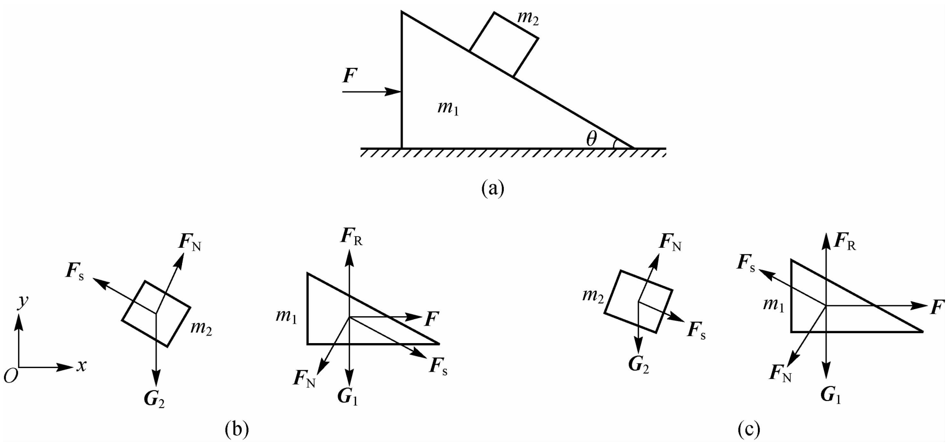


图 2-4

下面分别就这两种情况列方程.

(1)小木块 m_2 有沿斜面下滑的趋势. 如图 2-4(b)所示，小木块受重力 $\boldsymbol{G}_2$、斜面对它的正压力 $\boldsymbol{F}_N$ 和斜面对它的静摩擦力 $\boldsymbol{F}_s$，按图示坐标，有

$$F_N\sin\theta-F_s\cos\theta=m_2a \qquad ①$$

$$F_N\cos\theta+F_s\sin\theta-m_2g=0 \qquad ②$$

斜块受重力 $\boldsymbol{G}_1$、水平力 $\boldsymbol{F}$、小木块给予的正压力 $\boldsymbol{F}_N$，小块只沿水平方向运动，故只需列出 x 方向的方程就可以了，即

$$F+F_s\cos\theta-F_N\cos\theta=m_1a \qquad ③$$

再考虑到 m_1、m_2 相对静止，摩擦力为静摩擦力，应有

$$F_s\leqslant\mu F_N \qquad ④$$

联立求解式①～式④，可得

$$F\geqslant(m_1+m_2)g\,\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$$

(2)小木块 m_2 有沿斜面上滑的趋势. 如图 2-4(c)所示，对小木块而言，除了静摩擦力 $\boldsymbol{F}_S$ 的方向沿斜面向下外，其他力方向不变，因此有

$$F_N\sin\theta+F_s\cos\theta=m_1a \qquad ①$$

$$F_N\cos\theta+F_s\sin\theta-m_1g=0 \qquad ②$$

对斜块,静摩擦力改为沿斜面向上,在 x 方向上有

$$F-F_s\cos\theta-F_N\sin\theta=m_1a \tag{③}$$

静摩擦力 F_s 仍然应满足

$$F_s\leqslant\mu F_N \tag{④}$$

联立求解式①～式④,可得

$$F\leqslant(m_1+m_2)g\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}$$

因此,水平力 $\boldsymbol{F}$ 的大小应满足

$$(m_1+m_2)g\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}\leqslant F\leqslant(m_1+m_2)g\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}$$

例 2-3　如图 2-5(a)中的 A 为轻质定滑轮,B 为轻质动滑轮.质量分别为 $m_1=0.20$ kg、$m_2=0.10$ kg、$m_3=0.05$ kg 的 3 个物体悬挂于绳端.设绳与滑轮间的摩擦力忽略不计,求各物体的加速度及绳的张力.

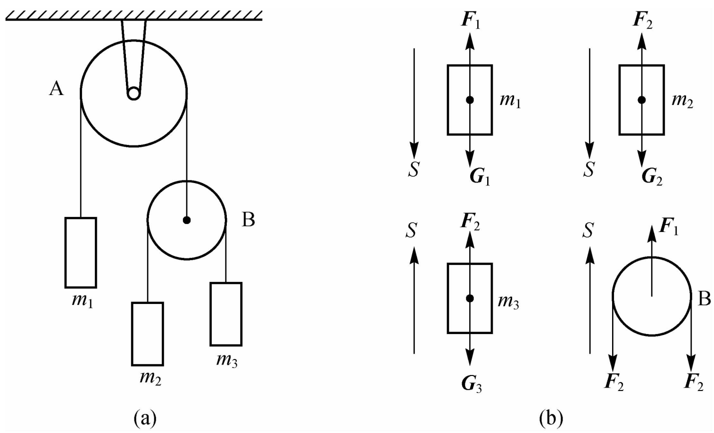


图 2-5

解:选定三个物体 m_1、m_2、m_3 与动滑轮 B 为研究对象.隔离物体受力分析如图 2-5(b)所示,图中 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 分别为两根绳上的拉力.对于滑轮问题,建立坐标最好“一顺”,即要么顺时针为正,要么逆时针为正.本例中选择逆时针为正,则对 m_1、m_2 以向下为正,对 m_3 和 B 应向上为正,其示意均标明在图 2-5(b) 中.

将牛顿第二定律分别应用于图 2-5(b)中的四个物体上,有

$$m_1g-F_1=m_1a_1 \tag{①}$$

$$m_2g-F_2=m_2a_2 \tag{②}$$

$$-m_3g+F_2=m_3a_3 \tag{③}$$

$$F_1-2F_2=m_Ba_B=0 \tag{④}$$

式中各物体的加速度均为其本身对地面的加速度.由于 4 个方程中有 5 个未知量(a_1、a_2、a_3、F_1、F_2),不能满足求解的需要,还应该寻找其他关系.考虑到 m_2 和 m_3 既相对于动滑轮 B 运动,又随 B 相对于地面(也可看作相对于定滑轮 A)运动,故应从相对运动入手列出有关的约束方程.设 m_2、m_3 相对于动滑轮 B 的加速度为 $\boldsymbol{a}'$,根据相对运动的知识,加速度大小有

$$a_2=a'-a_1 \tag{⑤}$$

$$a_3=a'+a_1 \tag{⑥}$$

联立求解式①～式⑥，可得各力与加速度大小为

$$a_1=\frac{m_1m_2+m_1m_3-4m_2m_3}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}g=1.96\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a'=\frac{2m_1(m_2-m_3)}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}g=3.92\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_2=a'-a_1=1.96\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_3=a'+a_1=5.88\ \mathrm{m/s^2}$$

$$F_1=m_1(g-a_1)=1.57\ \mathrm{N}$$

$$F_2=\frac{F_1}{2}=0.785\ \mathrm{N}$$

例 2-4　如图 2-6 所示，长为 l 的轻绳，一端系着质量为 m 的小球，另一端系于原点 O，开始时小球处于最低位置. 若小球获得图 2-6 所示的初速度 $\boldsymbol{v}_0$，小球将在竖直面内做圆周运动，求小球在任意位置的速率及绳的张力.

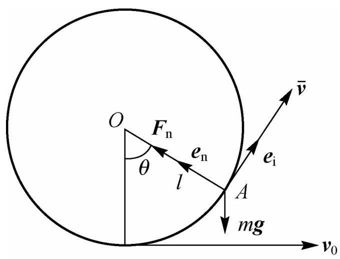


图 2-6

解：(1)研究对象：m.

(2)受力分析：小球受两个力，即重力 $m\boldsymbol{g}$ 和拉力 $\boldsymbol{F}_n$，如图 2-6 所示.

(3)牛顿定律：$\boldsymbol{F}_n-m\boldsymbol{g}=m\boldsymbol{a}$.

应用自然坐标系，运动到 A 处时，力的大小有下列方程

$$\boldsymbol{e}_n\text{ 方向}:F_n-mg\cos\theta=ma_n=m\frac{v^2}{l} \qquad ①$$

$$\boldsymbol{e}_i\text{ 方向}:-mg\sin\theta=ma_t=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ②$$

由式②有

$$-g\sin\theta=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\omega=\frac{v}{l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

即

$$v\mathrm{d}v=-gl\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

进行积分

$$\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=\int_0^{\theta}-gl\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

有

$$\frac{1}{2}(v^2-v_0^2)=gl(\cos\theta-1)$$

得

$$v=\sqrt{v_0^2+2gl(\cos\theta-1)}$$

将 v 代入式①中，得

$$F_n=m\left(\frac{v_0^2}{l}+3g\cos\theta-2g\right)$$

例 2-5　如图 2-7 所示，有一密度为 ρ 的细棒，长度为 l，其上端用细线悬着，下端紧贴着密度为 ρ' 的液体表面. 现将悬线剪掉，求细棒在恰好全部没入液体中时的沉降速度（设液体没有黏性）.

解：根据已知条件，液体没有黏性，所以在下落时，细棒只受到两个力：一是重力 $\boldsymbol{G}$，方向竖直向下；二是浮力 $\boldsymbol{F}_b$，方向竖直向上，如图 2-7 所示. 其中 $\boldsymbol{F}_b$ 是变力，当细棒的浸没长度为 x 时，$F_b=\rho' xg$（为方便计，棒的截面积被假设为 1 个单位）. 取竖直向下为 x 轴的正方向，棒所受合外力大小为

$$F=G-F_b=\rho lg-\rho' xg$$

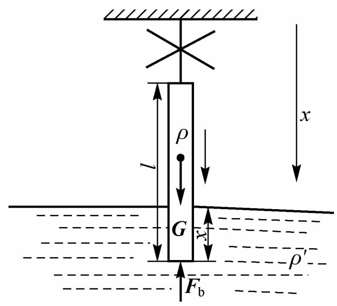


图 2-7

由牛顿第二定律得

$$(\rho l-\rho' x)g=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

因为所求的是当浸没长度 x 为 l 时的棒速，所以上式中的变量 t 应消去而只保留 x 和 v 两个变量. 考虑到这三个变量之间有关系 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，把它代入上式，并整理成如下形式

$$(\rho l-\rho' x)g\,\mathrm{d}x=mv\mathrm{d}v$$

这时积分

$$\int_0^l(\rho l-\rho' x)g\,\mathrm{d}x=\int_0^v mv\mathrm{d}v=\rho l\int_0^v v\mathrm{d}v$$

最后求得

$$v=\sqrt{\frac{2\rho lg-\rho' lg}{\rho}}$$

例 2-6　如图 2-8 所示为船上使用的绞盘，将绳索绕在绞盘的固定圆柱上. 绳子与圆柱的静摩擦因数为 μ，绳子绕圆柱的张角为 θ_0. 当绳在柱面上将要滑动时，求绳子两端张力 $\boldsymbol{F}_{TA}$ 与 $\boldsymbol{F}_{TB}$ 大小之比.

解：考虑对圆心张角为 $\mathrm{d}\theta$ 的一段绳元，如图 2-8 所示，作用在绳元的力有正压力 $\mathrm{d}F_N$，两端的张力 F_T 和 F'_T，以及圆柱给予的静摩擦力 $\mathrm{d}F_f=\mu_s\mathrm{d}F_N$. 因绳元的质量 $\mathrm{d}m$ 很小，所以运动方程中的 $\mathrm{d}m\cdot a$ 近似于 0，列出绳元的运动方程

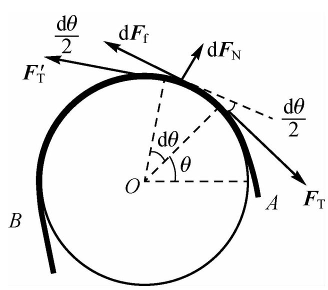


图 2-8

$$F_T\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-F'_T\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-\mu_s\mathrm{d}F_N=0 \quad ①$$

$$F_T\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+F'_T\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-\mathrm{d}F_N=0 \quad ②$$

因 $\mathrm{d}\theta$ 很小，所以 $\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx\frac{\mathrm{d}\theta}{2}$，$\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx1$，$F_T+F'_T\approx2F_T$，$F'_T-F_T\approx\mathrm{d}F_T$，代入式①、式②中，整理得

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{T}}=-\mu_{\mathrm{s}}\mathrm{d}F_{\mathrm{N}} \tag{③}$$

$$F_{\mathrm{T}}\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}F_{\mathrm{N}} \tag{④}$$

从式③、式④中消去 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}$ 并积分，得

$$\int_{F_{\mathrm{TA}}}^{F_{\mathrm{TB}}}\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{T}}}{F_{\mathrm{T}}}=\int_{0}^{\theta_0}-\mu_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\theta$$

即得

$$F_{\mathrm{TB}}=F_{\mathrm{TA}}\mathrm{e}^{-\mu_{\mathrm{s}}\theta_0}$$

由上式可知，当绳索与滑轮间有摩擦力时，张力随 θ_0 按指数减少，故很容易做到使 $F_{\mathrm{TB}}\ll F_{\mathrm{TA}}$. 例如，万吨轮下水，滑道的坡度为 1/120，如果将绳索在固定桩上绕 5 圈，绳索与桩之间的摩擦因数为 0.25，则用手拉绳索时需 $10^4\times10^3\times9.8\times0.05\times\mathrm{e}^{-0.25\times5\times2\pi}$ N 的力，即 1 910 N 的力.

2.2　力学中常见的力

日常经验和科学实验都表明，任何物体都受其周围物体的作用，正是这种作用支配着物体运动状态的变化. 行星受到太阳的作用才能绕日运行，苹果受到地球的作用才能下落，电子受到原子核的作用才能与原子核结合成原子. 物体间各种不同的相互作用，构成了千变万化的物质世界，这些作用常被称为力. 经验告诉我们，力有两种对外表现形式：一是改变物体的运动形态；二是改变物体的形状. 这两种表现形式使我们有可能对力的性质和量值做进一步的研究.

在日常生活和工程技术中常遇到的力有万有引力、弹性力、摩擦力、重力等. 重力属于万有引力的范畴. 弹性力和摩擦力从本质上看是来源于物质内部分子间或原子间的电磁相互作用，属于电磁力的范畴. 众所周知，万有引力和电磁力都不是超距作用而是通过力场来实现的，物体间通过引力场发生相互吸引的作用，电荷间通过电磁场发生电磁相互作用. 不过在力学中，由于只注意弹性力和摩擦力的宏观作用，因此为了描述上的方便，我们仍然说它们是在物体相互接触时发生的，是以接触为前提的接触力.

2.2.1　万有引力

宇宙中的一切物体都在相互吸引着. 地球和其他行星绕太阳的运动，月亮和人造地球卫星绕地球的运动，上抛的物体若没有别的物体托住总要落回地面，这些现象都是物体之间存在吸引力的表现，这种吸引力就是万有引力. 万有引力是自然界的基本力之一，有万有引力的空间内存在着一种物质，称为引力场，物体之间的（万有）引力的相互作用是通过引力场传递的. 粒子物理学进一步认为，引力相互作用是通过引力子传递的. 引力子是目前正在探索但尚未观测到的一种微观粒子.

万有引力定律表述如下：任何两个质点之间都相互吸引，引力的方向沿着两质点的连线的方向，引力的大小与两质点质量的乘积成正比，与两质点之间的距离的平方成反比. 用 m_1 和 m_2 分别表示两个质点的质量，以 $\boldsymbol{r}_{12}$ 表示它们的距离，则万有引力定律的数学表达式为

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\boldsymbol{G}m_1m_2}{\boldsymbol{r}_{12}^2} \tag{2-4}$$

式中，$\boldsymbol{F}_{12}$ 为两个质点的相互吸引力；$\boldsymbol{G}$ 为引力常量. 在国际单位制中，它的值为 $G=6.67\times$

$10^{-11}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$.

应当注意,万有引力公式只适用于质点间引力大小的计算. 当两物体间的距离远远大于每个物体的尺寸时,物体可以看成质点,可直接使用万有引力定律计算. 对于两个有限大的物体,它们之间的引力应是组成一物体的各个质点和组成另一物体的各个质点之间的所有引力的矢量和. 对于两个均匀球体之间的引力,计算结果正如牛顿所说,可以把球体看作质点,式(2-4)仍适用,这时 m_1 和 m_2 分别表示两球体的质量,r 表示两球体球心的距离.

例 2-7　应以多大速度发射,才能使人造地球卫星绕地球做匀速圆周运动?

解:近似认为地球是一个半径为 R 的均匀球体,人造地球卫星离地面的高度为 h,它绕地球做匀速圆周运动所需要的向心力为

$$F_1=m\frac{v^2}{r}=\frac{mv^2}{R+h}$$

式中,m 为人造地球卫星的质量;v 为运行速率;r 为轨道半径.

若认为卫星只受地球引力的作用,地球的引力就是人造地球卫星做匀速圆周运动的向心力. 地球的引力可根据万有引力定律求得

$$F_2=G\frac{Mm}{r^2}=G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

由 $F_1=F_2$ 得

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}} \tag{2-5}$$

在半径等于地球半径的圆形轨道上运行的人造地球卫星所需要的速度,也就是发射这样的卫星所需要的速度,称为第一宇宙速度.

在地球表面有

$$G\frac{Mm}{R^2}=mg$$

令式(2-5)中 $h=0$,并将式(2-5)代入,即得第一宇宙速度为

$$v_1=\sqrt{Rg}$$

因为地球的半径为 $R=6.37\times10^6$ m,重力加速度为 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$,所以

$$v_1=7.9\times10^3\ \mathrm{m/s}$$

2.2.2　弹性力

拉伸或压缩的弹簧作用于物体的力、桌面作用于放在其上的物体的力、绳子作用于系在其末端的物体的力等都属于弹性力. 实际上,当两个物体直接接触时,只要物体发生形变,物体之间就产生一种相互作用力,并且在一定限度内,形变越大,力也越大,形变消失,力也随之消失. 这种与物体形变量有关的力就称为弹性力. 弹性力是一种接触力,其方向永远垂直于过两物体接触点的切面.

物体受力要发生形变,当力撤除后,物体若完全恢复到原来的形状,这种形变称为弹性形变. 当两个物体相接触并发生弹性形变时,由于物体都力图恢复其原来的形状,必定互施力于对方,这便产生了弹性力. 如果作用于物体的力超过一定限度,物体就不能完全恢复原状,这个限度称为弹性限度.

如图 2-9 所示,一个轻弹簧与物体 A 相连,弹簧的固有长度(原长)为 L_0,此时 A 位于点

O 处，在这个位置，弹簧对物体 A 不施力，点 O 称为平衡位置；现取其为坐标原点，且 x 轴的正方向向右. 在水平力的作用下，弹簧将被拉伸或压缩. 实验表明，在弹簧限度内，弹簧产生的弹性力大小与弹簧的形变量(拉伸量或压缩量)成正比，与形变量方向相反，即

$$f=-kx \tag{2-6}$$

式中，k 是弹簧的劲度系数，表示使弹簧产生单位长度形变所需施加的力的大小，它与弹簧的匝数、直径、线径和材料有关. 式(2-6)中的负号表示作用于物体的弹性力的方向与形变方向相反：当弹簧被拉伸时，$x>0$，则 $f<0$，表示弹性力 f 的方向沿着 x 轴的负方向；当弹簧被压缩时，$x<0$，则 $f>0$，表示弹性力 f 的方向沿着 x 轴的正方向.

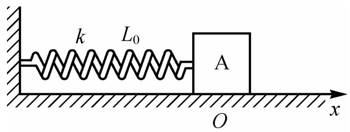


图 2-9

在国际单位制中，劲度系数的单位是牛顿/米(N/m).

重物压紧支撑面时，重物与支撑面都会因相互挤压而稍有变形，变形后的物体和支撑面都企图恢复原状而互相作用以弹性力，这就是发生在互相挤压的物体之间的挤压弹性力. 常把支撑面作用于物体的弹性力称为弹力或支持力；而把重物作用于支撑面的弹性力称为压力. 挤压弹性力最重要的特点是总与接触面或接触点的公切面垂直，因此又常称挤压弹性力为正压力. 物体悬挂在绳子末端，绳子发生形变，因而产生作用于物体的弹性力，这个弹性力的方向沿着绳子向上，称为张力.

2.2.3　摩擦力

摩擦力也是普遍存在的，并在我们的生活和技术中发挥着重要作用. 没有摩擦力的所谓理想光滑接触面，只是在一定条件下的理想化模型.

1. 静摩擦力

一般来说，在紧密接触的两物体具有相对运动的趋势，但还没有发生相对滑动时，它们之间便出现阻碍其相对滑动的力，这个力就称为静摩擦力. 静摩擦力的大小与外力的大小相等，方向总是沿着接触面与接触面的相对滑动趋势的方向相反. 所谓相对滑动趋势的方向就是指假如没有静摩擦力存在时，两物体接触面将发生相对滑动的方向.

当我们用力推动一个放在水平桌面上的物体时，物体并没有沿桌面滑动，仅有滑动的趋势. 物体不滑动，是由于在水平方向上，物体除了受到推力以外，还受到一个与推力大小相等、方向相反的静摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的作用，如图 2-10 所示，这两个力的合力为零，所以物体保持静止. 当推力增大时，静摩擦力也随着增大，直到静摩擦力增大到最大值，若再继续增大推力，物体就开始在桌面上滑动了.

实验证明，最大静摩擦力 $\boldsymbol{f}_{\max}$ 的大小与支撑力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 的大小存在关系

$$f_{\max}=\mu_0 \cdot F_{\mathrm{N}} \tag{2-7}$$

式中 μ_0 称为静摩擦因数，是由两个物体表面状况和材料性质等因素所决定的，通常由实验测得. 所以，静摩擦力的大小由外力的大小决定，取值为 $0\sim f_{\max}$.

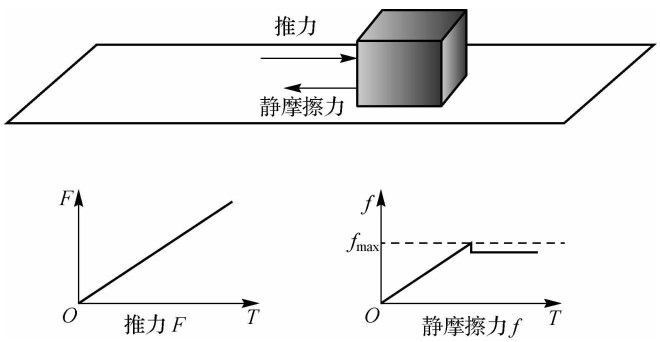


图 2-10

2. 滑动摩擦力

当一个物体在另一个物体的表面上滑动时，在接触面上所产生的摩擦力，称为滑动摩擦力. 实验表明，滑动摩擦力的大小也与支持力 $\boldsymbol{F}_N$ 的大小成正比，即

$$f=\mu F_N \tag{2-8}$$

式中，μ 称为滑动摩擦系数，其数值主要由接触面的状况和材料性质所决定. 对于给定的两个物体，其滑动摩擦系数 μ 要比其静摩擦系数 μ_0 略小. 在接触面情况相同、相对速度不太大的情形下，动摩擦力与相对速度几乎无关，且略小于最大静摩擦力. 通常就按两者相等来对待，若相对速度很大，则情况就不同了. 此时，动摩擦力就远大于最大静摩擦力了.

实验还表明，当两个物体的接触面不是很大或很小时，摩擦系数几乎与接触面积无关. 作为一种粗糙模型，在计算时可以认为滑动摩擦系数等于静摩擦系数.

除了滑动摩擦外，还有滚动摩擦. 当一个物体在另一个物体表面滚动时，所产生的摩擦称为滚动摩擦. 滚动摩擦力比滑动摩擦力小很多，在工农业生产中，许多转动部位安装的滚动轴承，就是利用滚动摩擦力很小的特点来减小轴与轴承之间的摩擦的.

例 2-8　质量分别为 m_A 和 m_B 的两个物体 A 和 B 叠放在水平桌面上，如图 2-11(a)所示. A 与 B 之间的最大静摩擦系数为 μ_1，B 与桌面的滑动摩擦系数为 μ_2，现用水平向右的力 $\boldsymbol{F}$ 拉物体 B，试求当 A、B 之间无相对滑动并以共同的加速度向右运动时 $\boldsymbol{F}$ 的最大值.

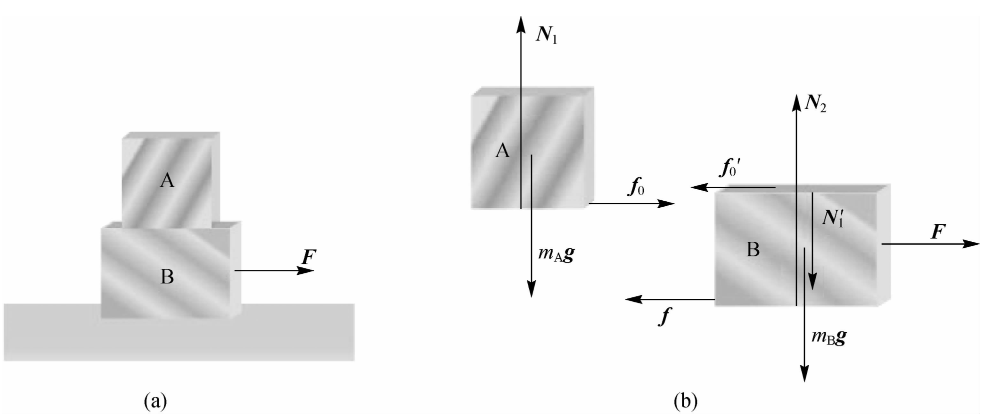


图 2-11

解：分别取 A 和 B 为研究对象. 物体 A 受 3 个力作用：重力 $m_A\boldsymbol{g}$，竖直向下；物体 B 对它的支持力 $\boldsymbol{N}_1$，竖直向上；使物体 A 获得向右加速度的力，是 B 作用于 A 的静摩擦力 $\boldsymbol{f}_0$，方向

与 A 相对于 B 的运动趋势的方向相反，即向右.

物体 B 受 6 个力作用：重力 $m_B\boldsymbol{g}$，竖直向下；桌面的支持力 $\boldsymbol{N}_2$，竖直向上；A 对 B 的正压力 $\boldsymbol{N}_1'$，它与作用于 A 的支持力 $\boldsymbol{N}_1$ 大小相等，方向相反，即竖直向下；有相对于 A 向右运动的趋势，因而受到 A 给予的向左的静摩擦力 $\boldsymbol{f}'_0$，它与作用于 A 的 $\boldsymbol{f}_0$ 大小相等，方向相反；B 相对于桌面向右滑动，因而受到桌面给予的向左的滑动摩擦力 $\boldsymbol{f}$；外力 $\boldsymbol{F}$，水平向右.

建立坐标系 Oxy，取 x 轴水平向右，取 y 轴竖直向上. 沿 x 轴的力，向右为正，向左为负；沿 y 轴的力，向上为正，向下为负. 根据牛顿第二定律和摩擦力的规律可以列出下面的方程式，对物体 A，其受力的大小符合下列方程：

$$f_0=m_Aa$$
$$N_1-m_Ag=0$$
$$f_0=\mu_1N_1=f_0'$$

对物体 B，其受力大小方程为

$$F-f-f_0'=m_Ba$$
$$N_2-N_1-m_Bg=0$$
$$f=\mu_2N_2$$

由以上方程式可以解得

$$F=(\mu_1+\mu_2)(m_A+m_B)g$$

由于在考虑 A、B 之间的摩擦力时，使用的是最大静摩擦力 $\boldsymbol{f}_0$ 和 $\boldsymbol{f}'_0$，所以上面求得的值是使 A、B 之间无相对滑动，且共同向右运动时的最大值.

若

$$F>(\mu_1+\mu_2)(m_A+m_B)g$$

则 A、B 之间必定出现相对滑动.

2.3　动量和动量定理

2.3.1　质点的动量定理

在上一节，我们主要考虑的是力的瞬时效果，物体在外力作用下立即产生瞬时加速度. 但是，我们常常分析讨论的问题是：当一个力作用于物体并维持一定时间，其效果将是什么？也就是说，我们关心的不是加速度，而是力对物体作用一段时间后物体的速度. 直接用牛顿定律的瞬时关系式解决这类问题还不够方便，最终都得借助于积分才能得出结果，这就自然而然地引出一个问题：有没有牛顿第二定律的积分形式，以利于这类问题的计算. 回答是肯定的，但对这类问题能够给出不止一种答案，这要看我们究竟是考虑力作用的时间效应还是空间效应. 不管是力的作用时间还是距离，现在我们将把注意力从力和运动的瞬时关系转向力和运动的过程关系.

1. 冲量

力在时间上的积分称为力的冲量，用 $\boldsymbol{I}$ 表示，可用数学表达式表示为

$$\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t \tag{2-9}$$

式中，冲量 $\boldsymbol{I}$ 为矢量，是力对时间的积累效应，它是过程量. 在国际单位制中，冲量的单位为

牛·秒(N·s).

2. 动量

在经典力学中物体的质量是恒定的,所以可以将牛顿第二定律做下面的演化:

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}$$

我们把质点的质量 m 与它的速度 $\boldsymbol{v}$ 的乘积 $m\boldsymbol{v}$ 定义为该质点的动量,并用 $\boldsymbol{p}$ 表示,可写为

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{p}$ 是矢量,方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同. $\boldsymbol{p}$ 是瞬时量和相对量. 在国际单位制中,动量单位为千克·米每秒,其符号是 kg·m/s. 引入动量之后,牛顿第二定律可以表示为

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{2-10}$$

在经典力学范围内,$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$与牛顿第二定律的常用形式 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 是一致的,适用于低速时质量与速度无关的情况,但当物体速度接近光速时,物体质量已明显地和速度有关,$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 已不再适用,而实验证明 $\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$仍然成立.

3. 动量定理

由式(2-10)可以得出

$$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

此式表明,$\mathrm{d}t$ 时间内质点所受合外力的冲量等于在同一时间内质点的动量的增量. 这一关系就是动量定理的微分形式. 如果在 t_1 到 t_2 的时间内质点的动量从 $\boldsymbol{p}_1$ 变为 $\boldsymbol{p}_2$,那么力在这段时间内的积累效应为

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\int_{p_1}^{p_2}\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1 \tag{2-11}$$

或

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1 \tag{2-12}$$

式(2-11)为动量定理的积分形式,它表明质点在 t_1 到 t_2 这段时间内所受合外力的冲量等于质点在同一时间内的动量的增量.

动量和冲量都是矢量,式(2-12)是矢量方程. 在处理具体问题时,常使用它的分量式,即

$$\boldsymbol{I}_x=\boldsymbol{p}_{2x}-\boldsymbol{p}_{1x}$$
$$\boldsymbol{I}_y=\boldsymbol{p}_{2y}-\boldsymbol{p}_{1y}$$
$$\boldsymbol{I}_z=\boldsymbol{p}_{2z}-\boldsymbol{p}_{1z}$$

上式表明,冲量在某个方向的分量等于在该方向上质点动量分量的增量,冲量在任一方向的分量只能改变自己方向的动量分量,而不能改变与它相垂直的其他方向的动量分量. 由此我们可以得到,如果作用于质点的冲量在某个方向上的分量等于零,尽管质点的总动量在改变,但在这个方向的动量分量却保持不变.

下面对动量定理做几点说明.

(1)如果 $\boldsymbol{F}$ 是方向和大小都改变的变力,则 $\boldsymbol{I}$ 的方向和大小都要由这段时间内所有微分冲量 $\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ 的矢量和来决定,而不能由某一瞬时的 $\boldsymbol{F}$ 来决定. 只有当 $\boldsymbol{F}$ 的方向恒定不变时,$\boldsymbol{I}$

才能和 $\boldsymbol{F}$ 同方向. 令人鼓舞的是,尽管外力在运动过程中时刻改变着,物体的速度方向可以逐点不同,却又总是遵循着动量定理,即不管物体在运动过程中动量变化的细节如何,冲量的大小和方向总等于物体始末动量的矢量差. 这便是应用动量定理解决问题的优点所在. 由于动量定理是一个矢量方程,在一般情况下,冲量的方向并不一定和质点的初动量或末动量方向相同. 帆船能够逆风行驶是这一结论的生动例证.

如图 2-12 所示,风从与船身成锐角 α 的方向吹来. 经验表明,只要帆的方位与帆形合适,帆船能在风力作用下逆风前行. 利用动量定理,就可解释这种貌似奇怪的现象. 设风的初速度为 $\boldsymbol{v}_0$,风吹到帆上后,由于帆的作用,速度变为 $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的大小相差不大,但方向却改变了. 根据动量定理,风所受帆的作用力 $\boldsymbol{F}$ 的方向应和风的速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向一致. 根据牛顿第三定律,风给帆的作用力 $\boldsymbol{F}'$ 应与 $\boldsymbol{F}$ 大小相等而方向相反,如图 2-12 所示,$\boldsymbol{F}'$ 在沿船身方向的分力将推动帆船前进.

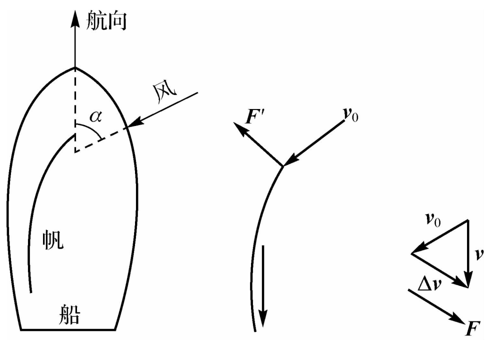


图 2-12

动量定理在碰撞或冲击问题中有重要的意义,它给我们带来不少方便. 在碰撞中,两物体相互作用的时间极为短促,只有 0.001 s,有的甚至更短一些. 并且,在这样短促的时间内,作用力迅速达到很大的量值,然后又急剧地下降为零,其情况如图 2-13 所示,这种力一般称为冲力,因为冲力是变力,它随时间变化的关系又比较难确定,所以表示瞬时关系的牛顿第二定律无法直接应用. 但是,根据动量定理,我们能够肯定冲力的冲量所具有的量值. 因为我们可以通过实验测出物体碰撞或冲击前后的动量,从而由动量差值来计算出冲量. 在图 2-13 中,$\overline{F}$ 表示变力 F(其方向是一定的)的平均大小,它是这样定义的:令虚线框的面积和变力 F 曲线下的面积相等,亦即 $\overline{F}$ 和作用时间 t_2-t_1 的乘积应等于变力 F 的冲量. 在一些实际问题中,冲量平均值的估算还是很必要的.

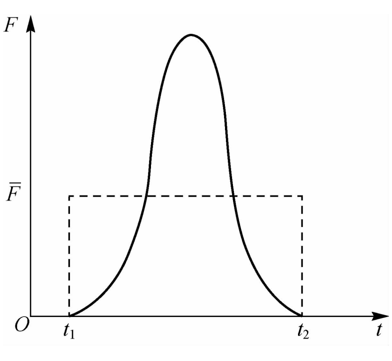


图 2-13

(2)我们曾经提到过,当物体的质量改变时,牛顿第二定律是不适用的,因为定律中的 m 是不变量. 但变质量的问题大量存在于实际生活中. 例如,滚雪球时雪球越滚越大;雨滴或冰雹在过饱和水汽中降落时,因水汽不断凝结其上而使质量变大;洒水车因喷出水来而质量变小. 这类现象组成了变质量物体的力学. 根据动量定理,我们可以建立变质量物体的运动方程.

(3)在牛顿力学中,描述物体运动必须选用惯性系.对于不同的惯性系,物体的速度是不同的.当然,物体的动量也随之不同,这就是动量的相对性.在应用动量定理时,物体的始末动量应由同一惯性系来确定.尽管对不同的惯性系,物体的动量是不同的,但是动量定理的形式却没有改变,这就是动量定理的不变性.也就是说,动量定理对所有的惯性系都是适用的.

2.3.2　质点系的动量定理

在实际情况中,我们需要研究多个有相互作用的物体的运动情况.此时,就可以把这些物体作为整体系统来研究,称为物体系.如果其中的每一物体都能抽象为质点,这就把物体系抽象为质点系了.我们把系统内各物体之间的相互作用力称为内力,而系统以外的物体对系统内任何物体的作用力称为系统所受的外力.

设系统含 n 个质点,第 i 个质点的质量和速度分别为 m_i、$\boldsymbol{v}_i$,对于第 i 个质点受合内力为 $\boldsymbol{F}_{i内}$,受合外力为 $\boldsymbol{F}_{i外}$,由牛顿第二定律有

$$\boldsymbol{F}_{i外}+\boldsymbol{F}_{i内}=\frac{\mathrm{d}(m_i\boldsymbol{v}_i)}{\mathrm{d}t}$$

对上式求和,有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{i外}+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{i内}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}(m_i\boldsymbol{v}_i)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}(m_i\boldsymbol{v}_i)$$

因为内力是由一对对的作用力与反作用力组成的,故 $F_{合内力}=0$,有

$$\boldsymbol{F}_{合外力}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}$$

式(2-11)可表示为

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_{合外力}\mathrm{d}t=\int_{p_1}^{p_2}\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1 \tag{2-13}$$

即

$$\boldsymbol{I}_{合外力}=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1$$

此即为质点系的动量定理,它表明作用于质点系的所有外力的矢量和的冲量等于质点系总动量的冲量.

例 2-9　质量为 m 的铁锤竖直落下,打在木桩上并停下.设打击时间为 Δt,打击前铁锤速率为 v,则在打击木桩的时间内,铁锤受平均合外力的大小为多少?

解:设竖直向下为正,由动量定理知

$$\bar{\boldsymbol{F}}\Delta t=0-m\boldsymbol{v}$$

$$\Rightarrow|\bar{\boldsymbol{F}}|=\frac{mv}{\Delta t}$$

例 2-10　一物体受合力为 $F=2t$(SI),做直线运动,试问在第二个 5 s 内和第一个 5 s 内物体受冲量之比及动量增量之比各为多少?

解:设物体沿 $+x$ 方向运动,有

$$I_1=\int_0^5F\mathrm{d}t=\int_0^5 2t\mathrm{d}t=25\ \mathrm{N\cdot s}\quad(\boldsymbol{I}_1\text{ 沿 }\boldsymbol{i}\text{ 方向})$$

$$I_2=\int_5^{10}F\mathrm{d}t=\int_5^{10}2t\mathrm{d}t=75\ \mathrm{N\cdot s}\quad(\boldsymbol{I}_2\text{ 沿 }\boldsymbol{i}\text{ 方向})$$

$$\Rightarrow I_2/I_1=3$$

因为

$$\begin{cases} I_2=(\Delta p)_2 \\ I_1=(\Delta p)_1 \end{cases}$$

所以

$$\frac{(\Delta p)_2}{(\Delta p)_1}=3$$

例 2-11　如图 2-14 所示，一弹性球，质量为 $m=0.020\ \mathrm{kg}$，速率 $v=5\ \mathrm{m/s}$，与墙壁碰撞后弹回. 设弹回时速率不变，碰撞前后的速度方向和墙的法线夹角都为 $\alpha=60°$. 求：

(1)求碰撞过程中小球受到的冲量 I；

(2)设碰撞时间为 $\Delta t=0.05\ \mathrm{s}$，求碰撞过程中小球受到的平均冲力 $\bar{F}$.

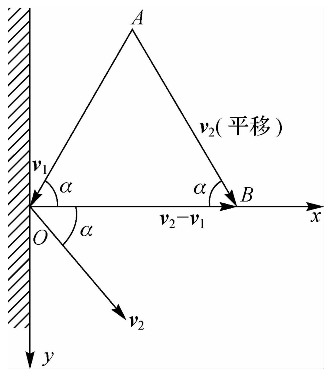


图 2-14

解：(1)如图 2-14 所取坐标，动量定理为 $\boldsymbol{I}=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1$

〈方法一〉用分量方程解：

$$\begin{cases} I_x=mv_{2x}-mv_{1x}=mv\cos\alpha-(-mv\cos\alpha)=2mv\cos\alpha \\ I_y=mv_{2y}-mv_{1y}=mv\sin\alpha-mv\sin\alpha=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I}=I_x\boldsymbol{i}=2mv\cos\alpha\boldsymbol{i}=2\times0.020\times5\times\cos 60°\boldsymbol{i}=0.10\boldsymbol{i}\ \mathrm{N\cdot s}$$

〈方法二〉用矢量图解：

$$\boldsymbol{I}=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1=m(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)$$

$(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)$如图 2-14 所示.

因为$\angle OBA=\alpha=60°$，所以$\angle A=60°$，故$\triangle OAB$ 为等边三角形.

$\Rightarrow|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1|=\boldsymbol{v}=5\ \mathrm{m/s}$，$(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)$沿 $\boldsymbol{i}$ 方向.

$\therefore I=m|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1|=0.020\times5=0.10\ \mathrm{N\cdot s}$，沿 $\boldsymbol{i}$ 方向.

(2)$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}\Delta t$

$\Rightarrow\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}/\Delta t=0.10\boldsymbol{i}/0.05=2\boldsymbol{i}\ \mathrm{N}$

2.4　动量守恒定律及其应用

2.4.1　动量守恒定律

动量守恒定律是自然界的普遍规律. 我们根据系统质心运动规律，可以很容易地导出系统动量守恒必须满足的条件. 如果质点系所受外力的矢量和为零，即

$$\boldsymbol{F}_{合外力}=0 \tag{2-14}$$

式(2-14)表明的内容即为动量守恒定律：如果质点系所受合外力为零，则质点系的总动量保持不变.

关于动量守恒定律有以下几点说明：

(1)在理解动量守恒定律时，一定要注意动量的矢量性. 我们所说的质点系的总动量是指系统中所有质点动量的矢量和. 系统的总动量保持不变，既不是指系统中每个质点动量的大小保持不变，更不是指系统中各质点动量大小之和保持不变. 在总动量不变的情况下，系统内部质点间可以通过内力的作用实现动量的相互转移.

(2)系统动量守恒定律的条件是 $\boldsymbol{F}_{合外力}=0$，而不必知道系统内部质点间相互作用的细节. 要符合这个条件，大致有三种情况：一是没有外力作用；二是有外力作用，但合外力为零；三是有外力作用，但当外力的大小与内力相比可以忽略时(如冲击或碰撞的过程)，也可以用动量守恒定律处理问题.

(3)动量守恒定律表达式是一个矢量式，可以写成在直角坐标系中的分量式：

$$若\ F_{合外力x}=0，则\ p_x=p_{0x}=常量$$
$$若\ F_{合外力y}=0，则\ p_y=p_{0y}=常量$$
$$若\ F_{合外力z}=0，则\ p_z=p_{0z}=常量$$

由上式可以看出，有时虽然质点系所受外力的矢量和不等于零，但可以适当选择坐标轴的取向，使一个或两个方向上合外力等于零，那么在这一个或两个方向上，质点系总动量的分量保持恒定，即动量守恒定律成立，从而使问题得以简化.

(4)动量守恒定律是自然界中最重要的基本规律之一. 无论是宏观系统还是微观系统，无论是低速领域还是高速领域，只要没有外力作用，系统的总动量一定保持不变.

(5)应用动量守恒定律时，还需要注意的是，表达式中的各物理量是相对于同一参考系的.

动量守恒定律不仅适用于力学，也适用于物理学的其他领域. 将动量守恒定律应用于力学以外的领域，不仅出现一系列重大发现，而且使定律自身的概念得以发展和完善.

例如，原子核在 β 衰变中，放射出一个电子后自身转变为一个新原子核. 如果衰变前原子核是静止的，根据动量守恒定律，新原子核必定在射出电子相反方向上反冲，以使衰变后总动量为零. 但在云室照片上发现，两者的径迹不在一条直线上. 是动量守恒定律不适用于微观粒子，还是有什么别的原因？泡利为解释这种现象，于 1930 年提出中微子存在的假说，即在 β 衰变中除了放射出电子外还产生一个中微子，它与新原子核和电子共同保证了动量守恒定律的成立. 26 年后，他终于在实验中找到了中微子，动量守恒定律也经受了一次重大的考验.

如果只考虑电磁相互作用，两个运动带电粒子的总动量并不守恒. 若把动量的概念推广到电磁场，即认为电磁场具有动量，运动带电粒子在运动时要激发电磁场，当把这部分由电磁场所携带的动量考虑在内，运动带电粒子的总动量仍然是守恒的. 动量的概念已扩展到了光学领域. 从光的电磁本性看，光属于电磁波，电磁波就是电磁场的交替激发和传播，电磁场具有动量，光自然具有动量. 从光的粒子性看，光是光子流，每个光子都具有确定的动量. 所以，涉及光的过程都必定伴随动量的传递，并服从动量守恒定律.

例 2-12　如图 2-15 所示，质量为 m' 的人手里拿着一个质量为 m 的物体，此人以与水平方向成 α 角的速率 v 向前跳去. 当他达到最高点时，他将物体以相对于人为 u 的水平速率向

后抛出，问：由于人抛出物体，他跳跃的距离增加了多少？（假设人可视为质点）

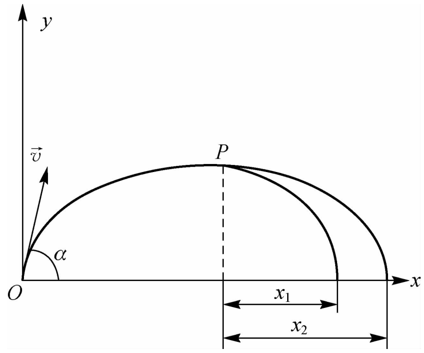


图 2-15

解：如图 2-15 所示，设 P 为抛出物体后人达到的最高点，x_1、x_2 分别为抛出物体前后跳跃的距离.

研究对象：人、物体组成的系统.

因为该系统在水平方向上合外力等于零，所以在水平方向上系统的动量分量守恒.

设在 P 点，人抛出物体前后相对地的速度分别为 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{v}_1$，在 P 点抛出物体后物体相对地速度为 $\boldsymbol{v}_2$，有

$$(m'+m)\boldsymbol{v}=m'\boldsymbol{v}_1+m\boldsymbol{v}_2=m'\boldsymbol{v}_1+m(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u})$$

标量式为

$$(m'+m)v=m'v_1+m(v_1-u)$$

即

$$(m'+m)v_0\cos\alpha=(m'+m)v_1-mu$$

得

$$v_1=v_0\cos\alpha+\frac{m}{m'+m}u$$

$$\Delta x=x_2-x_1=(v_1-v_0\cos\alpha)t=\frac{m}{m'+m}u\cdot\frac{v_0\sin\alpha}{g}=\frac{muv_0\sin\alpha}{(m'+m)g}$$

例 2-13　如图 2-16 所示，一质量为 m 的平板车以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 沿平直轨道运动，质量为 M 的人以相对于车的速度 $\boldsymbol{v}_r$ 从车的后端向前行走，求此时平板车的速度（不计车与轨道之间的摩擦力）.

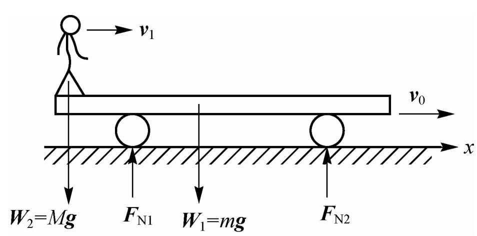


图 2-16

解：以人与车组成的系统作为研究对象. 系统所受的外力为：重力 $\boldsymbol{W}_1=m\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{W}_2=M\boldsymbol{g}$，轨道支持力 $\boldsymbol{F}_{N1}$、$\boldsymbol{F}_{N2}$，它们皆沿垂直于地面的方向.

由于系统在水平方向不受外力作用，人与车之间的摩擦力是系统的内力，不改变整个系统的动量.

因此,系统在水平方向的动量守恒.沿水平轨道取 x 轴,则人走动前的系统动量为

$$p_0=(M+m)v_0$$

人在走动时,相对于地面的速度为 $v_a=v+v_r$,方向沿 x 轴正方向.这里,v 就是人走动时平板车的速度,就是我们所要求的.这时,系统的动量为

$$p_x=mv+M(v+v_r)=(M+m)v+Mv_r$$

按系统沿 x 轴方向的动量守恒定律,有

$$(M+m)v_0=(M+m)v+Mv_r$$

由此得人走动时平板车的速度为

$$v=v_0-\frac{Mv_r}{M+m}$$

例 2-14　如图 2-17 所示,小游船靠岸时速度已几乎减为零,坐在船上远离岸一端的一位游客站起来走向船靠近岸的一端准备上岸.设游人体重 $m_1=50$ kg,小游船重 $m_2=100$ kg,小游船长 $L=5$ m,问游人能否一步跨上岸(水的阻力不计).

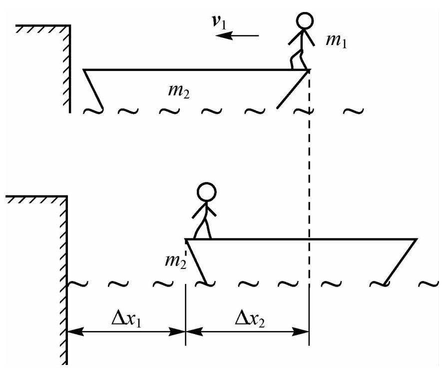


图 2-17

解:由图 2-17 可以看出,将游客与小游船视作一个系统,该系统水平方向不受外力作用,动量守恒.设游客速度为 $\boldsymbol{v}_1$,游船速度为 $\boldsymbol{v}_2$,则

$$m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2=0$$

当游客走到船靠近岸一端时,游客对岸行走了 Δx_1 距离,小游船对岸行走了 Δx_2 距离.

$$\Delta x_1=\int_{\Delta t}v_1\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta x_2=\int_{\Delta t}v_2\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta x_2=L-\Delta x_1$$

联立求解上式,可得小游船已离岸距离为

$$\Delta x_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot L=\frac{50}{50+100}\times 5=1.67\ \mathrm{m}$$

可见游客要想一步跨上岸是很困难的,最好用缆绳先将船固定住,游人再登陆上岸.

2.4.2　火箭飞行

我国是发明火箭最早的国家,随着火药的出现,在公元 9、10 世纪,我国就开始把火药用到军事上.公元 1232 年,古人已在战争中使用了真正的火箭.当时甚至有人利用 47 枚大火

箭，做推动座椅飞行的试验. 我国南宋时就有作为烟火玩物的“起火”，明代对多箭头的火箭及称为“火龙出水”的二级火箭已有书籍记载. 1990 年 4 月 7 日，我国成功地将亚洲 1 号通信卫星送入太空，说明我国运载火箭技术成熟可靠. “长征二号”是我国独立研制的多用途三级火箭，它长 43.25 m，最大直径 3.35 m. 起飞质量约为 202 t，起飞推动力 248 t，可将 1.4 t 重的卫星送入离地约3.6 km 的地球同步转移轨道，有效载荷能力居世界第四位. 2005 年 11 月 26 日，在北京人民大会堂举行庆祝神舟六号载人航天飞行圆满成功的大会上，胡锦涛说：“中国仅用两年的时间就实现了从‘一人一天’（杨立伟）到‘多人多天’（费俊龙、聂海胜）的大跨度，标志着中国在发展载人航天技术方面取得了又一个具有里程碑意义的重大胜利.”

火箭是一种利用燃料燃烧后喷出的气体产生反冲推力的发动机. 它自带燃料与助燃剂，因而可以在空间任何地方发动. 火箭技术在近代有很大发展，火箭炮及各种各样的导弹都利用火箭发动机作动力. 空间技术发展更以火箭技术为基础，各式各样的人造地球卫星、飞船和空间探测器都是靠火箭发动机发射并控制航向的.

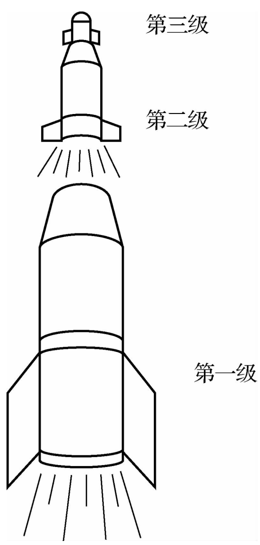


图 2-18

现代火箭飞行时，在其飞行的相反方向上不断地喷出大量高速气体，使火箭在飞行方向上获得很大的动量，从而获得很大的前进速度. 在同样的条件下，如果火箭的喷气速度越大，火箭所能达到的速度也就越大；如果火箭的质量比越大，火箭所能达到的速度也就越大. 因此，要提高火箭的速度，可采用提高喷气速度和质量比的办法. 但目前这两种办法在技术上都有困难. 所以，一般都采用多级火箭来达到提高速度的目的.

所谓多级火箭是由几个火箭连接而成的系统，图 2-18 所示是三级火箭示意图. 火箭起飞时，第一级火箭的发动机开始工作，推动系统前进. 当第一级的燃料燃尽后，第二级火箭的发动机就开始工作，并自动脱落第一级火箭的外壳，因此第二级火箭在第一级火箭的基础上进一步加速. 如此继续，火箭将达到所需要的最终速度. 前一级火箭外壳的脱落，使下一级火箭负担减轻，实际上也就是提高了质量比，因此相比携带同样多燃料的单级火箭来说，多级火箭能达到更大的最终速度.

2.5　功和功率

前面所介绍的动量定理是从力在时间上累积的角度研究力作用的效果. 本节将从力在空间累积作用的角度，研究力与质点运动状态变化的关系. 首先介绍两个物理量，即力的功和物体的动能，然后在此基础上讨论动能定理的内容及应用.

2.5.1　功

1. 恒力对直线运动物体所做的功

一个物体受到力的作用，如果在力的方向上发生一段位移，这个力就对物体做了功. 力和物体在力的方向上发生的位移，是做功的两个不可缺少的因素. 如果质点在恒定力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿直线运动，运动的位移为 $\boldsymbol{r}$，力与位移的夹角为 θ，如图 2-19 所示，那么在此过程中力 $\boldsymbol{F}$ 对质点所做的功可表示为

$$W=Fr\cos\theta \tag{2-15}$$

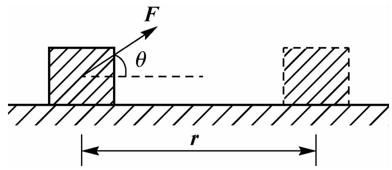


图 2-19

力对物体所做的功,等于力的大小、力作用点位移的大小及力与位移之间夹角余弦的乘积.

功是一个标量,即只有大小和正负,而不具方向性. 由式(2-15)可知,若力为零,或虽有力的作用但质点没有位移,功都等于零. 另外,若力和位移虽然都不为零,但力的方向与位移的方向相垂直,即 $\theta=\frac{\pi}{2}$,力的功也为零. 例如,沿水平方向运动的物体,重力不做功,做曲线运动的物体,向心力或法向力不做功.

当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 时,$W>0$,力 F 对物体做正功;当 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时,$W<0$,力 F 对物体做负功;当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,力 F 对物体不做功.

在国际单位制中,功的单位是焦耳(J),简称焦. 1 J 等于 1 N 的力使物体在力的方向上发生 1 m 的位移时所做的功,可以写成

$$1\ \mathrm{J}=1\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

考虑到力 $\boldsymbol{F}$、位移 $\boldsymbol{r}$ 都为矢量,则根据矢量标积的定义,式(2-15)可写为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} \tag{2-16}$$

值得注意的是,由于位移 $\boldsymbol{r}$ 是与参考系的选择有关的,因此功也与参考系的选择有关. 同一力对不同的参考系来说,其功可能为正,可能为零,也可能为负. 因此,在讨论力的功时,必须首先指明参考系.

2. 变力对曲线运动物体所做的功

上面讨论的是作用在沿直线运动的质点上的恒力的功,若作用在沿曲线运动的质点上的力为变力,则要采用微积分的思想和方法,计算质点沿任意曲线运动过程中变力的功.

设做曲线运动的质点 M 上作用有变力 $\boldsymbol{F}$,现在考虑质点沿曲线轨迹由 a 点运动到 b 点这一段上力 $\boldsymbol{F}$ 做的功,如图 2-20 所示. 在计算变力 $\boldsymbol{F}$ 在路程 ab 上所做的功时,我们可把 ab 分割成许多微小路程 $\mathrm{d}s$,与 $\mathrm{d}s$ 相应的微小位移为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. $\mathrm{d}s$ 足够小,在每一段微小路程上均可近似地看成直线,且与相应的微小位移(位移元)$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的大小相等;每一段微小路程上,力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向可近似地看作恒力. 根据恒力功的计算方法,力 $\boldsymbol{F}$ 在位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 上的功为

$$\mathrm{d}W=F|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\theta=F\cos\theta|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$$

式中,$\mathrm{d}W$ 为力 $\boldsymbol{F}$ 在位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 上的元功;θ 为力 $\boldsymbol{F}$ 在位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 之间的夹角.

从 a 点至 b 点,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功应为每段位移元上力所做元功的总和,则有

$$W=\int_a^b\mathrm{d}W=\int_a^b\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_a^bF\cos\theta\mathrm{d}r \tag{2-17}$$

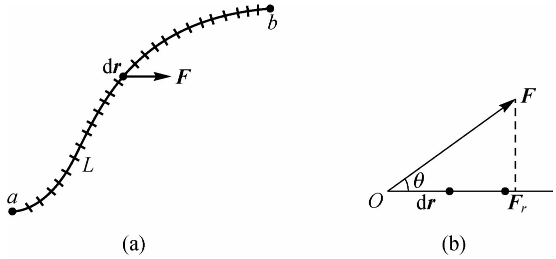


图 2-20

3. 合力的功

如果物体同时受到 n 个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 的作用，物体移动一段路程，此段路程上合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n$ 所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b (\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= W_1+W_2+\cdots+W_n \end{aligned} \tag{2-18}$$

可见，求合力的功有两种方法：一是先求出合力，再求合力的功；二是先求各分力的功，然后再求各功的代数和，从而得出合力的功.

2.5.2　功率

力在单位时间内所做的功称为功率，用符号 P 表示，若在 $\mathrm{d}t$ 时间内力所做的功为 $\mathrm{d}W$，则

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2-19}$$

即作用力对质点做功的瞬时功率等于作用力与质点在该时刻速度的乘积.

式(2-19)表明，对于一定功率的机械，当速率小时，力就大；当速率大时，力必定小. 例如，当汽车发挥最大功率行驶时，在平坦的路上所需要的牵引力较小，可高速行驶；在上坡时所需要的牵引力较大，必须放慢速度.

在国际单位制中，功率的单位为瓦特(W).

$$1\ \mathrm{W}=1\ \mathrm{J/s}$$

有时功也用功率与时间的乘积千瓦小时(kW·h)为单位. 1 kW·h 表示以 1 kW 的恒定功率做功的机械，在 1 h 内所完成的功，它与焦耳的关系为

$$1\ \mathrm{kW\cdot h}=3.6\times10^6\ \mathrm{J}$$

例 2-15　如图 2-21 所示，一个质量 $m=2$ kg 的物体，受到与水平方向成 37°角斜向上方的拉力 $\boldsymbol{F}=10$ N，在水平地面上移动的距离 $s=2$ m. 物体与地面间的动摩擦因数 $\mu=0.3$. 求：

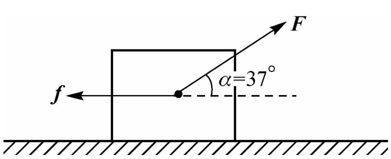


图 2-21

(1)拉力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功；

(2)摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 对物体所做的功；

(3)外力对物体所做的总功.

解：从题意可知，拉力做正功，摩擦力做负功，重力与支持力不做功. 可得各力对物体做的功及合力的功分别为

(1)$W_F = Fs\cos\alpha = 10\times2\times\cos 37° = 16\ \mathrm{J}$

(2)$W_f = fs\cos 180° = -\mu mgs = -0.3\times2\times10\times2 = -12\ \mathrm{J}$

(3)$W = W_F + W_f = 16 - 12 = 4\ \mathrm{J}$

例 2-16　如图 2-22 所示，一对质量分别为 m_1 和 m_2 的质点，彼此之间存在万有引力的作用. 设 m_1 固定不动，m_2 在 m_1 的引力作用下由 a 点经某路径 l 运动到 b 点. 已知 m_2 在 a 点和 b 点时距 m_1 分别为 $\boldsymbol{r}_a$ 和 $\boldsymbol{r}_b$，求万有引力所做的功.

解：在图中，取 m_1 为坐标原点，某时刻 m_2 对 m_1 的位矢为 $\boldsymbol{r}$，引力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 方向相反. 当 m_2 在引力作用下完成元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 时，引力做的元功为

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = G\frac{m_1m_2}{r^2}|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\theta$$

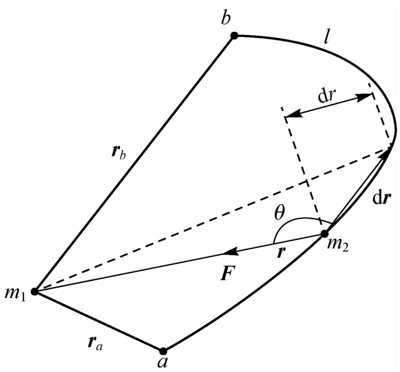


图 2-22

由图可见，$\mathrm{d}r = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\theta = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos(\pi-\theta) = \mathrm{d}r$（这个式子在物理学的数学计算中是非常重要的，我们今后常常会碰到这种类似的微元关系），此处 $\mathrm{d}r$ 为位矢大小的增量（不是位移的大小），故上式可以写为

$$\mathrm{d}W = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\mathrm{d}r$$

这样，质点由 a 点运动到 b 点引力做的总功为

$$W = \int \mathrm{d}W = -\int_{r_a}^{r_b} G\frac{m_1m_2}{r^2}\,\mathrm{d}r = -Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

例 2-17　已知弹簧的劲度系数 $k=200$ N/m，若忽略弹簧的质量和摩擦力，求将弹簧压缩 10 cm 弹性力所做的功和外力所做的功.

解：这是变力做功的例子. 取弹簧未被压缩时自由端的位置为坐标原点，建立坐标系，如图 2-23 所示. 弹簧的弹性力可表示为

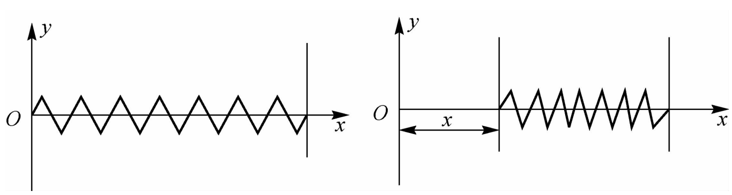


图 2-23

$$\boldsymbol{F}=-kx\boldsymbol{i}$$

式中的负号表示弹性力的方向与端点位移的方向相反. 先将弹簧的自由端压缩到 x 处，若继续使自由端做位移 $\mathrm{d}x$，弹性力所做的元功则为

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-kx\boldsymbol{i}\cdot\mathrm{d}x\boldsymbol{i}=-kx\mathrm{d}x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$$

将弹簧压缩 10 cm 弹性力所做的总功为

$$W=\int\mathrm{d}W=\int_0^{0.1}-kx\,\mathrm{d}x=-1.0\ \mathrm{J}$$

式中的负号表示在这种情况下弹性力做负功，也就是说外力克服弹簧的弹性力而做功. 外力当然做正功，即

$$W'=-W=1.0\ \mathrm{J}$$

2.6　动能　动能定理

2.6.1　动能

物体由于运动而具有的能量称为动能，动能是描述物体机械运动的另一个重要物理量. 物体做机械运动而具有的能量称为动能，记作 E_{k}，表示为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2 \tag{2-20}$$

式中，m 为质点的质量；v 为质点的速率. 动能的单位与功相同，在国际单位制中都是焦耳，符号为 J. 这是因为 $1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2=1\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}=1\ \mathrm{J}$. 但两者意义不一样，功是力的空间累积，与过程有关，是过程量；动能则取决于物体的运动状态，或者说是物体机械运动状态的一种表示，因此是状态量，也称为状态函数.

质点组动能定义为系统中各质点动能之和(代数和). 数学表达式为

$$E_x=\sum E_{\mathrm{k}i}=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2 \tag{2-21}$$

从式(2-20)、式(2-21)我们可以看到，研究对象的总动能常用 E_{k} 表示，而对系统中各个质点的动能则使用下标 i 来区分.

2.6.2　动能定理

1. 质点的动能定理

如图 2-24 所示，一质量为 m 的质点在合外力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，自点 A 沿曲线移动到点 B，则合力做的功为

$$\begin{aligned}W&=\int_A^B\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_A^BF\cos\theta\mathrm{d}s=\int_A^BF_t\mathrm{d}s\\&=\int_A^Bma_t\mathrm{d}s=\int_A^Bm\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v\mathrm{d}t=\int_{v_A}^{v_B}mv\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2\end{aligned} \tag{2-22}$$

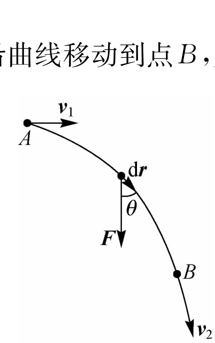


图 2-24

式(2-22)表明：作用在质点上的合力所做的功等于质点动能的增量，即为动能定理.

(1)动能定理反映了功和能之间的关系,动能与功是概念不同的两个物理量,动能是质点运动状态的单值函数,即在每个运动状态,都对应有唯一的动能值. 而功是过程的函数,对某一个运动过程,才有功可言. 功是能量改变的量度,功不是能.

(2)由动能定理可知,可以由质点动能的变化来求合力的功,这是求功的另一种方法.

(3)动能和动量虽然都与物体的质量、速度有关,但是它们的意义和作用各不相同,动能的变化与合外力的功相联系,动量的变化与合外力的冲量相联系;动能是标量,动量是矢量.

(4)动能定理是力的空间积累作用所遵守的规律. 定理中的功是合外力的功.

2. 质点系的动能定理

一切外力所做功与一切内力所做功的代数和等于质点系动能的增量,称为质点系动能定理. 数学表示式为

$$W_{外}+W_{内}=E_{k2}-E_{k1} \tag{2-23}$$

式中,$W_{外}$ 为系统所受外力做功的和,即合外力的功;$W_{内}$ 为系统所受内力做功的和,即内力的功;E_{k2} 为末态各质点动能之和,即系统的末态动能;E_{k1} 为初态各质点动能之和,即系统的初态动能.

质点系的动能定理指出,系统的动能既可以因为外力做功而改变,也可以因为内力做功而改变,这与质点系的动量定理和质点系的角动量定理不同,一对内力由于作用时间相同,其冲量之和必为零,又由于对同一参考点的力臂相同,其冲量矩之和也必为零,因此内力不改变系统的总动量和角动量. 但是通过讨论一对内力做功可知,它的做功并不一定为零(取决于两质点的相对位移),因此内力的功能改变系统的总动能. 例如,飞行中的炮弹发生爆炸,爆炸前后系统的动量是守恒的,但爆炸后各碎片的动能之和必定远远大于爆炸前炮弹的动能,这就是爆炸时内力(炸药的爆破力)做功的原因.

例 2-18　力 $\boldsymbol{F}=6t\boldsymbol{i}$(SI)作用在 $m=3$ kg 的质点上. 物体沿 x 轴运动,$t=0$ 时,$v_0=0$. 求前 2 s 内力 $\boldsymbol{F}$ 对 m 做的功.

解:(1)研究对象:m.

(2)直线问题,$\boldsymbol{F}$ 沿 $+x$ 轴方向.

〈方法一〉按 $W=\int_a^b \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 有

$$W=\int_a^b 6t\boldsymbol{i}\cdot \mathrm{d}x\boldsymbol{i}=\int_a^b 6t\mathrm{d}x$$

因为 $F=ma=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=6t$,

所以 $m\mathrm{d}v=6t\mathrm{d}t$,

做如下积分

$$3\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t 6t\mathrm{d}t$$

有

$$v=t^2$$

因为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v=t^2$,即 $\mathrm{d}x=t^2\mathrm{d}t$,

所以 $W=\int_0^2 6t\cdot t^2\mathrm{d}t=\dfrac{3}{2}t^4\Big|_0^2=24\ \mathrm{J}$

〈方法二〉用动能定理有

$$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times(2^4-0)=24\ \mathrm{J}$$

例 2-19　质量为 m_B 的木板静止在光滑桌面上，质量为 m_A 的物体放在木板 B 的一端. 现给物体 A 一初始速度 v_0 使其在 B 板上滑动，如图 2-25 (a)所示，设 A、B 之间的摩擦因数为 μ，$m_A=m_B$，并设 A 滑到 B 的另一端时 A、B 恰好具有相同的速度，求 B 板的长度及 B 板走过的距离(A 可视为质点).

解：A 向右滑动时，B 给 A 一向左的摩擦力，A 给 B 一向右的摩擦力，摩擦力的大小为 $\mu m_A g$，将 A、B 视为一系统，摩擦力是内力，因此系统水平方向动量守恒，设 A 滑到 B 的右端时二者的共同速度为 v，有

$$m_A v_0=(m_A+m_B)v$$

解得

$$v=\frac{v_0}{2}$$

图 2-25

再对 A、B 系统应用质点系动能定理并注意到摩擦力的功是一对力的功，可设 B 不动，A 相对 B 移动的长度为 L，摩擦力的功应为 $-\mu m_A gL$，代入质点系动能定理有

$$-\mu m_A gL=\frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2-\frac{1}{2}m_A v_0^2$$

可得

$$L=\frac{v_0^2}{4\mu g}$$

为了计算 B 板走过的距离 Δx，再单独对 B 板应用质点的动能定理，此时 B 板受的摩擦力做正功 $\mu m_A g(L+\Delta x)$，则有

$$\mu m_A g(L+\Delta x)=\frac{1}{2}mv^2-0$$

得

$$\Delta x=\frac{v_0^2}{8\mu g}$$

例 2-20　质量为 10 kg 的物体做直线运动，受力与坐标关系如图 2-26 所示. 若 $x=0$ 时，$v_1=1$ m/s，试求 $x=16$ m 时，物体的运动速度是多少?

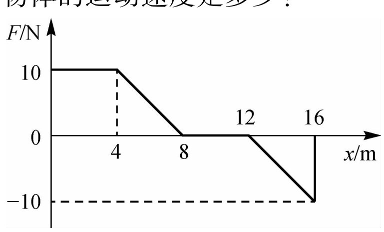


图 2-26

解:在 $x=0$ 到 $x=16$ m 过程中,外力功为 $W=$力曲线与 x 轴所围面积代数和$=40$ J. 由动能定理得

$$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

即

$$40=\frac{1}{2}\times 10v_2^2-\frac{1}{2}\times 10\times 1$$

$$\Rightarrow v_2=3\ \mathrm{m/s}$$

2.7 势能

2.7.1 保守力及其势能

一般情况下,$\boldsymbol{F}$ 所做的功不仅与力 $\boldsymbol{F}$ 及物体的初、末位置有关,而且与物体所经过的路径有关. 但是,有些力的功只与物体的初、末位置有关,而与物体所经过的实际路径无关,这种力称为保守力;不具备这种性质的力称为非保守力. 重力、万有引力、弹性力、电荷间相互作用的库仑力和原子间相互作用的分子力都是保守力;摩擦力则是典型的非保守力. 将物体由 a 点移动到 b 点,经历不同的路程,摩擦力做功不一样. 沿一个闭合路径移动物体一周,摩擦力做功也不等于零. 磁力和牵引力等也是非保守力.

当运动物体的始末位置确定时,不管它经过什么路径,保守力做的功都相等. 这说明物体位于保守力场中不同位置时是处于有着确定差别的不同状态的,这种差别由保守力的功表示. 人们用决定于位置的状态函数——势能(也称位能)来描述这种状态,用 E_{p} 来表示. 势能不像动能那样可以属于某一个质点独有,它属于整个质点系,一般情况下常说某物体具有多少势能,只是一种习惯上的简略说法. 势能可以转化成动能或其他形式的能量.

设物体在起点 a 和终点 b 的势能分别为 $E_{\mathrm{p}a}$ 和 $E_{\mathrm{p}b}$,保守力 $\boldsymbol{F}$ 做的功为 $A_{ab保}$,则规定

$$A_{ab保}=\int_a^b \boldsymbol{F}_{保}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-(E_{\mathrm{p}b}-E_{\mathrm{p}a})=-\Delta E_{\mathrm{p}} \tag{2-24}$$

式(2-24)说明:在系统由位置(相对位置)a 变化到位置 b 的过程中,保守力做的功等于系统势能的减少(或势能增量的负值). 式(2-24)是势能的定义式,亦可称作系统的势能定理,定理中的负号表示保守力做正功时系统的势能将减少.

由式(2-24)可知,势能的绝对值是没有物理意义的,只有势能差才有物理意义. 势能是由系统的位形决定的能量,因此势能只能是一个相对值,要确定系统处于某一位形(通常简称为物体在空间某点)的势能,需要选择一个参考位形(简称为参考点),这一参考点称为势能零点. 空间某点(某位形)r 的势能等于保守力由该点到势能零点做的功.

一个复杂的系统可能包含不止一种势能. 例如,一个竖直悬挂的弹簧振子就既有重力势能,又有弹性势能. 这时可以把各种势能的总和定义为系统的势能,势能定理依然成立.

势能和功的单位相同,也是焦(J).

2.7.2 万有引力势能

在太阳参考系中,考虑地球与月亮之间的相互作用,地月之间的相互作用力是万有引

力，即

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{2-25}$$

式中，M 和 m 分别为地球和月亮的质量；r 为地月间的距离，$\boldsymbol{r}$ 是地球指向月亮的单位矢量；G 为万有引力常数.

如图 2-27 所示，月亮在地球引力场中从初位置 a 经某路径 l 运动到位置 b，月亮处于初、末位置时对地球的距离分别为 r_a 和 r_b，由式(2-25)可得地月之间的位置从 a 变到 b 时，地月之间一对万有引力所做功之和即地球施加在月亮上的万有引力 $\boldsymbol{F}$ 对月亮所做功为

$$\begin{aligned}W_{ab}&=\int_a^b \mathrm{d}W=\int_a^b \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_{r_a}^{r_b} G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=-\int_{r_a}^{r_b} G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{GMm}{r_b}-\frac{GMm}{r_a}\end{aligned} \tag{2-26}$$

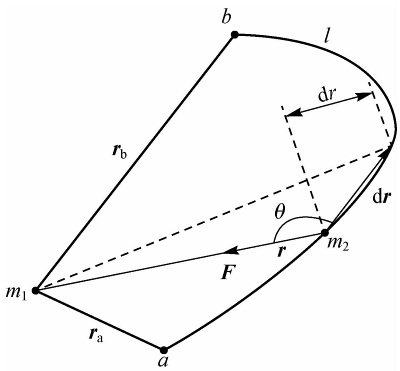


图 2-27

式(2-26)表明，地月之间一对万有引力所做功之和决定于地月之间的始末相对位置，与月亮的运动路径无关.

于是我们定义，万有引力势能(也用 E_p 表示)为

$$E_\mathrm{p}=-G\frac{Mm}{r} \tag{2-27}$$

显然，式(2-27)表示的万有引力势能的零点在两个质点的距离为无限大($r=\infty$)时，万有引力势能的势能曲线如图 2-28 所示.

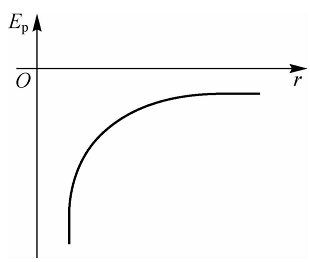


图 2-28

这样，将与初态位形相关的势能用 $E_{\mathrm{p}a}$ 表示，将与末态位形相关的势能用 $E_{\mathrm{p}b}$ 表示，重力

做功就可以表示为

$$A_{引}=(E_{pa}-E_{pb})=-(E_{pb}-E_{pa}) \tag{2-28}$$

计算万有引力势能是非常简单的. 只要确定了两个质点的距离,也就确定了它们的万有引力势能. 万有引力势能与势能零点的选取有关.

2.7.3　重力势能

重力是质点在地球表面附近受到的地球对它作用的万有引力. 如果质点的运动是在地球表面附近,它与地心之间的距离变化很小而可以认为是不变化的,因而重力被认为是一个恒力. 重力做功可以按如下方式来计算.

将地球与质点(物体)视为一个系统,重力是系统的一对内力,它的总功只和质点与地球的相对位移有关. 设地球不动,质量为 m 的物体在重力场中沿任一曲线从 a 点(高度 h_a)经路径 acb 到达 b 点(高度 h_b),如图 2-29 所示,重力所做的功为

$$\begin{aligned} A_{ab} &= \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b m\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_{h_a}^{h_b} -mg\,\mathrm{d}h = mg(h_a - h_b) \end{aligned} \tag{2-29}$$

重力所做的功也只与始、末两点的位置有关,与所经过的路径无关. 或者说在重力场中重力沿任一闭合路径的功等于零.

因此我们定义,重力势能(也用 E_p 表示)为

$$E_p=mgh \tag{2-30}$$

重力势能的势能曲线如图 2-30 所示.

这样,与初态位形相关的势能用 E_{pa} 表示,与末态位形相关的势能用 E_{pb} 表示,重力做功就可以表示为

$$A_{重}=(E_{pa}-E_{pb})=-(E_{pb}-E_{pa}) \tag{2-31}$$

式(2-31)也称势能定理.

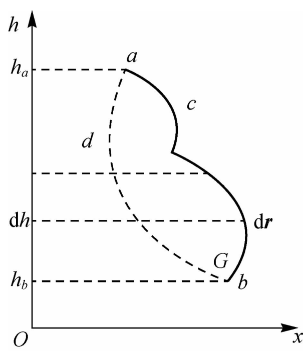


图 2-29

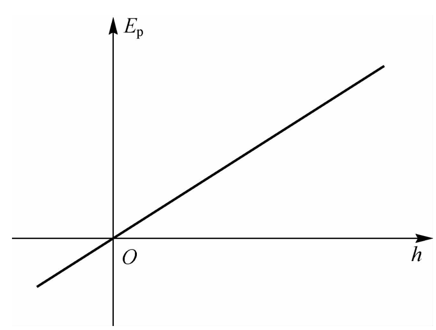


图 2-30

2.7.4　弹性势能

如图 2-31 所示,一水平放置的轻弹簧一端固定,另一端系一小球. 现让小球由 a 点沿 Ma 直线移动到 b 点. 沿 Ma 直线方向建立坐标 Ox,原点 O 选在弹簧的自然伸长处,x_a 和 x_b

分别是 a 点和 b 点的位置坐标，此时弹簧对小球的弹性力为

$$F=-kx \tag{2-32}$$

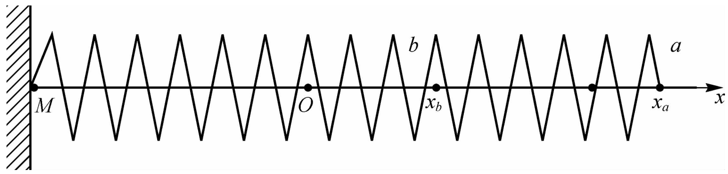


图 2-31

式中，k 为弹簧的劲度系数.

在小球由 a 点经直线移动到 b 点的过程中，弹簧弹性力对小球所做的功为

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_a}^{x_b} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_a}^{x_b} -kx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2 \end{aligned} \tag{2-33}$$

与重力做功类似，弹性力做功也是与做功路径无关的，不论物体由 x_a 点经历何种路径到达 x_b 点，弹性力做功都相同. 如果物体由 x_a 点出发经历任何闭合路径最后又回到 x_a 点，弹性力所做的功一定等于零.

因此我们定义，弹性势能(也用 E_p 表示)为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2 \tag{2-34}$$

特别要强调的是，式(2-34)隐含着 $x=0$ 的平衡位置是弹性势能的自然零点.

弹性势能的势能曲线如图 2-32 所示.

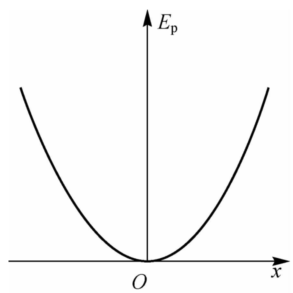


图 2-32

计算弹性势能的关键是确定物体离开平衡位置的距离 x 是多少，一旦 x 确定，弹性势能就确定了. 当然，弹性势能也是与势能零点的选取有关的.

例 2-21　若将质量 m 为 10 t 的登月舱构件从地面先发射到地球同步轨道站，再由同步轨道站装配发射到月球上. 已知：同步轨道半径为 r_1，地球半径为 R_e，月球半径为 R_m，地球质量为 M_e，地心到月心距离为 r_2，月球质量为 M_m. 其中，$R_e=6.37\times10^6$ m，$r_1=4.2\times10^7$ m，$R_m=1.74\times10^6$ m，$M_m=7.35\times10^{22}$ kg，$M_e=5.97\times10^{24}$ kg，$r_2=3.90\times10^8$ m，$G=6.67\times10^{-11}$ N·m²/kg². 求：

(1)若只考虑地球引力,上述两步发射中,火箭推力各做功多少?

(2)若同时考虑地球和月球的引力,上述两步发射中,火箭推力各做功多少?

解:如图 2-33 所示,这是一道功能转换题,牢记保守力的功等于势能增量的负值.

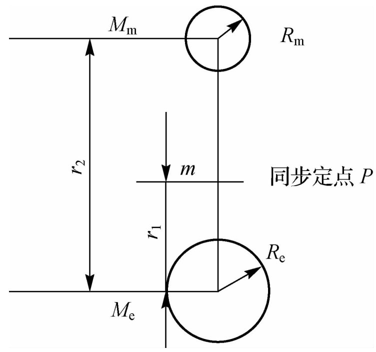


图 2-33

(1)只考虑地球引力,火箭推力做的功.

①登月舱位于 P 的势能为

$E_p=-GM_em/r_1$(以地心为零势能参考点)

②登月舱位于地球表面的势能为

$$E_{pe}=-GM_em/R_e$$

③登月舱位于月球表面的势能为

$$E_{pm}=-GM_mm/(r_2-R_m)$$

设 W_1 和 W_2 分别代表从地面到同步轨道和从同步轨道到月球表面火箭推力的功,则

$$W_1=-(E_p-E_{pe})=-GM_em\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=5.3\times10^{11}\ \text{J}$$

$$W_2=-(E_{pm}-E_p)=-GM_mm\left(\frac{1}{r_2-R_m}-\frac{1}{r_1}\right)=8.44\times10^{10}\ \text{J}$$

虽然从同步轨道到月球表面比其到地球表面远 9 倍,但是,W_2 比 W_1 小得多,这就是为什么要分两步运送登月舱的道理.

(2)考虑地球和月球引力,火箭推力做的功.

①登月舱位于 P 的势能

$$E_p=-GM_e\left(\frac{M_e}{R_e}+\frac{M_m}{r_2-R_e}\right)=-6.20\times10^{11}\ \text{J}$$

②登月舱位于地球表面的势能

$$E_{pe}=-GM_e\left(\frac{M_e}{r_1}+\frac{M_m}{r_2-r_1}\right)=-9.48\times10^{10}\ \text{J}$$

③登月舱位于月球表面的势能

$$E_{pm}=-GM_e\left(\frac{M_e}{r_2-R_m}+\frac{M_m}{R_m}\right)=-3.83\times10^{10}\ \text{J}$$

设 W_1 和 W_2 分别代表从地球表面到同步轨道和从同步轨道到月球表面火箭推力的功,则

$$W_1=E_{pe}-E_p=5.26\times10^{11}\ \text{J}$$

$$W_2=E_{pm}-E_{pe}=5.65\times10^{11}\ \text{J}$$

2.8 机械能守恒定律与能量守恒定律

2.8.1 功能原理

我们前边学习了质点系的动能定理为

$$W_{外}+W_{内}=E_{k2}-E_{k1}$$

式中,$W_{内}$ 为系统内各质点相互作用的内力做的功.由于内力分为保守内力和非保守内力,内力的功相应地分为保守内力的功 $W_{内保}$ 和非保守内力的功 $W_{内非保}$.因此也可写成

$$W_{外}+W_{内保}+W_{内非保}=E_{k2}-E_{k1}$$

由前面分析可知，保守力的功等于系统势能的减少量

$$W_{内保}=E_{p1}-E_{p2}$$

综合上面三式，并考虑到动能和势能都是系统因机械运动而具有的能量，统称为机械能，$E=E_k+E_p$，所以

$$W_{外}+W_{内非保}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})=E_2-E_1 \tag{2-35}$$

式(2-35)表达的这个规律称为功能原理. 它表明了外力与非保守力做功之和等于质点系机械能的增量.

关于功能原理，需要指出以下两点：

(1)在功能原理中引入了势能项，而势能仅对物体系才有意义，故功能原理属于物体系的规律.

(2)功能原理是从牛顿运动定律导出的，只适用于惯性系. 对于地球参考系(包括地面参考系和地心参考系)，功能原理虽然是近似的，但还是足够精确的.

质点系动能定理与功能原理在本质上是相同的，都是研究力做功与能量变化之间的关系；但二者之间又存在着区别，动能定理考虑动能的变化，而功能原理考虑机械能的变化；动能定理考虑所有力做的功，而功能原理不考虑保守内力做的功. 产生这样区别的原因是从不同的角度考虑保守内力的作用，动能定理考虑力所做的功，而功能原理考虑保守内力做功所对应的势能. 功能原理是机械运动的一个基本规律. 物理实验首先证实了它的正确性，上面的功能原理是从牛顿定律推导出来，可以认为是一个理论结果. 它们的一致性曾经是牛顿定律正确性的判据.

2.8.2　机械能守恒定律

若质点系只有保守内力做功，外力和非保守力不做功或者做功之和始终等于零，根据功能原理表达式，系统的机械能守恒，即

$$若\ W_{外}+W_{内非保}=0，则\ E_1=E_2=常数 \tag{2-36}$$

这就是著名的机械能守恒定律. 它指出：对于只有保守内力做功的系统，系统的机械能是一守恒量. 在机械能守恒的前提下，系统内各物体的动能和势能可以互相转化，系统各组成部分的能量可以互相转移，但它们的总和却保持不变.

那么系统势能与动能间的转换是通过什么途径或方式来实现的呢？可以证明势能与动能间的转换是通过保守内力做功实现的. 实际上，不仅在机械能范围内动能与势能之间的转换要靠功，各种不同形式的能量之间的转换也往往要靠功来实现. 因此说功是实现能量转换的一种方式，而保守力的功就是在机械范围内实现能量转换的方式或途径.

例 2-22　如图 2-34 所示，质量为 m 的物体，从 1/4 圆槽 A 点静止开始下滑到 B 点. 在 B 点处速率为 v，槽半径为 R. 求 m 从 A 点下滑到 B 点过程中摩擦力做的功.

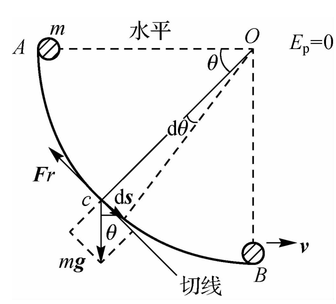


图 2-34

解：因为无非保守内力，所以 $W_{非保内}=0$，$\boldsymbol{F}_{外}$ 做功为$W_{外}=W_r$($\boldsymbol{N}$ 不做功且槽对地的力也不做功).

由　$W_{外}+W_{非保守}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$

有　$W_r+0=\left(\dfrac{1}{2}mv^2-mgR\right)-(0+0)$

即　$W_r=\dfrac{1}{2}mv^2-mgR$