

第 3 篇

电 磁 学

第 7 章

静 电 场

科学人物 高斯

约翰·卡尔·弗里德里希·高斯(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777—1855), 德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家, 有“数学王子”的美誉, 并被誉为历史上伟大的、最重要的数学家之一, 和阿基米德、牛顿、欧拉并列, 同享盛名。

高斯在物理学尤其是电磁学领域的杰出贡献是以他名字命名的高斯定理。在研究静电场相关问题时, 高斯定理是一个表征静电场性质的基本定理, 具有重要的理论意义和应用价值。

高斯说:“给我最大快乐的, 不是已获得的知识, 而是不断地学习; 不是已有的东西, 而是不断地获取; 不是已经达到的高度, 而是继续不断地攀登。”高斯凭借这种勇于探索、永不满足、勇于攀登的精神为自然科学诸多领域做出了杰出的贡献。



高斯

电磁运动是物质的一种基本运动形式。电磁相互作用是自然界中已知的四种基本相互作用之一。自然界中的所有变化几乎都与电和磁相联系。所以, 研究电磁运动对于深入认识物质世界是十分重要的。

一般来说, 运动电荷将同时激发电场和磁场, 电场和磁场是相互关联的。但是, 在某种情况下, 如当我们所研究的电荷相对某参考系静止时, 电荷在这个静止参考系中就只激发电场, 而无磁场。当然, 我们也可以认为静电场的理想化存在, 这是为了简化问题的讨论而假设的一个理想模型。这个电场(理想模型)就是本章所要讨论的静电场。

7.1 电荷 库仑定律

7.1.1 电荷

1. 电荷的概念

人们对于电的认识最初来自自然界中的雷电和摩擦起电现象, 在用丝绸摩擦过的玻璃棒中间用细线系上, 并将其水平地悬挂起来, 用另一根用丝绸摩擦过的玻璃棒去靠近它, 它

们将互相排斥；而以用毛皮摩擦过的硬橡胶棒去靠近它，它们将相互吸引。这说明，用丝绸摩擦过的玻璃棒和用毛皮摩擦过的硬橡胶棒都带有电荷，并且带有不同特性的电荷。人们把用丝绸摩擦过的玻璃棒所带的电荷，规定为正电荷；而把用毛皮摩擦过的硬橡胶棒所带的电荷，规定为负电荷。

大量实验证明，电荷只有正、负两种，同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引。美国物理学家富兰克林(B. Franklin)是第一个以正电荷、负电荷的名称来区分这两种电荷的科学家，这种命名法一直延用至今。

宏观带电体所带的电荷种类的不同根源在于组成它们的微观粒子所带的电荷种类不同：电子带负电荷，质子带正电荷，中子不带电荷。不带电的物体并非其中没有电荷，而是带有等量的异种电荷，因为正、负电荷互相中和，故物体不显电性，这种状态称为电中性。

物体所带电荷的多少称为电量。电量常用 Q 或 q 表示，在国际单位制中，它的单位为库仑，符号为 C。正电荷电量取正值，负电荷电量取负值。一个带电体所带总电量为其所带正、负电荷的代数和。

电子、质子和中子的电荷量和质量见表 7-1。

表 7-1 电子、质子和中子的电荷量和质量

项 目	电 荷 量 / C	质 量 / kg
电子(e)	$-1.602\ 177 \times 10^{-19}$	$9.109\ 389 \times 10^{-31}$
质子(p)	$1.602\ 177 \times 10^{-19}$	$1.672\ 623 \times 10^{-27}$
中子(n)	0	$1.672\ 623 \times 10^{-27}$

2. 电荷的量子性

实验证明，在自然界中，电荷的电量总是以一个基本单元的整数倍出现，电荷的这个特性称为电荷的量子性。电荷的基本单元(基元电荷)就是一个电子所带电量的绝对值，常以 e 表示。经测定，其值为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

任何物体所带电量一定是基元电荷的整数倍。微观粒子所带的基元电荷的数目(正整数或负整数)也称为它们各自的电荷数，都是正整数或负整数。

那么基元电荷 e 是不是最基本的呢？1964 年，美国科学家盖尔曼提出“基本粒子”的夸克模型，并预言夸克的电荷量应为 $\pm \frac{1}{3}e$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$ ，即夸克可带有分数电荷，尽管用这一模型对量子物理中的许多现象进行解释获得了很大的成功，但至今，在实验中仍未观测到自由夸克。

由于电荷的带电量 e 非常小，而在研究的宏观电磁现象中涉及的带电粒子的数目通常非常巨大，以致电荷的量子性表现不出来。电磁学理论主要讨论电磁现象的宏观规律，所涉及的电荷量远远高于基元电荷。所以我们研究问题时，只从平均效果上考虑，可以认为电荷连续地分布在带电物体上。

在研究实际问题时，如果带电体本身比所研究的问题中涉及的距离小很多，该带电体的形状对所讨论的问题没有影响或其影响可以忽略不计，该带电体就可以看作一个带电的点，称为点电荷。点电荷是一个很有用的理想模型，在研究问题时经常用到。

7.1.2 电荷守恒定律

大量实验证明:一个孤立系统的总电荷是不变的,即在任一时刻存在于系统中的正电荷与负电荷的代数和不变,这就是电荷守恒定律.它最早是由富兰克林提出的.

现代物理学的很多实验都证明了电荷守恒定律.例如,一个高能光子与一个重原子核作用时,该光子可以转化为一个正电子和一个负电子(称为电子对的“产生”);而一个正电子和一个负电子在一定条件下相遇,会同时消失而产生两个或三个光子(称为电子对的“湮灭”).在已观察到的各种过程中,正、负电荷总是成对出现或成对消失的.由于光子不带电,正、负电子又各带有等量异种电荷,所以这种电荷的产生和消失并不改变系统中的电荷数的代数和,因而电荷守恒定律仍然成立.

实验证明,一个电荷的电量与它的运动状态无关,在不同的参考系内观察,同一带电粒子的电量不变.电荷的这一性质称为电荷的相对论不变性.

近代科学实验证明,电荷守恒定律不仅在一切宏观过程中成立,而且被一切微观过程(如核反应和基本粒子过程)普遍遵守.电荷是在一切相互作用下都守恒的一个守恒量,电荷守恒定律是自然界中普遍的基本定律之一.

7.1.3 库仑定律

在发现电现象后的2 000多年内,人们对电的认识一直停留在定性阶段.从18世纪中叶开始,不少人着手研究电荷之间作用力的定量规律,最先是研究静止电荷之间的相互作用力.研究静止电荷之间的相互作用力的理论称为静电学.

1785年,当时还是陆军上校的法国物理学家库仑(Charles Augustin de Coulomb)利用他发明的精巧扭秤做了一系列的精细实验,定量测量了两个带电物体之间的相互作用力,总结出真空中点电荷间相互作用的规律,即库仑定律.

库仑定律的表述为:在真空中,两个静止的点电荷之间的相互作用力的大小与它们所带电荷电量的乘积成正比,与它们之间距离的平方成反比;作用力的方向沿着两点电荷的连线,同号电荷相互排斥,异号电荷相互吸引.

这一规律用矢量公式表示为

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} \quad (7-1)$$

式中, q_1 和 q_2 分别表示两个点电荷的电量; \mathbf{F}_{12} 表示电荷 q_2 受电荷 q_1 的作用力; r_{12} 表示两个点电荷之间的距离; \mathbf{e}_{12} 表示从电荷 q_1 指向电荷 q_2 的单位矢量; k 为比例常数,依公式中各量所选取的单位而定.

当两个点电荷 q_1 和 q_2 同号时, \mathbf{F}_{12} 与 \mathbf{e}_{12} 方向相同,表示电荷 q_2 受电荷 q_1 的斥力,如图7-1(a)所示;当两个点电荷 q_1 和 q_2 异号时, \mathbf{F}_{12} 与 \mathbf{e}_{12} 方向相反,表示电荷 q_2 受电荷 q_1 的引力,如图7-1(b)所示.由式(7-1)可以看出,两个静止的点电荷之间的作用力符合牛顿第三定律,即作用力与反作用力大小相等、方向相反.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

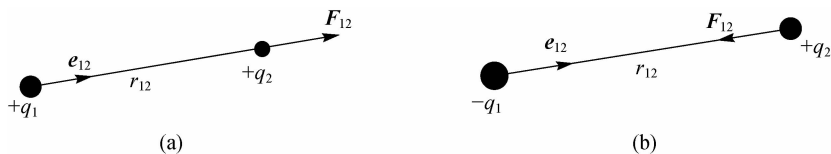


图 7-1

在国际单位制中,距离 r 的单位为 m ,力 F 的单位为 N ,实验测定比例常数 k 的数值和单位为

$$k = 8.988\ 0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

通常还引入另一常量 ϵ_0 来代替 k ,使

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

于是,库仑定律的数学表达式(7-1)可改写为

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} \quad (7-2)$$

这里引入的 ϵ_0 称为真空介电常量或真空电容率,在国际单位制中它的数值和单位为

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

在库仑定律表达式中引入 4π 因子的做法,称为单位制的有理化.这样做的结果虽然使库仑定律的形式变得复杂,但是却使以后经常用到的电磁学规律的表达式因不出现 4π 因子而变得简单.

例 7-1 按照量子理论,在氢原子中,核外电子快速地运动着,并以一定的概率出现在原子核(质子)周围各处,在基态下,电子在以质子为中心、半径 $r = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ 的球面附近出现的概率最大.试比较在基态下氢原子内电子和质子之间的静电力和万有引力的大小(引力常量为 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$).

解:按库仑定律和万有引力定律,电子与质子之间的静电力和万有引力的大小分别是

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

按表 7-1 的数据,电子和质子之间的静电力与万有引力的比值为

$$\frac{F_c}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2} = 2.26 \times 10^{39}$$

可见,在原子内,电子和质子之间的静电力远比万有引力大.因此,在处理电子和质子之间的相互作用时,万有引力可以略去不计.

例 7-2 万有引力总是吸引力,而两点电荷间的库仑力则或为吸引力或为排斥力.试比较质子和电子之间的万有引力与库仑力的大小.

解:质子电荷量为 e ,质量为 m_p ;电子电荷量为 $-e$,质量为 m_e .质子和电子之间的万有引力 F_g 和库仑力 F_c 分别为

$$F_g = G m_p m_e / r^2$$

$$F_c = e^2 / (r^2 4\pi\epsilon_0)$$

于是可得

$$\begin{aligned}\frac{F_g}{F_e} &= 4\pi\epsilon_0 G m_p m_e = \frac{6.7 \times 10^{11} \times 1.67 \times 10^{27} \times 9.11 \times 10^{-31}}{8.99 \times 10^9 \times (1.60 \times 10^{-19})^2} \\ &= 0.5 \times 10^{-39}\end{aligned}$$

计算表明,电子和质子间的万有引力和库仑力相比可忽略不计。

7.2 电场 电场强度

7.2.1 电场

库仑定律揭示了电荷之间相互作用的规律,提供了定量计算静电力的基本方法,但是并没有告诉我们电荷之间的相互作用是怎样传递的.力学中我们熟知的摩擦力、弹力都是接触力,但两个电荷并没有直接接触.那么,电荷之间存在的静电力是如何传递的呢?

历史上曾有过两种观点:一种是超距作用观点,认为电荷之间的作用力是不需要中介物质传递的,也不存在中间的传递过程,相互之间的作用力是瞬间传到对方的;另一种是近距作用观点或称场的观点,认为电荷之间的电力是需要中介物质传递的,也存在着传递的过程,相互之间作用力的传递具有相应的速度.随着电磁学的发展,理论和实验都证明了后一种观点是正确的,即电荷之间的作用力需要某种中介物质进行传递,这种中介物质称为电场(传递磁力的中介物质称为磁场).当物体带电时,在它的周围就产生电场.如果电荷相对于观察者是静止的,那么它在其周围产生的电场就是静电场.本章所讨论的电场都属于静电场.电场有一种重要属性,就是任何一个进入其中的电荷都将受到由该电场传递的力的作用,这种力称为电场力,由静电场传递的力称为静电力.

根据上面的论述,我们可以把电荷之间的相互作用归结为:电荷在周围空间激发电场,电场对位于其中的电荷施以电场力的作用.

7.2.2 电场强度

对于电场来说,我们须从电场所表现的外在特性方面对其进行描述.

为了定量研究电场对电荷作用的性质,我们引入一试验点电荷 q_0 ,它满足以下两个条件:①电荷的几何线度很小,以至于可以看作点电荷,以确定电场中各点的性质;②其电量必须足够小,不至于影响原电场的分布.为简便起见,我们选取试验电荷为正电荷 $+q_0$.

如图 7-2 所示,在静止电荷 Q 周围的静电场中,先后将试验电荷 $+q_0$ 放到电场中 A、B 和 C 三个不同的位置.我们发现,试验电荷 $+q_0$ 在电场中不同位置处所受到的电场力 F 的值和方向均不相同.另外,就电场中的某一点而言,只与 q_0 的大小有关,但 F 与 q_0 之比则与 q_0 无关,为一不变的矢量.显然,这个不变的矢量只与该点处的电场有关,所以该矢量称为电场强度(以下简称场强),用符号 E 表示,有

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (7-3)$$

式(7-3)表明,静电场中某一点的场强 E 是一个矢量,其大小等于单位正电荷在该点处所受电场力的大小,其方向与正电荷在该点所受电场力方向相同.

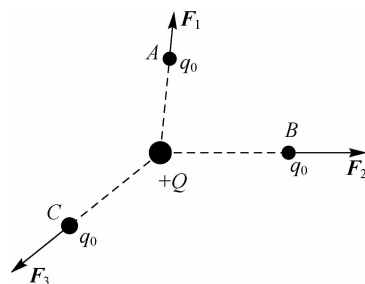


图 7-2

在国际单位制中,场强的单位为伏每米,符号为 V/m;场强的另一单位为牛每库,符号为 N/C.

应当指出,在已知场强分布的电场中,电荷 q 在场中某点处所受的力 \mathbf{F} 可由式(7-3)计算得

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (7-4)$$

可见,正电荷在电场中所受电场力的方向与该处场强方向一致,负电荷所受电场力与该处场强方向相反. 在应用式(7-4)计算电场力时,我们一般先用其标量形式 $F = |q|E$ 计算电场力的大小,然后再根据场强的方向及电荷的性质判明电场力的方向.

7.2.3 场强的计算

如果电荷分布已知,那么从点电荷的场强公式出发,根据场强的叠加原理,就可求出任意电荷分布所激发电场的场强. 下面说明计算场强的方法.

1. 单个点电荷产生的电场

现在假设有一个试验电荷 q_0 处于 P 点,根据库仑定律,试验电荷 q_0 所受的电场力为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \mathbf{e}_r$$

式中, \mathbf{e}_r 是从场源电荷 q 指向点 P 的单位矢量. 于是根据场强的定义式(7-3)可以得到 P 点的场强为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_1}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (7-5)$$

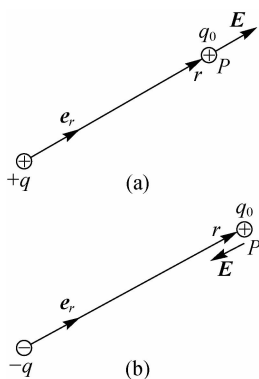


图 7-3

式(7-5)给出点电荷电场中任意一点的场强的大小和方向,称为点电荷场强公式. 由式(7-5)可知,若 $q > 0$,则 \mathbf{E} 与 \mathbf{r} 同向,即在正电荷周围的电场中,任意一点的场强沿该点的矢径方向,如图 7-3(a)所示;若 $q < 0$,则 \mathbf{E} 与 \mathbf{r} 反向,即在负电荷周围的电场中,任意一点的场强沿该点矢径的反方向,如图 7-3(b)所示. 式(7-5)还说明,静止的点电荷的电场具有球对称性,即在以 q 为球心的任意球面上场强大小相等,方向均与该球面正交. 在各向同性的自由空间内,一个本身无任何方向特征的点电荷的电场分布必然具有这种对称性.

2. 多个点电荷产生的电场

若空间存在 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n , 现求任意一点 P 的场强. 若以 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ 分别表示它们单独存在时各自对点电荷 q_0 作用的力,根据力的叠加原理,作用于 q_0 的电场力应该等于各个点电荷分别作用于 q_0 的电场力的矢量和,即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$$

根据场强的定义式,可以得到点 P 的场强应表示为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n}{q_0} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n$$

即

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (7-6)$$

式(7-6)表示:在 n 个点电荷产生的电场中,某点的场强等于每个点电荷单独存在时在该点所产生的场强的矢量和. 这就是场强的叠加原理.

将点电荷场强公式(7-5)代入式(7-6)可得点电荷系 q_1, q_2, \dots, q_n 的电场中任意一点的场强为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{e}_{r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{e}_{r_2} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \mathbf{e}_{r_n} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{e}_{r_i} \end{aligned} \quad (7-7)$$

这就是点电荷系场强的计算公式.

3. 连续带电体产生的电场

对连续分布的带电体,可以将它看成是许多无限小的电荷元 dq 的集合,而每个电荷元都可以当作点电荷处理. 设其中任意一个电荷元 dq 在 P 点产生的场强为 $d\mathbf{E}$,按式(7-5)有

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

式中, r 是从电荷元 dq 到场点 P 的距离; \mathbf{e}_r 为这一方向上的单位矢量. 整个带电体在 P 点所产生的总场强可用积分计算为

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (7-8)$$

例 7-3 求电偶极子中垂线上任意一点的场强.

解: 如图 7-4 所示, 设电偶极子的电量分别为 $+q$ 和 $-q$, 用 l 表示从负电荷指向正电荷的矢量. 设中垂线上任意一点 P 相对于 $+q$ 和 $-q$ 的位置矢量分别为 r_+ 和 r_- , 而 $r_+ = r_-$. $+q$ 和 $-q$ 在 P 点处产生的场强分别为

$$E_+ = \frac{qr_+}{4\pi\epsilon_0 r_+^3}$$

$$E_- = \frac{-qr_-}{4\pi\epsilon_0 r_-^3}$$

以 r 表示电偶极子中心到 P 点的距离, 则

$$\begin{aligned} r_+ = r_- &= \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}} = r \sqrt{1 + \frac{l^2}{4r^2}} \\ &= r \left(1 + \frac{l^2}{8r^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

在距离电偶极子甚远时, 即 $r \gg l$ 时, 取一级近似有 $r_+ = r_- = r$. 而 P 点的总场强为

$$E = E_+ + E_- = \frac{q(r_+ - r_-)}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{-ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$p = ql$ 是电偶极子的电矩, 这样上述结果又可以写成

$$E = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

此结果表明, 电偶极子在其中垂线上距电偶极子中心较远处各点的场强与电偶极子的电矩成正比, 与该点离电偶极子中心的距离的三次方成反比, 方向与电矩的方向相反.

例 7-4 试求一均匀带电直线外任意一点处的场强. 设直线长为 L , 如图 7-5 所示, 电荷线密度(单位长度上的电荷)为 λ (设 $\lambda > 0$). 设直线外一点 P 到直线的垂直距离为 x , P 点与

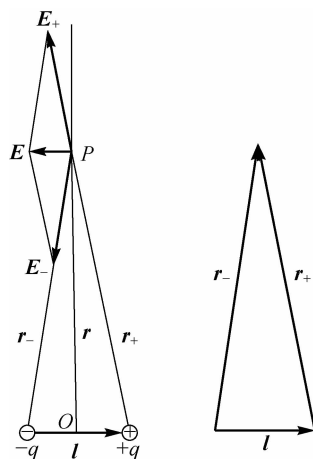


图 7-4

带电直线的上下端点的连线与垂线的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 .

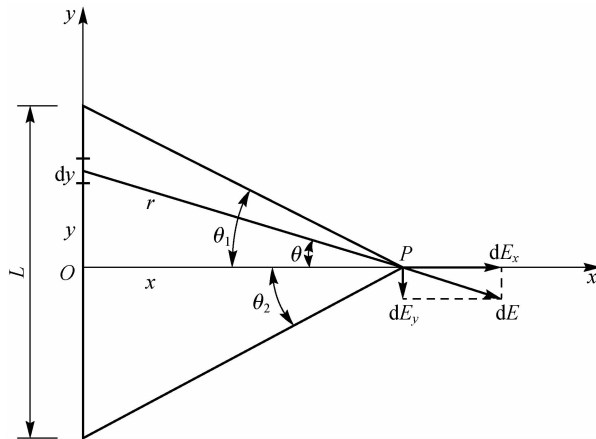


图 7-5

解: 均匀带电直线可以理解为实际问题中一根带电直棒的抽象模型, 如果我们仅限于考虑离棒的距离比棒的截面尺寸大得多的地方的电场强度, 则该带电直棒就可以看作一条带电直线. P 点处的场强可以通过微积分来求解.

在带电直线上任取一长为 dy 的元电荷, 其电量 $dq = \lambda dy$. 以 P 点到带电直线的垂足 O 为原点, 取图 7-5 所示坐标轴 x 轴、 y 轴. 元电荷 dq 在 P 点的场强 dE 沿两个轴方向的分量分别为 dE_x 和 dE_y , 因而

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{\lambda x dy}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$dE_y = -dE \sin \theta = \frac{\lambda y dy}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

由于 $y = x \tan \theta$, 从而 $dy = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta$ (此式在几何上表示, 当 dy 很小时 dy 对 P 点张开的角度 $d\theta$ 与 dy 的关系), 并且 $r = \frac{x}{\cos \theta}$, 所以

$$dE_x = \frac{\lambda x dy}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 x} d\theta$$

由于对整个带电直线来说, q 的变化范围是从 θ_2 到 θ_1 , 所以

$$E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 x} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

同理可得

$$E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\frac{\lambda \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 x} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

P 点总场强的大小可以由下式求得, 即

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

有两种特殊情况, 讨论如下:

(1) 中垂线上的点的场强. 在中垂线上, $\theta_1 = -\theta_2$, 则有 $E_y = 0$, $E = E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \sin \theta_1$, 将

$\sin \theta_1 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + x^2}}$ 代入, 可得

$$E = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 x (x^2 + L^2/4)^{1/2}}$$

此电场的方向垂直于带电直线而指向远离直线的一方.

(2) 无限长直线外任意一点处的场强. 现实世界没有无限长, 无限长只是一个相对的概念, 在本题中无限长的准确描述是 $\theta_1 = -\theta_2 = 90^\circ$, 故有

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$

此外, 在远离带电直线的区域, 即当 $x \gg L$ 时, 中垂线上的场强为

$$E \approx \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

式中, $q = \lambda L$ 为带电直线所带的总电量. 此结果表明, 离带电直线很远处, 该带电直线的电场相当于一个点电荷 q 的电场.

例 7-5 求均匀带电圆环轴线上的场强. 如图 7-6 所示, 一均匀带电细圆环, 半径为 R , 所带总电量为 q (设 $q > 0$), 圆环轴线上场点 P 到圆心的距离为 x .

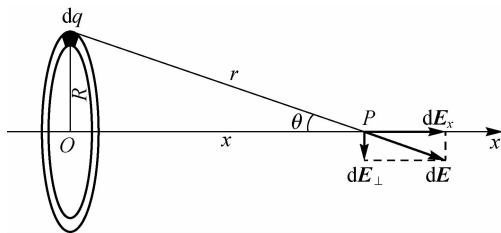


图 7-6

解: 根据微积分的思想, 我们把圆环微分成为许多小段, 任意小段 dl 上的带电量为 dq . 设此元电荷 dq 在 P 点的场强为 dE , dE 沿平行和垂直于轴线的两个方向的分量分别为 dE_x 和 dE_\perp . 由于圆环电荷分布关于轴对称, 所以圆环上全部电荷的 dE_\perp 分量的矢量和为零, 因而 P 点的场强沿轴线方向, 且

$$E = \int_q dE_x$$

式中, 积分为对环上全部电荷 q 积分. 设 P 点与 dq 的距离为 r , 由于

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

其中, θ 为 dE 与 x 轴的夹角, 所以

$$E = \int_q dE_x = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_q dq$$

此式中的积分值即为整个环上的电荷 q , 所以

$$E = \frac{q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

考虑到 $\cos \theta = \frac{x}{r}$, 而 $r = \sqrt{R^2 + x^2}$. 可将上式改写为

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

E 的方向为沿着轴线指向远方.

当 $x \gg R$ 时, $(R^2+x^2)^{3/2} \approx x^3$, 则 E 的大小为

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

此结果说明, 远离环心处的电场相当于一个点电荷 q 所产生的电场. 当 $x \ll R$ 时, $(R^2+x^2)^{3/2} \approx R^3$, 则 E 的大小为

$$E \approx \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

即在靠近圆心的轴线上, 场强大小与 x 成正比.

例 7-6 试求均匀带电圆盘轴线上的场强. 如图 7-7 所示, 设带电圆盘半径为 R , 电荷面密度(单位面积上的电荷)为 σ (设 $\sigma > 0$), 求圆面轴线上距离圆心 x 处场点 P 的场强.

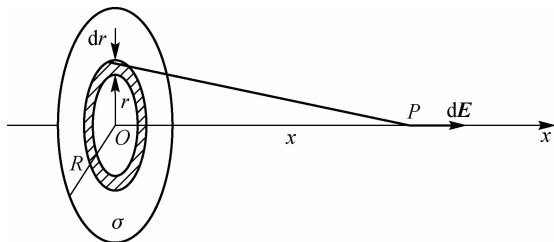


图 7-7

解: 一带电平板, 如果其面积的线度及考察点到平板的距离都远远大于它的厚度, 就可以将该带电平板看作一个带电平面. 可将带电圆盘看成由许多同心的带电细圆环组成. 取一个半径为 r 、宽度为 dr 的细圆环(将圆盘微分成许多圆环), 由于此环的面积为 $2\pi r \cdot dr$, 带有电荷 $\sigma \cdot 2\pi r dr$, 所以由例 7-5 可知, 此圆环电荷在 P 点的场强大小为

$$dE = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (r^2+x^2)^{3/2}}$$

其方向沿着轴线指向远方. 由于组成圆面的各圆环的电场 dE 的方向都相同, 所以 P 点的总场强为各个圆环在 P 点场强的大小的积分, 即

$$E = \int dE = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}} \right]$$

其方向也垂直于圆盘指向远方.

当 $x \ll R$ 时,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

此时相对于 x , 可将该带电圆盘看作“无限大”的带电平面. 因此, 可以说, 在一个无限大均匀带电平面外的电场是一个均匀场, 其大小由 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ 决定.

当 $x \gg R$ 时,

$$(R^2+x^2)^{-1/2} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{R^2}{2x^2} + \dots \right) \approx \left(1 - \frac{R^2}{2x^2} \right)$$

于是

$$E \approx \frac{\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

式中, $q = \pi\sigma R^2$ 为圆盘所带的总电量. 这一结果也说明, 远离带电圆盘处的电场也相当于一个点电荷的电场.

7.2.4 电场线和电通量

1. 电场线

电场中每一点的场强 \mathbf{E} 都有一定的大小和方向. 为了形象地描述电场, 可以将电场用一种假想的几何曲线来表示, 称之为电场线, 也称 E 线. 电场线最早是由法拉第提出来的. 电场线是在电场中人为画出的有向曲线, 它满足以下两点:

(1) 电场线上每一点的切线方向与该点场强的方向一致.

(2) 电场中每一点的电场线的密度表示该点场强的大小. 电场线的密度可以理解为: 为了用电场线表示电场中某点的场强的大小, 设想通过该点作一个垂直于电场方向的面元 dS_{\perp} , 如图 7-8 所示. 通过面元的电场线条数 $d\varphi_e$ 满足

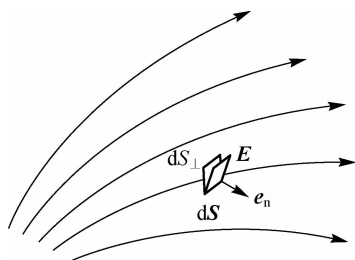


图 7-8

$$\mathbf{E} = \frac{d\varphi_e}{dS_{\perp}} \quad (7-9)$$

这就是说, 电场中某点场强的大小等于该点处的电场线的密度, 即该点附近垂直于电场方向的单位面积所通过的电场线条数. 按照这样的规定, 电场线既可以定性地描述场强的方向, 又可以定量地表示场强的大小. 事实上, 对于所有的矢量分布(矢量场), 都可以用相应的矢量线来进行形象描述, 如电流场可以用电流线来描述, 磁感应强度场可以用磁感应线来描述等, 其描述方法基本上相同.

图 7-9 所示为几种常见带电体系的电场线, 从中可以看出电场线具有如下性质:

(1) 电场线不闭合, 也不会无电荷处中断. 电场线起始于正电荷, 终止于负电荷, 或从正电荷起延伸到无限远处, 或从无限远起终止于负电荷.

(2) 电场线有头有尾, 不形成闭合曲线. 任意两条电场线不可能相交, 这一点可以用反证法给予说明: 若两条电场线可以相交, 则相交处会有两个电场线的切线方向, 即该处有两个场强方向, 此结论与电场中任意一点的场强方向是唯一的这一客观事实相矛盾, 因此电场线不能相交.

必须指出, 不可把电场线误认为是电荷运动的轨迹. 因为电场线的切线表示的是电荷的受力方向, 即加速度的方向, 而不是速度的方向.

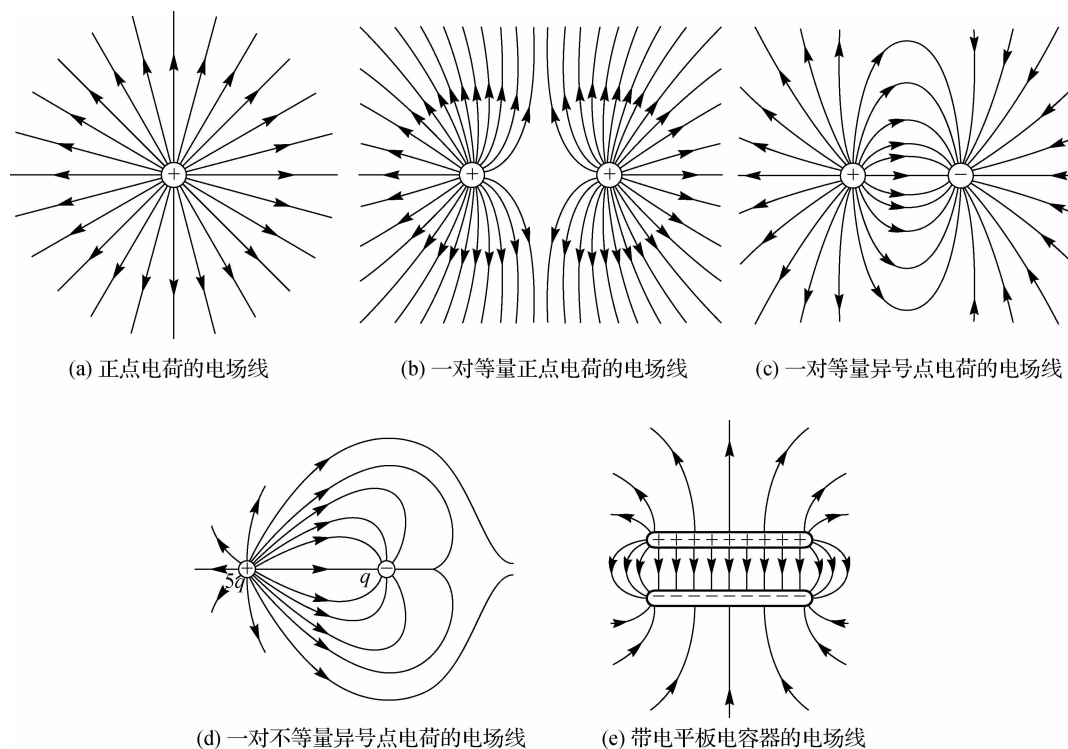


图 7-9

2. 电通量

在电荷分布确定的情况下,由场强的叠加原理可求出空间各点的场强.反之,假如电场分布已知,是否可求出在给定的某区域内的电荷,这个问题的解决涉及一个称为电通量的物理量.

我们把通过电场中某一个面的电场线数称为通过这个面的电通量,用符号 Φ_e 表示.下面我们分两种情况讨论电通量的计算方法.

1) 在均匀电场中通过平面的电通量

如图 7-10(a)所示,这是一个匀强电场,匀强电场的电场强度处处相等,所以电场线密度也应处处相等.这样,通过面 S 的电通量为

$$\Phi_e = ES \quad (7-10)$$

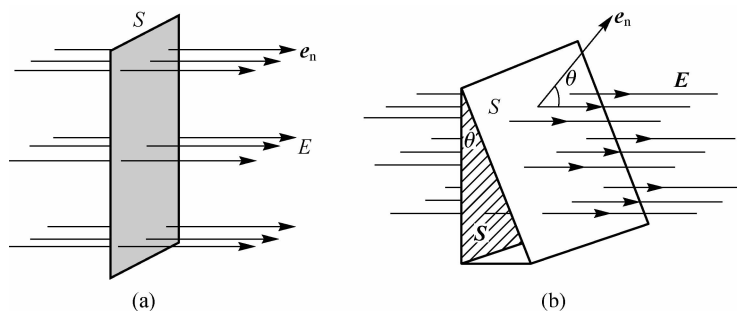


图 7-10

如果平面 S 与匀强电场场强 \mathbf{E} 不垂直, 那么面 S 在电场空间可取许多方位. 为了把面 S 在电场中的大小和方位同时表示出来, 我们引入面积矢量 \mathbf{S} , 规定其大小为 S , 其方向用它的单位法线矢量 \mathbf{e}_n 来表示, 有 $\mathbf{S} = S\mathbf{e}_n$. 在图 7-10(b) 中, 平面 S 的单位法线矢量 \mathbf{e}_n 与场强 \mathbf{E} 之间的夹角为 θ . 因此, 这时通过面 S 的电通量为

$$\Phi_e = ES \cos \theta \quad (7-11)$$

由矢量标积的定义可知

$$\Phi_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n S \quad (7-12)$$

2) 在非均匀电场中通过曲面的电通量

如果电场是非匀强电场, 并且面 S 不是平面, 而是任意曲面, 如图 7-11 所示, 则可以把曲面分成无限多个面积元 dS , 每个面积元 dS 都可看成是一个小平面, 而且在面积元 dS 上, \mathbf{E} 也可以看成处处相等. 仿照上面的办法, 若 \mathbf{e}_n 为面积元 dS 的单位法线矢量, 则 $\mathbf{e}_n \cdot d\mathbf{S} = d\Phi_e$. 设面积元 dS 的单位法线矢量 \mathbf{e}_n 与该处的场强 \mathbf{E} 成 θ 角, 于是, 通过面积元 dS 的电通量为

$$d\Phi_e = \mathbf{E} dS \cos \theta = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (7-13)$$

所以通过曲面 S 的电通量 Φ_e 就等于通过面 S 上所有面积元 dS 电通量 $d\Phi_e$ 的总和, 即

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cos \theta dS = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (7-14)$$

式中, \int_S 表示对整个曲面 S 进行积分.

如果曲面是闭合曲面, 如图 7-12 所示, 式(7-14)中的曲面积分应换成对闭合曲面积分, 闭合曲面积分用 \oint_S 表示, 故通过闭合曲面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

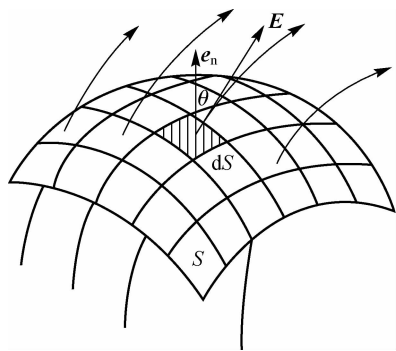


图 7-11

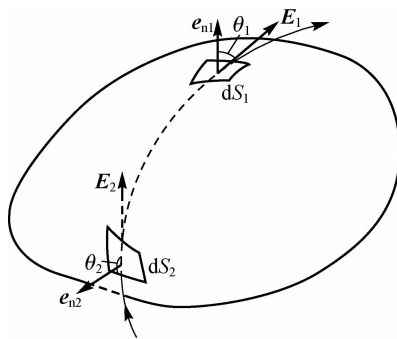


图 7-12

一般来说, 对于不闭合的曲面, 面上各处法向单位矢量的正向可以任意取这一侧或那一侧. 通过闭合曲面的电场线, 有些是“穿进”的, 有些是“穿出”的. 这也就是说, 通过曲面上各个面积元的电通量 $d\Phi_e$ 有正有负. 为此规定: 曲面上某点的法线矢量的方向是垂直指向曲面外侧的. 因此, 对于闭合曲面, 约定外法线方向为正, 在电场线穿出曲面的地方, 电通量 $\Delta\Phi_e$ 为正; 在电场线进入曲面的地方, 电通量 $\Delta\Phi_e$ 为负.

7.3 静电场的高斯定理

7.3.1 高斯定理的推导

高斯在实验物理、理论物理以及数学方面都做出了很多贡献,他导出的高斯定理是电磁学的一条重要规律,是静电场有源性的完美的数学表达.

高斯定理是用电通量表示的电场和场源电荷关系的定理,它指出了通过任意闭合曲面的电通量与闭合曲面内部所包围的电荷的关系.为了使大家熟练掌握高斯定理及其相关知识,下面给出高斯定理的全部推导过程.高斯定理推导用图如图 7-13 所示.

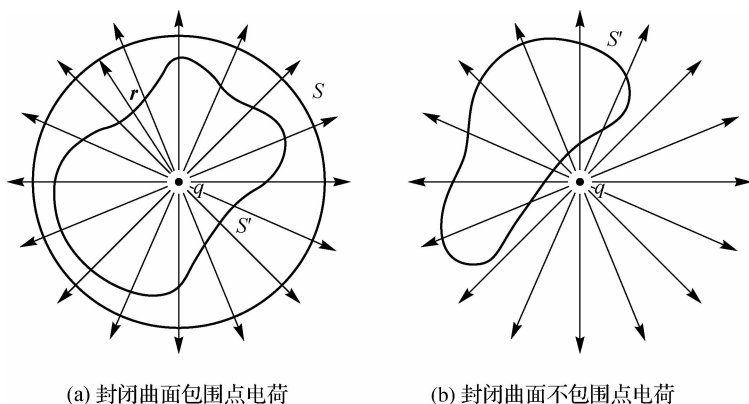


图 7-13

我们先讨论一个静止的点电荷 q 的电场.如图 7-13(a)所示,以 q 所在的点为中心,以任意长度 r 为半径作一球面 S 包围这个点电荷 q .我们知道,球面上任一点的场强 \mathbf{E} 的大小都是 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$,方向都是沿着矢径 \mathbf{r} 的方向,因而处处与球面垂直.根据点电荷电场公式和闭合曲面电通量计算公式,可得通过这个球面的电通量为

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos 0^\circ \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}\quad (7-15)$$

式(7-15)表明,通过球形高斯面的总电通量和高斯球面所包围的电荷 q 成正比,而与球面半径 r 无关.这意味着,对以点电荷 q 为球心的任何一个球面来说,通过它的电通量都是一样的,都等于 q/ϵ_0 .用电场线的图像来说,这表示通过各球面的电场线总条数相等,或者说,从点电荷 q 发出的电场线连续地延伸到无穷远处.

从图 7-13(a)中我们也很容易分析出, S' 是任意形状的一个闭合曲面, S 是一个把 S' 包围在其中的球面. S 和 S' 包围同一个点电荷 q , S' 和 S 之间并无其他电荷.由于电场线的连续性,显然可以肯定穿过 S' 和 S 的电场线数目是一样的,即它们的电通量都是 q/ϵ_0 .在这里, S 与 S' 显然都有一个共同的特点,即它们都包围着电荷 q .

在图 7-13(b)中,一个点电荷位于一个任意形状的闭合曲面的外面.一些电场线进入了曲面,一些电场线离开了曲面.然而,进入曲面的电场线的数目和离开曲面的电场线的数目

相同,即通过 S' 的电通量为零.

基于上述分析,我们可以得到如下结论:在一个点电荷电场中,任意一个闭合曲面 S 的电通量或者为 q/ϵ_0 或者为零,即

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} \\ 0 \end{cases} \quad (7-16)$$

式(7-16)表明电通量遵从叠加原理,即总场强在闭合曲面 S 的电通量等于各点电荷在 S 面的电通量之和.按式(7-16)的结论,每个电荷在 S 面的电通量,取决于该点电荷是否被闭合曲面 S 包围.例如, q_i 被 S 包围,相应的项就取为 q_i/ϵ_0 ; q_i 没有被 S 包围,则相应的项就取为 0. 如果被包围的点电荷有 m 个,则过 S 的总电场的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} + \cdots + \oint_S \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \cdots + \frac{q_m}{\epsilon_0} \\ &= \frac{q_1 + q_2 + \cdots + q_m}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (7-17)$$

我们用 $q_{\text{内}}$ 表示 S 包围住的点电荷电量的代数和,即 $q_{\text{内}} = q_1 + q_2 + \cdots + q_m$,则式(7-17)可以记作

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{内}}}{\epsilon_0} \quad (7-18)$$

式(7-18)就是高斯定理的数学表达式,它表明:在真空中的静电场内,通过任意闭合曲面的电通量等于该闭合曲面所包围的电荷的电量的代数和的 $1/\epsilon_0$ 倍.

高斯定理说明了通过封闭曲面的总的电通量只决定于它所包围的电荷的电量,与曲面内电荷的分布无关.但应当注意,高斯定理表达式中的场强 \mathbf{E} 是曲面上各点的场强,它是由曲面内、外的电荷共同产生的,且与电荷的分布有关.当 $\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 时,只能说明通过 S 面的总的电通量为零,其中的场强 \mathbf{E} 并不一定为零.静电场的高斯定理是和静电场的有源性联系在一起的.它告诉我们,一个闭合曲面若围住了正电荷,则曲面上的电通量为正,即有电场线从曲面上穿出;若围住了负电荷,则曲面上的电通量为负,即有电场线从曲面上穿入.这意味着电场线确实是发出于正电荷,终止于负电荷的.高斯定理并不指明具体源电荷所产生电场的具体分布,而是以数学形式描述了电场同源电荷间的普遍关系.

高斯定理可以从库仑定律直接导出.然而,对于变化的电场,库仑定律不再成立,而高斯定理仍然有效,即不论是静电场,还是变化的电场,高斯定理都是适用的.

7.3.2 利用高斯定理求静电场的分布

高斯定理和库仑定律用不同的形式表示出电场与场源电荷关系的同一客观规律,但它们在应用上有所不同.一般来说,库仑定律和场强叠加原理并用,解决已知电荷分布求场强的问题;而高斯定理则解决已知场强分布求任意区域内的电荷问题.尽管如此,当电荷分布具有某种对称性时,适当选取高斯面,也可用高斯定理求出这种电荷系统的场强分布,而且,这种方法往往比用库仑定律和场强叠加原理要简便得多.这种方法一般包含两步:首先,通过对已知电荷分布的对称性分析确定出它产生的电场的对称性;然后,通过选取一个恰当的

闭合曲面(简称为高斯面),并将高斯定理用于高斯面就可以求出该带电体系所产生的电场的场强.使用这种方法计算场强的关键有两个方面:一是电荷分布有高度的对称性,二是高斯面的选取要恰当.高斯面选取的技巧是使得 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 中的 \mathbf{E} 能以大小不变常量的形式从积分号内提出来.

下面举几个例子,它们都要求求出在场源电荷静止的参考系内自由空间中的电场分布(一般有三种情况,我们将逐一介绍).

1. 点(球)对称的情况

例 7-7 求均匀带电球面的电场分布.已知球面半径为 R ,所带总电量为 q (设 $q > 0$).

解:由于电荷均匀分布在球壳上,电荷的分布具有球对称性.因此,电场也应具有以球壳的球心为中心的球对称性.也就是说,同一球面上各点的场强 \mathbf{E} 的大小应处处相等, \mathbf{E} 的方向必沿该点球面的法线方向,据此可以选取与带电球壳同心的球面作为高斯面.

如图 7-14 所示,取球壳外一点 P ,到球心的距离为 r ,以 O 点为中心,以 r 为半径作高斯面 S , P 点为高斯面上一点.根据电通量的定义,有

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

此球面包围的电荷为 $q_{\text{内}} = q$.高斯定理给出

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

由此式得出

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (r > R)$$

考虑到 \mathbf{E} 的方向,可得电场强度的矢量式为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r (r > R)$$

在球壳内任取一点 P' , P' 到 O 点的距离为 r' ,以 r 为半径作高斯面 S' , P' 点在高斯面 S' 上,同理可得

$$\Phi_e = \oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S'} E dS = E \oint_{S'} dS = E \cdot 4\pi r^2$$

但由于此 S' 面内没有电荷,根据高斯定理,应该有

$$\oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = 0$$

即

$$E = 0 (r < R)$$

这表明,均匀带电球壳在外部空间产生的电场大小,与电荷全部集中在球心时产生的电场一样;均匀带电球壳内部的场强大小处处为零.上述结果我们常常用如下公式统一描述:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

根据上述结果,可画出场强随距离的变化曲线 $\mathbf{E}-r$ 曲线,如图 7-14 所示,从 $\mathbf{E}-r$ 曲线中可看出,场强的值在球面($r=R$)上是不连续的.

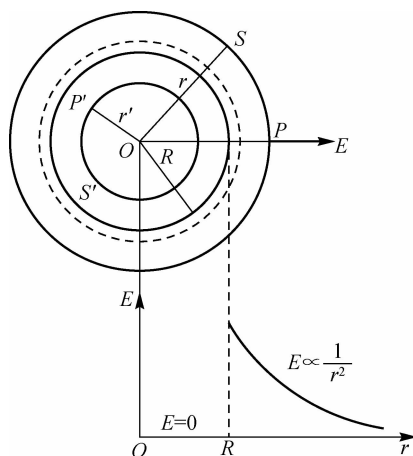


图 7-14

上述结论也可以通过场强叠加原理积分计算得到,但在电荷分布高度对称的情况下,用高斯定理显然要简单得多.

例 7-8 求均匀带电球体的电场分布. 已知球半径为 R , 所带总电量为 q .

解: 均匀带电球体同样满足球对称. 对于球外部, 容易看出, 例 7-7 中关于球外的场强方向和大的分析与计算此时也完全适用. 因此可以直接得出, 在球体外部的场强分布与所有电荷都集中到球心时产生的电场一样, 即

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > R)$$

为了求出球体内任一点的场强, 可以通过球内 P 点作一个半径为 r ($r < R$) 的同心球面 S 作为高斯面, 通过此面的电通量仍为 $E \cdot 4\pi r^2$. 此球面包围的电荷为电荷的体密度与球的体积之积, 即

$$q_{\text{内}} = \rho V = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}$$

由高斯定理可得

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (r \leq R)$$

这表明, 在均匀带电球体内部, 各点场强的大小与矢径大小成正比. 考虑到 \mathbf{E} 的方向, 球内、外电场强度也可以用矢量式表示为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r & (r > R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{e}_r & (r \leq R) \end{cases}$$

若用电荷体密度 $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ 表示, 均匀带电球体内部各点场强则可写成 $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}$.

均匀带电球体的 $E-r$ 曲线见图 7-15. 注意, 在球体表面上, 场强的大小是连续的.

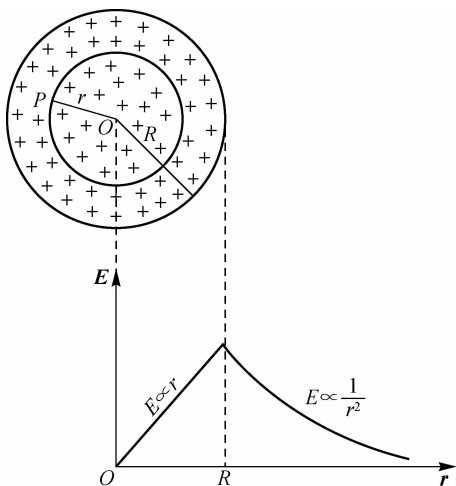


图 7-15

小结:通过分析例 7-7 和例 7-8,可以看出一些共同规律:在点(球)对称的情况下,作一个满足对称条件的球形高斯面,则在这个高斯面上的电通量为 $E \cdot 4\pi r^2$,由高斯定理马上可以得到 $E = \frac{q_{\text{内}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. 于是,只要能求出高斯面内的电量 $q_{\text{内}}$,就能求得场强 E 了.

2. 轴(柱)对称的情况

例 7-9 求无限长均匀带电直线的电场分布. 已知直线上电荷的线密度为 λ .

解:均匀带电直线的电荷分布是轴对称的,因而其电场分布亦应具有轴对称性. 如图 7-16 所示,考虑离直线距离为 r 的一点 P 处的场强 E . 由于带电直线为无限长,且均匀带电,因而 P 点的电场方向唯一的可能是垂直于带电直线而沿径向,和 P 点在同一圆柱面(以带电直线为轴)上的各点的场强的方向也都应该沿着径向,而且场强的大小应该相等.

以带电直线为轴,作一个通过 P 点、高为 l 的圆筒形封闭面作为高斯面 S ,通过 S 面的电通量为通过上、下底面(S_1 和 S_2)的电通量与通过侧面(S_3)的电通量之和,即

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

在 S 面的上、下底面,场强方向与底面平行,因此上式等号右侧前面两项等于零. 而在侧面上各点 E 的方向与各点的法线方向相同,所以有

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r l$$

此封闭面内包围的电荷 $q_{\text{内}} = \lambda l$,由高斯定理得

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

由此得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

这一结果也可以通过场强叠加原理积分出来,但利用高斯定

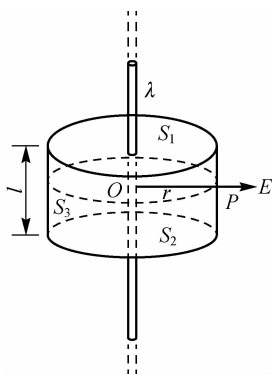


图 7-16

理计算显然要简便得多.

3. 面对称的情况

例 7-10 求无限大均匀带电平面的电场分布, 已知带电平面上电荷面密度为 σ .

解: 无限大均匀带电平面的电场分布满足平面对称. 如图 7-17 所示, 考虑距离带电平面为 r 的场点 P 的场强 \mathbf{E} . 由于电场分布满足平面对称, 所以 P 点的场强必然垂直于该带电平面, 而且离平面等远处(同侧或两侧)的场强大小都相等, 方向都垂直于平面指向远离平面的方向(当 $\sigma > 0$ 时).

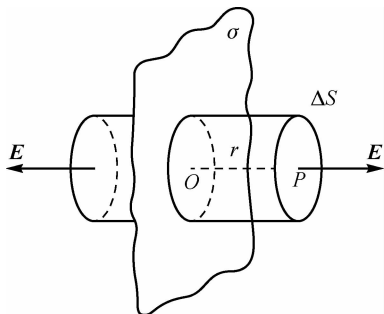


图 7-17

我们选一个轴线垂直于带电平面的封闭的柱面作为高斯面 S , 带电平面平分此柱面, 而 P 点位于它的一个底面上. 由于柱面的侧面上各点的场强 \mathbf{E} 与侧面平行, 所以通过侧面的电通量为零, 因而只需要计算通过两底面的电通量. 以 ΔS 表示一个底的面积, 则

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_{\Delta S} E \cdot d\mathbf{S} = 2E\Delta S$$

由于

$$q_{\text{内}} = \sigma\Delta S$$

由高斯定理给出

$$2E\Delta S = \sigma\Delta S / \epsilon_0$$

从而

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

此结果说明, 无限大均匀带电平面两侧的电场是均匀场. 这一结果与使用场强叠加原理计算的结果相同.

例 7-11 半径为 R 的球壳均匀带有正电荷 q , 求球壳内外空间中场强的分布.

解: 电荷分布具有球对称性, 可以判断空间场强的分布也具有球对称性. 先考虑球外某点 P 处的场强, 如图 7-18 所示, 以球心 O 为中心, 以 $r = OP$ 为半径作一高斯球面 S , 则球面上各点的场强大小相等, 方向沿半径指向外面, 与球面上该点处的面元法线方向相同, 根据高斯定理, 通过球面 S 的总电通量为

$$\Phi_r = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint dS = 4\pi r^2 E$$

而 $\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$, 因而可得

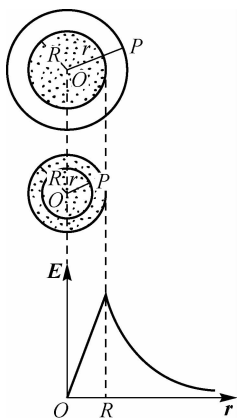


图 7-18

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

同理,求带电球壳内的场强分布,在球壳内以 r 为半径作高斯球面,因球面内没有电荷,故得

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} = 0$$

$$E = 0$$

所以场强的大小与离开球心的距离 r 有如下函数关系:

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

在 $r=R$ 的球壳上,场强似乎发生了突变.但事实上,电荷的分布总占有一定的球壳厚度,可以证明,在无限靠近球面的外层到没有电荷的内层上,场强是逐渐衰减到零的.

7.4 静电场的环路定理 电势

7.4.1 静电场的环路定理

1. 静电场力所做的功

根据库仑定律和场强叠加原理,可以证明静电场做功与路径无关,即电荷间的库仑力是保守力.

设静止的点电荷 q 位于 O 点,如图 7-19 所示,设想在 q 产生的电场中,把一试探电荷 q_0 由 a 点沿任意路径移动到 b 点,现在来计算 q 的电场对试探电荷 q_0 所做的功 A_{ab} .

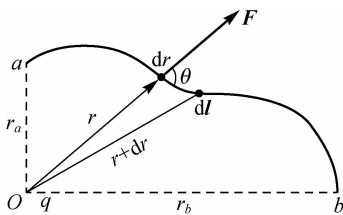


图 7-19

(1)点电荷 q 的电场的电场力对试探电荷 q_0 所做的功.当 q_0 移动一个元位移 $d\mathbf{l}$ 时,电场力所做的元功为

$$dA = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = F \cos \theta dl = F dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \quad (7-19)$$

电场力所做的总功为

$$A_{ab} = \int_a^b dA = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (7-20)$$

由此可以得出结论:在点电荷的电场中,电场力对试探电荷所做的功与路径无关,只决

定于运动路线的起点和终点位置,经任一闭合线路回到原处的功为零.

(2)点电荷系电场的电场力对试探电荷 q_0 所做的功.点电荷系电场是各点电荷的电场的叠加,试探电荷在电场中运动时,电场力的功等于各点电荷所做功的代数和,即

$$A_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b q_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_n) \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (7-21)$$

于是得出结论:在任意静电场中,电场力对试探电荷所做的功,只与试探电荷的电量和起点、终点的位置有关,与路径无关.由此可知,静电场力是保守力,静电场是保守场或有势场,也称有位场.

2. 静电场的环路定理

静电场的环路定理可以表述为:静电场中场强 \mathbf{E} 沿任意闭合路径的线积分等于零.场强 \mathbf{E} 沿任意闭合路径的线积分又称为场强的环流,因此也可以说,静电场中场强 \mathbf{E} 的环流等于零.公式为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (7-22)$$

这个定理可以从静电场力做功与路径无关的结论导出.如图 7-20 所示,在静电场中任意取一闭合环路 L ,考虑场强沿此闭合路径的线积分 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$.先在环路 L 上取任意两点 P 和 Q ,它们把环路 L 分成 L_1 和 L_2 两段.由于静电场力做功与路径无关,因此有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (7-23)$$

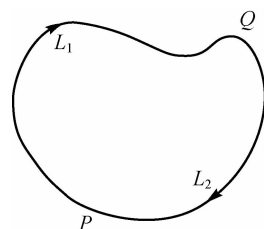


图 7-20

反过来,由静电场的环路定理也可以导出电场力做功与路径无关的结论.因此,“场强沿任意闭合路径的线积分等于零”和“电场力做功与路径无关”这两种说法是完全等价的.

7.4.2 电势和电势差

1. 电势能

按照力学知识,只要有保守力就一定有与之对应的势能.静电场力是保守力,可以引入势能的概念,称为电势能,用 W 表示(力学中用的势能符号 E_p ,在电磁学中容易与场强的符号混淆).根据力学中学过的势能的一般性定义,点电荷 q_0 在任意一个外电场中的 a 点处的电势能为

$$W_a = \int_a^{(0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q_0 \int_a^{(0)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (7-24)$$

势能零点用“(0)”表示.另外,在理论计算和讨论中电势能的零点常常选为无穷远处(在工程技术上常以接地为电势能的零点),在这种情况下,式(7-24)可以写成

$$W_a = q_0 \int_a^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (7-25)$$

即电荷 q_0 在电场中某点 a 的电势能,数值上等于将该电荷从 a 移到势能零点电场力所做的功.根据静电场的保守性,上述积分中从 a 点到无穷远处的积分路径可以是任意的,积分的

结果一定与所选择的路径无关(当然,在实际计算中应该选择一条使积分最简单的路径).值得注意的是,电势能是电荷 q_0 和静电场(其他场源电荷产生的)共同具有的,只谈电场或只谈电荷都没有电势能.所以,我们通常都说某电荷处于某电场中具有的电势能.

2. 电势与电势差

式(7-26)表明,试探电荷 q_0 在电场中一点 a 的电势能 W_a 与 q_0 的电量成正比,但比值 $\frac{W_a}{q_0}$ 与试探电荷无关,它反映了电场本身在点 a 处的性质,将这个量定义为点 a 的电势.用 V_a 代表电场中点 a 的电势,则

$$V_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (7-26)$$

式(7-26)称为电势的定义式,此式表明,当选无限远处电势为零时,静电场中某点的电势在数值上等于放在该点的单位正电荷的电势能,也等于单位正电荷从该点沿任意路径至无限远处的过程中静电力对它所做的功.

显然,在电势能为零的地方,电势也为零,所以电势能的零点也就是电势的零点.在电势能中我们规定了无限远处或接地为其零点,则电势的零点也是无限远处或接地.当然这只是通常的规定,选择其他地点作为电势零点也是可以的.在实际问题中,常常选地球的电势为零电势.

若电场中任意两点的电势之差称为电势差 U ,有

$$U_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (7-27)$$

即在静电场中, a 、 b 两点的电势差在量值上等于移动单位正电荷从 a 点到 b 点静电力所做的功.还可得出电荷 q_0 从点 a 移至点 b 过程中静电力所做的功为

$$A_{ab} = W_a - W_b = q_0(V_a - V_b) = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (7-28)$$

电势能和电势是静电场中两个重要的物理量,理解这两个物理量时,需要注意以下几点:

(1)电势能和电势都是标量.在国际单位制中,电势能的单位为焦耳,符号为 J;电势的单位为伏特,符号为 V, $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.电量为 q 的电荷在电场中某点所具有的电势能和场中该点电势之间的关系为

$$W = qV$$

(2)电势能和电势都是相对量.重力场中重力势能和高度是相对的,电场中电势能和电势也都是相对量,电荷在电场中某点时具有的电势能及电场中某点的电势都是相对于电势能零点和电势零点而言的,零点选择的不同,电势能和电势的值也就不同.在实际工作中,常选择无穷远处、大地或者电器的外壳为电势能和电势零点.

(3)电势能差和电势差都是绝对量.无论重力势能零点选择在何处,两点间的高度差是绝对的,重力势能差值也是绝对的,重力势能的增量负值都等于重力做的功.同样,无论电势能及电势的零点选择在哪里,两点间的电势能差值和电势差都是绝对的,电势能的增量负值等于静电力做的功.电量为 q 的电荷在电场中两点间电势能差值 ΔW 与场中对应点间电势差之间的关系为

$$\Delta W = qU$$

例 7-12 求均匀带电球面的电场中的电势分布. 设球面半径为 R , 总带电量为 q .

解: 均匀带电球面的场强分布很有规律性, 本题适宜用电势的定义式通过对场强的积分来求电势. 以无限远为电势零点. 若场点 P 在球面外, 由于在球面外直到无限远处场强的分布都和电荷集中到球心处的一个点电荷的场强分布一样, 因此, 把场强从 P 点积分到无穷远的计算结果应与点电荷电场中的计算结果相同, 即球面外任一点的电势应为

$$V = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

若 P 点在球面内 ($r < R$), 由于球面内、外场强的分布不同, 所以定义式中的积分要分两段进行, 即

$$V = \int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_R^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

由于在球面内各点场强为零, 而球面外场强为点电荷的场强 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 所以电势为

$$V = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (r \leq R)$$

这说明, 均匀带电球面内各点电势相等, 都等于球面上的电势. 电势随 r 的变化曲线 ($V-r$ 曲线) 如图 7-21 所示, 和场强分布 $E-r$ 曲线相比, 可看出, 在球面处 ($r=R$) 场强不连续, 而电势是连续的. 在经典物理学中, 能量始终是连续的.

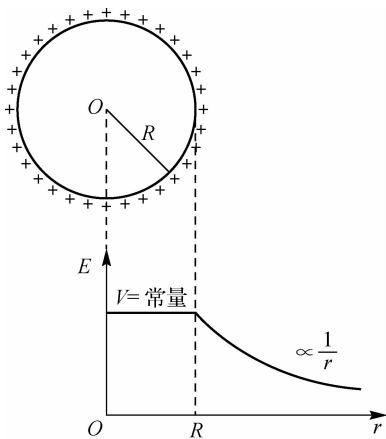


图 7-21

例 7-13 求电荷线密度为 λ 的无限长均匀带电直线电场中的电势分布.

解: 如图 7-22 所示, 无限长均匀带电直线周围的场强的大小为 $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, 方向垂直于带电直线. 如果仍选无限远处作为电势零点, 则由 $\int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ 积分的结果可知, 各点电势都将为无限大而失去意义. 这时我们可选距离带电直线为 r_0 的 q_0 点为电势零点, 则距带电直线为 r 的 P 点的电势为

$$V = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_P^{P'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P'}^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

式中, 积分路径 PP' 段与带电直线平行, 而 $P'P_0$ 段与带电直线垂直. 由于 PP' 段与电场

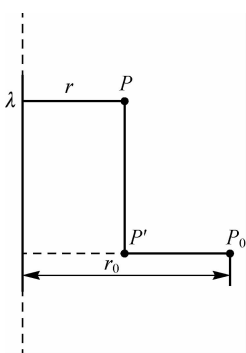


图 7-22

方向垂直,所以上式等号右侧第一项积分为零. 于是

$$V = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0$$

这一结果可以一般地表示为

$$V = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

式中, C 为与电势零点的位置有关的常数.

由此例看出,当电荷的分布扩展到无限远处时,电势零点不能再选在无限远处.

例 7-14 求均匀带电圆环轴线上任一点 P 的电势. 已知圆环半径为 a , 带电量为 Q , 如图 7-23 所示.

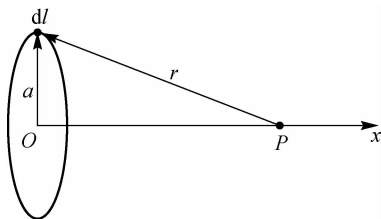


图 7-23

解: 将圆环等分为许多小元段 dl , 带电量为 dp , 则电荷元 dp 在 P 点的电势为

$$dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dp}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \frac{a}{2\pi a} \cdot de$$

整个圆环在 P 点的电势为

$$\begin{aligned} U_P &= \int dU_P = \int_0^{2\pi a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \cdot \frac{de}{2\pi a} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{(a^2+x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

由此结果可知,在 $x=0$ 处,可得圆环中心处的电势为

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{a}$$

在 $x \gg a$ 处, $(a^2+x^2)^{1/2} \approx x$, 可得电势

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{x}$$

表明求在远离圆环处某点电势时,可视圆环为一电荷集中于环心的点电荷.

7.4.3 电势叠加原理

如果电场是由 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 所激发的,某点 a 的电势由场强叠加原理可知为

$$\begin{aligned} V_a &= \int_a^{(0)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^{(0)} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_a^{(0)} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \dots + \int_a^{(0)} \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{l} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^{(0)} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n V_{a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \end{aligned} \quad (7-29)$$

式中, r_i 为 a 点离开点电荷 a_i 的距离. 式(7-29)表明, 在点电荷系的静电场中, 某点的电势等于每一个点电荷单独在该点所激发的电势的代数和. 这个结论称为电势叠加原理.

对一个电荷连续分布的带电体系, 可以设想它由许多元电荷 dq 组成. 将每个元电荷都当成点电荷, 就可以由叠加原理得到求电势的积分公式为

$$V_a = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7-30)$$

式中, r 是从元电荷 dq 到 a 点的距离(电势零点在 ∞ 处). 因为电势是标量, 这里的积分是标量积分, 所以电势的计算比电场强度的计算更为简便.

应该注意, 式(7-30)中电荷都是分布在有限区域内的, 并且是选择无限远处为电势的零点, 当激发电场的电荷分布延伸到无限远时, 不宜把电势的零点选在无限远处, 否则将导致电场中任一点的电势值均为无限大, 这时只能根据具体问题选某点为电势的零点.

例 7-15 一半径为 R 的均匀带电细圆环, 所带电量为 q , 求在圆环轴线上任意一点 P 的电势.

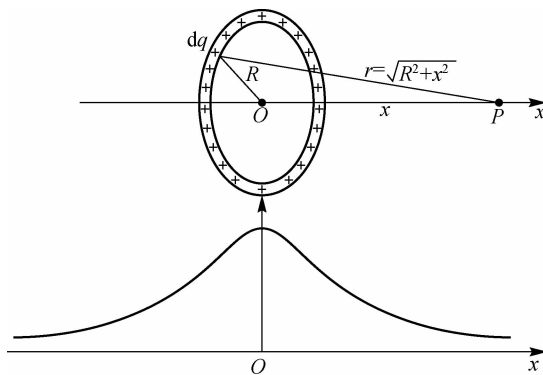


图 7-24

解: 本题也可以用两种方法求解. 我们先用叠加原理求电势的方法来解. 在图 7-24 中以 x 表示从环心到 P 点的距离, 以 dq 表示在圆环上任一元电荷. 由电势叠加原理可得 P 点的电势为

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$

当 P 点位于环心 O 处时, $x=0$, 则

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

另一种求解方法是根据已知场强求电势的方法. 由前面的例题可知, 圆环在轴线上任意一点的场强大小为

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

如果我们在 x 轴上选择一条从 x 到无穷远的路径, 则 P 点处的电势由已知场强计算电势的公式可得

$$V = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_x^\infty E dx$$

$$= \int_x^\infty \frac{qx dx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$

可以看出,两种计算方法所得到的结果是完全相同的.

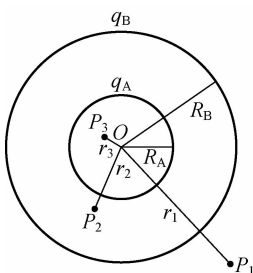


图 7-25

例 7-16 如图 7-25 所示,两个圆表示两个同心的均匀带电球面,半径分别为 $R_A=5\text{ cm}$, $R_B=10\text{ cm}$, 分别带有电量 $q_A=+2\times 10^{-9}\text{ C}$, $q_B=-2\times 10^{-9}\text{ C}$, 求距球心距离为 $r_1=15\text{ cm}$ 、 $r_2=6\text{ cm}$ 、 $r_3=2\text{ cm}$ 处的电势.

解: 这一带电系统的电场的电势分布可以由两个带电球面的电势相加求得. 由此可知,在外球外侧 $r=r_1$ 处,有

$$V_1 = V_{A1} + V_{B1} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 r} = 0$$

在两球面之间 $r=r_2$ 处,有

$$V_2 = V_{A2} + V_{B2} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B}$$

$$= \frac{9\times 10^9 \times 2\times 10^{-9}}{0.06} + \frac{9\times 10^9 \times (-2\times 10^{-9})}{0.10} = 120\text{ V}$$

在内球内侧 $r=r_3$ 处,有

$$V_3 = V_{A3} + V_{B3} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_A} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B}$$

$$= \frac{9\times 10^9 \times 2\times 10^{-9}}{0.05} + \frac{9\times 10^9 \times (-2\times 10^{-9})}{0.10} = 180\text{ V}$$

7.4.4 等势面

在描述电场时,我们引入电场线来形象地描述电场强度的分布. 同样,也可以用等势面来形象地描述电场中电势的分布.

在静电场中,将电势相等的各点连起来所形成的面称为等势面. 把对应于不同电势值的等势面逐个地画出来,并使相邻两等势面间的电势差为一常量,这样画出来的图形就能直观地反映出静电场中电势的分布情况. 图 7-26 给出了正点电荷和两个等量异号点电荷的等势面和电场线的分布. 其中,虚线代表等势面,实线代表电场线.

根据等势面的意义可知它和电场的分布有一定关系,如果严格按照上述对等势面画法的规定,等势面就应具有下列基本性质:

- (1) 等势面与电场线处处正交.
- (2) 等势面密集处场强大,等势面稀疏处场强小.
- (3) 电场线总是由电势高的等势面指向电势低的等势面.

等势面的概念在解决实际问题时也很有用,主要是因为遇到的很多实际带电问题中,等势面的分布容易通过实验方法描绘出来,并可以由此分析电场的分布.

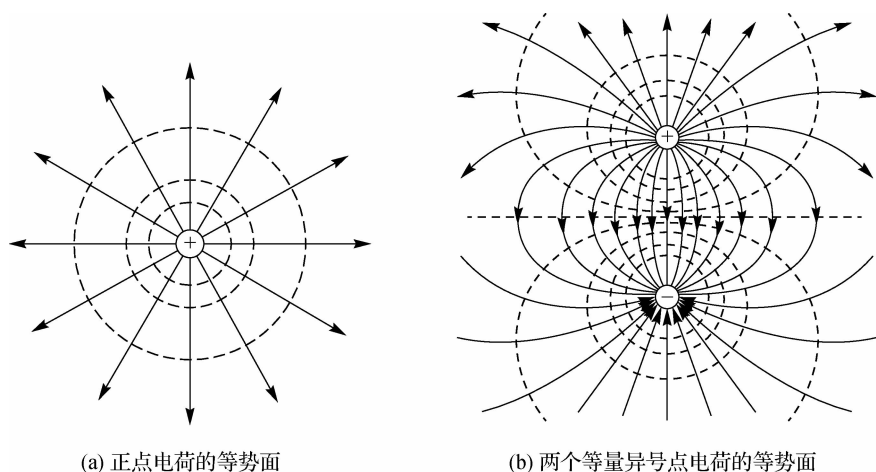


图 7-26

7.5 静电场中的导体

7.5.1 导体的静电平衡条件

金属导体由大量带负电的自由电子和带正电的晶体点阵构成. 无论对整个导体或对导体中某一小部分来说, 自由电子的负电荷和晶体点阵的正电荷的总量是相等的, 故导体呈现电中性.

若把金属导体放在外电场中, 导体中的自由电子在做无规则热运动的同时, 还将在电场力的作用下做宏观定向运动, 从而使导体中的电荷重新分布. 在外电场作用下, 引起导体中电荷重新分布而呈现出的带电现象, 称为静电感应现象.

如图 7-27 所示, 在电场强度为 E_0 的匀强电场中放入一块金属板 G , 则在电场力的作用下, 金属板内部的自由电子将逆着外电场的方向运动, 使得 G 的两个侧面出现了等量异号的电荷. 于是, 这些电荷在金属板的内部建立起一个附加电场, 其场强和外来的场强 E_0 的方向相反. 这样, 金属板内部的场强 E 就是 E_0 和 E' 的叠加. 开始时 $E' < E_0$, 金属板内部的场强不为零, 自由电子会不断地向左移动, 从而使 E' 增大. 这个过程一直持续到金属板内部的场强等于零, 即 $E=0$ 时为止. 这时, 导体内没有电荷做定向运动, 导体处于静电平衡状态.

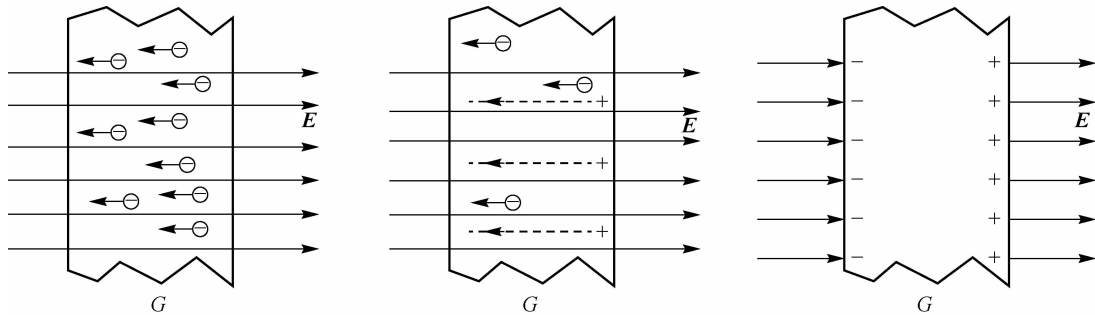


图 7-27

显然,导体处于静电平衡状态的条件是:①导体内部任何一点的场强为零;②导体表面上任何一点的场强垂直于表面.若不满足上述条件,则电荷将会受到电场力的切向分力 F_t 的作用,而沿导体表面做宏观运动,如图 7-28(a)所示.

根据场强和电势的关系,导体的静电平衡条件也可表述为:整个导体是等势体(导体表面是等势面);电场与导体的作用是相互的;在电场使导体发生静电感应的同时,导体上感应电荷产生的附加电场叠加到原来的电场上,从而改变了导体内外的电场,如图 7-28(b)所示.

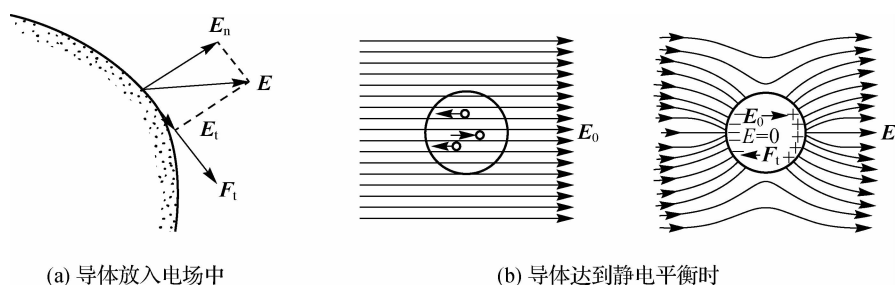


图 7-28

7.5.2 静电平衡的导体上的电荷分布

在静电平衡时,带电导体的电荷分布可运用高斯定理来讨论.如图 7-29 所示,有一带电导体处于平衡状态,由于在静电平衡时,导体内的电场强度为零,所以通过导体内任意高斯面的电通量亦必为零,即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7-31)$$

于是根据高斯定理,此高斯面内所包围的电荷的代数和必然为零.因为 S 面是任意的,故导体内无净电荷存在.可见静电平衡时,净电荷都分布在导体外表面上.

可以用同样的方法证明,如图 7-30 所示,当处于静电平衡状态的导体内有空腔时,内表面上也没有净电荷.总而言之,在静电平衡状态,带电导体上的净电荷只分布在导体的外表面上.这一结论已被实验证实.

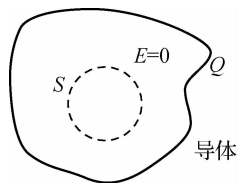


图 7-29

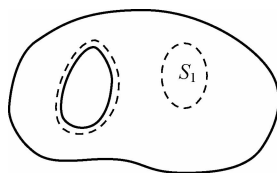


图 7-30

在处于静电平衡状态的导体上,净电荷沿外表面的分布一般是不均匀的.实验表明,在一个不受外电场影响的孤立导体上,电荷面密度在表面外凸而且弯曲厉害(曲率大)的地方较大,在表面平坦(曲率小)的地方较小,而在表面向里凹进去的地方电荷最少,如图 7-31 所示.

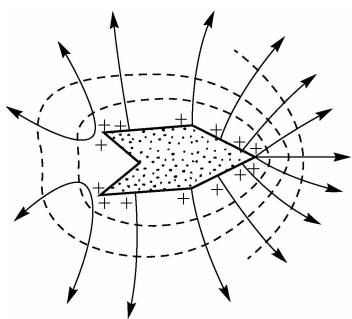


图 7-31

为 $\sigma\Delta S$, 所以根据高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0} \quad (7-32)$$

即

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (7-33)$$

其方向与导体表面垂直.

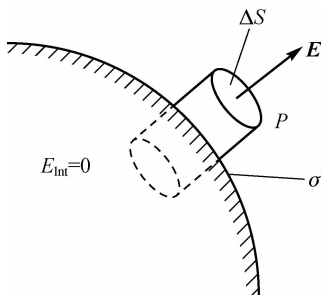


图 7-32

式(7-33)说明,处于静电平衡的导体表面上各处的电荷面密度与当地表面紧邻处的场强大小成正比.因此,在带电导体的尖端附近电场很强,它可以使空气局部电离,产生大量离子而成为导体.那些和导体上电荷同号的离子因被排斥离开尖端,而与导体上电荷异号的离子因受吸引趋近尖端,与导体上的电荷中和,这一现象称为尖端放电.尖端放电现象有利也有弊.为了防止因尖端放电而引起的危险和漏电、浪费电能,常将高压设备的金属部件做成光滑的球形曲面,尽量减少棱角和毛刺.另外,人们又利用尖端放电制成避雷针、静电加速器和感应起电机的喷电针和集电针等.

例 7-17 两个半径分别为 R 和 r 的球形导体($R > r$),用一根很长的细导线连接起来,如图 7-33 所示.使这个导体组带电,电势为 V ,求两球表面电荷面密度与曲率的关系.

解:可将两个导体所组成的整体看成是一个孤立导体,在静电平衡时有一定的电势值.设这两个球相距很远,使每个球面上的电荷在另一球处所激发的电场可以忽略不计.细线的作用是使两球保持等电势,而细线上少量的电荷在两球处所激发的电场影响也可以忽略不计.因此,每个球又可近似地看作孤立导体,两球表面上的电荷分布都是均匀的.设大球

所带电荷量为 Q , 小球所带电荷量为 q , 则两球的电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

得

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}$$

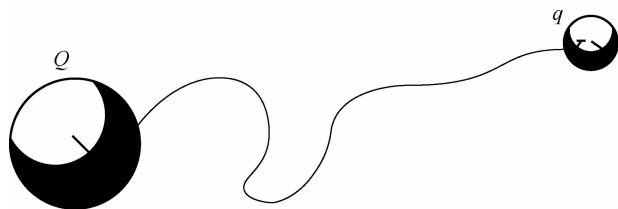


图 7-33

可见, 大球所带电荷量 Q 比小球所带电荷量 q 多.

因为两球的电荷面密度分别为

$$\sigma_R = \frac{Q}{4\pi R^2}, \sigma_r = \frac{q}{4\pi r^2}$$

所以

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{Qr^2}{qR^2} = \frac{r}{R}$$

可见, 电荷面密度和曲率半径成反比, 即曲率半径越小(或曲率越大), 电荷面密度越大.

当两球相距不远时, 两球所带电荷的相互影响不能忽略, 这时每个球不能看作孤立导体, 两球表面上的电荷分布也不再均匀. 于是, 同一球面上各处的曲率虽相等, 而电荷面密度却不再相同. 因此, 电荷面密度与曲率半径成反比并不是一个普遍适用的结论.

7.5.3 静电屏蔽

在静电平衡状态下, 导体上的感应电荷产生的附加电场能够抵消原电场. 因此, 此时空腔导体能够隔绝内场和外场的相互影响, 这种现象称为静电屏蔽现象. 根据静电屏蔽现象做成的装置按其功能分为两类.

1. 外电场不影响腔内

如前所述, 导体处于静电平衡时, 导体内部的电场强度为零, 无论导体形状如何, 带电导体的电荷总是分布在外表面上. 既然如此, 若把实心导体的内部挖空, 形成空腔导体, 电荷在外表面上的分布情况不会受到影响而发生变化. 这样, 不仅节省材料, 还带来了一个新的用途——屏蔽作用.

若把一空腔导体放在静电场中, 当静电平衡时, 如图 7-34(a) 所示, 电场线将终止于导体的外表面而不能穿过导体的内表面进入内腔, 导体内和空腔中的场强处处为零. 因此, 我们可以利用空腔导体, 甚至较细密的金属网所包围的空间来屏蔽外电场, 使空腔内的物体不受外电场的影响. 如图 7-34(b) 所示, 金属笼内的小兔虽受惊吓, 但并不会受到笼外强电场的伤害.

常用的电子仪器和电子器件都使用金属外壳, 一些电子电路中的高频通道使用一种带金属网管的导线(称为屏蔽线)等, 这些都应用了静电屏蔽原理, 使它们不受外电场的干扰.

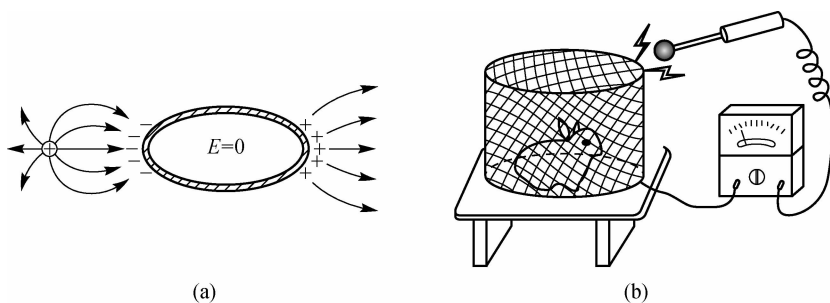


图 7-34

2. 腔内电场不影响腔外

如果把一带电体放置在空心导体的空腔内,根据感应现象及静电平衡时导体表面电荷的分布特点可知,导体的内表面带有与带电体等量异号的电荷,其余电荷分布于导体外表面,如图 7-35 所示. 如果空腔导体原来不带电,则放入带电体后其外表面分布有与带电体等量同号的电荷;如果导体原来带有电荷,则导体外表面的电荷量是原来电荷与空腔内带电体电荷的代数和. 无论怎样,如图 7-35(a)所示,导体外表面有电荷,此电荷激发的电场也会影响导体外的其他物体,要想消除这种影响,可以把导体接地,如图 7-35(b)所示,从而使导体外表面的感应电荷与从大地上来的电荷中和,导体外面的电场就消失了. 可见,用接地的带空腔的导体可以屏蔽空腔内电荷的电场.

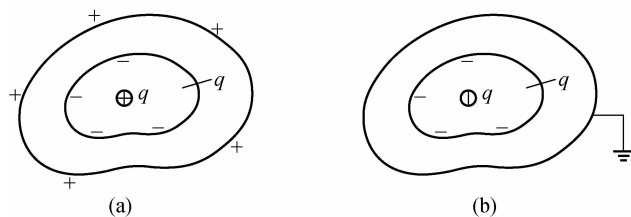


图 7-35

这一点在实际生活中应用也很广泛. 例如,在高压设备的外面经常要罩上金属网栅,就是为了防止高压设备的电场对外界产生影响.

综上所述,空腔导体(无论接地与否)使腔内空间不受外电场的影响,而接地空腔导体使外部空间不受空腔内的电场影响,这就是空腔导体的静电屏蔽作用. 在实际工作中,常用编织得相当紧密的金属网来代替金属壳体. 例如,高压设备周围的金属栅网、校测电子仪器的金属网屏蔽室等,都是起静电屏蔽作用的.

7.6

电容 电容器

7.6.1 孤立导体的电容

在真空中,有一半径为 R 、电荷量为 Q 的孤立球形导体,它的电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad (7-34)$$

当电势 V 一定时,球的半径 R 越大,它所带电荷量 Q 也越多,但 $\frac{Q}{V}$ 却是一个常量.于是,我们把孤立导体所带电荷量 Q 与其电势 V 的比值称为孤立导体的电容,电容的符号为 C ,有

$$C = \frac{Q}{V} \quad (7-35)$$

对于在真空中孤立球形导体来说,其电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (7-36)$$

由式(7-36)可以看出,真空中球形孤立导体的电容正比于球的半径.

应当指出,电容是表述导体电学性质的物理量,它与导体是否带电无关.

在国际单位制中,电荷量的单位是 C,电势差的单位是 V,电容的单位为法拉,符号为 F.在实际应用中,法拉这个单位太大,常用较小的微法(μF)、皮法(pF)等作为电容的单位,它们之间的关系为

$$1 \text{ F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{ pF}$$

7.6.2 电容器

1. 电容器的电容

我们把两个导体所组成的系统称为电容器.如图 7-36 所示,两个导体 A、B 放在真空中,它们所带的电荷分别为 $+Q$ 和 $-Q$,如果它们的电势分别为 V_1 和 V_2 ,那么它们之间的电势差为

$$U = V_1 - V_2 \quad (7-37)$$

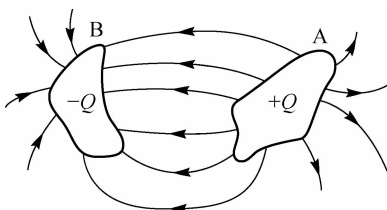


图 7-36

电容器的电容定义为:两导体中任何一个导体所带的电荷 Q 与两导体间电势差 U 的比值,即

$$C = \frac{Q}{U} \quad (7-38)$$

导体 A 和 B 常称为电容器的两个电极或极板.

2. 常见电容器电容的计算

1) 平板电容器

最简单的电容器是由靠得很近、相互平行、同样大小的两片金属板组成的平行板电容器,如图 7-37 所示.图中的两金属薄板 A、B,设 A 板带电 $+Q$,B 板带电 $-Q$,每块极板的面积为 S ,两极板内表面间的距离为 d ,忽略边缘效应,电荷将各自均匀地分布在两板的内表

面,电荷面密度的大小为 $\sigma = \frac{Q}{S}$. 由高斯定理可求得两板间的电位移矢量 $D = \sigma$.

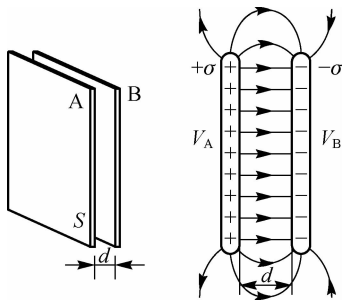


图 7-37

两板间的场强为

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

其中 ϵ 为介质的介电常量,场强方向由 A 板指向 B 板. 两板间的电压为

$$U = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon} = \frac{Qd}{\epsilon S}$$

其中积分沿场强的方向进行. 故平板电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon \frac{S}{d} \quad (7-39)$$

由式(7-39)可知,平行板电容器的电容 C 和极板的面积 S 成正比,和两极板内表面间的距离 d 成反比,而和极板上所带的电荷量无关,说明当两极板间为真空时,电容 C 只和电容器本身的几何结构有关. 式(7-39)指明,增加平行板电容器极板的面积,减小两极板间的距离,则它的电容就增大. 在实际应用中,常用改变极板相对面积的大小或改变极板间距离的方法来改变电容器的电容.

平行板电容器充满介质后与不充介质时电容的比值

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r \quad (7-40)$$

即与相对介电常量成正比,因而 ϵ_r 又称为介质的相对电容率, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 为介质的电容率, ϵ_0 为真空的电容率.

2) 圆柱形电容器

圆柱形电容器由两个同轴的金属圆筒 A、B 构成,如图 7-38 所示. 两个圆筒的长度均为 L ,内筒的外径为 R_A ,外筒的内径为 R_B ,它们之间的介质的介电常量为 ϵ ,设 A 筒带电 $+Q$,B 筒带电 $-Q$. 忽略边缘效应,电荷应各自均匀地分布在 A 筒的外表面和 B 筒的内表面上,单位长度上的电量 $\lambda = \frac{Q}{L}$. 由高斯定理可求得两筒之间距离轴线为 r 的 P 点的电位移矢量 $D = \frac{\lambda}{2\pi r}$,进而求出场强

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_r r}$$

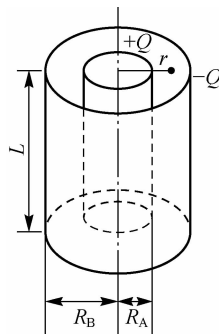


图 7-38

场强方向沿半径方向由 A 筒指向 B 筒. 将场强沿径向积分可得到两筒间的电压为

$$U = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

故圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{R_B}{R_A}\right)} \quad (7-41)$$

单位长度上的电容为

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(R_B/R_A)} \quad (7-42)$$

3) 球形电容器

如图 7-39 所示, 球形电容器由两个同心的金属球壳组成. 内球壳 A 的外径为 R_A , 外球的内径为 R_B , 两球壳之间充满电容率为 ϵ 的电介质. 若内球壳带电 $+Q$, 外球壳带电 $-Q$, 则电荷将形成两个均匀带电球面, 通过高斯定理可求得两球之间距离球心为 r 的 P 点的场强为

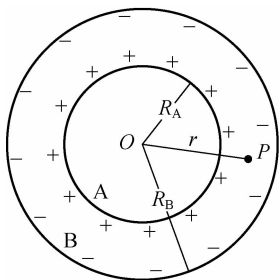


图 7-39

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

方向沿半径方向. 两球之间的电压为

$$U = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

故球形电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon \frac{R_A R_B}{R_B - R_A} \quad (7-43)$$

一个孤立的导体球可当作是球形电容器的一种特殊情况, 即 $R_B \rightarrow \infty$ 的情况. 设若 $R_B \rightarrow \infty$, 此时 B 球壳上的电荷 $-Q$ 将均匀地分布在一个无穷大的球面上, 实际上可以认为该电荷分布已可忽略不计. 此时 B 球壳在无穷远处, 电势为零, A、B 球壳之间的电压就是 A 球壳的电势. 设介质为空气, 则 A 球壳电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

其中 R 为 A 球壳半径, 孤立导体球的电容为

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (7-44)$$

显然, 式(7-44)也可由式(7-43)直接取 $R_B \rightarrow \infty$ 而来.

从以上三种电容器的计算结果可以看出, 两个极板间距越小, 电容的值越大. 但间距小了也会产生另一个问题, 即电容器容易击穿. 对于额定的电压, 两板间距越小, 介质中的场强越强, 当场强超过一定的限度(击穿场强)时, 分子中的束缚电荷能在强电场的作用下变成自由电荷, 这时电介质将失去绝缘性能而转化为导体, 电容器被破坏.

例 7-18 求平行板电容器的电容.

解: 设平行板电容器极板带电面积为 S , 极板间距为 a , 且 S 的线度远大于 a . 首先为两

极板带上等量异号的电荷 $\pm Q$,忽略边缘效应,则其场强的大小为 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$,而

$$U = Ea = \frac{a\sigma}{\epsilon_0} = \frac{aQ}{S\epsilon_0}$$

则有

$$C = \frac{S\epsilon_0}{A}$$

例 7-19 如图 7-40 所示,设内球壳外径和外球壳内径分别为 R_1 和 R_2 ,两球壳同心.求球形电容器的电容.

解:带电情况如图 7-40 所示,计算 E 分布.取高斯球面 S ,球半径为 $r, R_1 < r < R_2$.由高斯定理可得

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

两球壳间的电压为

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}$$

按照电容的定义有

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

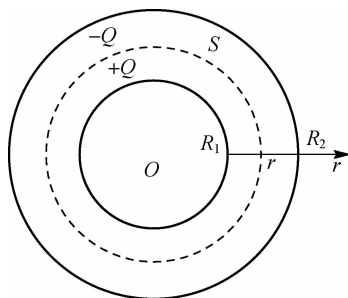


图 7-40

7.6.3 电容器的并联和串联

在实际工作中,一个电容器的电容值或耐压值不一定刚好符合要求,这时可以把几个电容连接起来构成一个电容器组,连接的基本方式有并联和串联两种.

1. 并联电容器

几个电容器的并联如图 7-41 所示.充电以后,每个电容器的两个极板间的电压相等,设为 U ,有

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n$$

U 也就是电容器组的电压.电容器组所带总电量为各电容器带电量之和

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$$

所以电容器组的等效电容为

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} + \dots + \frac{q_n}{U}$$

由于 $\frac{q_i}{U} = C_i$ 为每个电容器的电容,所以有

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (7-45)$$

这说明,当几个电容器并联时,其等效电容等于这几个电容器电容之和.

可见,采用并联方式可增大总的电容,但是耐压不变,所以使用时要注意加在电容器两端的电压不能大于其中耐压最小的那个电容器的额定电压,否则容易击穿电容器.

2. 串联电容器

几个电容器的串联如图 7-42 所示,充电后,由于静电感应,此时各电容器的电量相同.

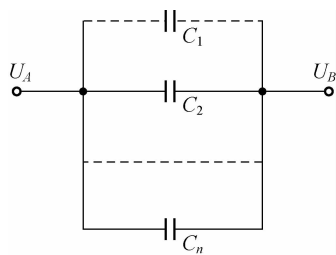


图 7-41

$$q = q_1 = q_2 = \dots = q_n$$

电容器组上的总电压为各电容器的电压之和,即

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

为了方便,我们计算等效电容的倒数为

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} + \dots + \frac{U_n}{q}$$

即

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (7-46)$$

这说明,串联电容器的电容的倒数等于各电容器电容的倒数之和。

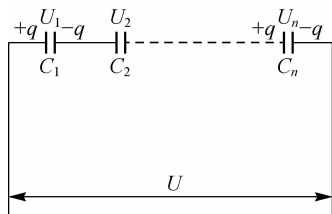


图 7-42

可见,串联后电容器的总电容变小了,但耐压能力提高了.当外加电压一定时,用并联法可储存较多电量,而用串联法则可减少每一电容器所承受的电压,以避免因电压过高而导致电容器被击穿.

例 7-20 两根平行的无限长直导线构成一个电容器.假设导线的半径 a 远小于两导线的轴线之间的距离 d ,且当两导线分别带上等量异号电荷时电荷均匀地分布在表面上,如图 7-43 所示,求单位长度的电容.

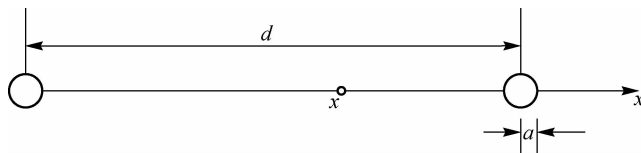


图 7-43

解:在垂直于导线的平面内,取带正电导线的中心 O 为坐标原点,两中心连线的延长线为 x 轴,建立坐标系,如图 7-43 所示.处于 x 轴上、两导线之间的任一点(坐标为 x)的场强的大小可由高斯定理求出

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{d-x} \right)$$

方向沿 x 轴正方向.式中 E' 是导线上单位长度所带电量.两导线间的电势差为

$$U = \int_a^{d-a} \mathbf{E} dx = \int_a^{d-a} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

由此可算得单位长度的电容为

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}$$

从例 7-19 和例 7-20 中可总结出计算电容器电容的步骤如下:

- (1) 给两极板带上等量异号的电荷;
- (2) 计算场分布 E ;
- (3) 利用 E 计算两极板间的电势差 U ;
- (4) 按电容定义求 C .

例 7-21 三个电容器按图 7-44 连接,其电容分别为 C_1 、 C_2 和 C_3 . 当开关 S 断开时,将 C_1 充电到电势差为 U_0 , 然后断开电源, 闭合开关 S, 求各电容器上的电势差.

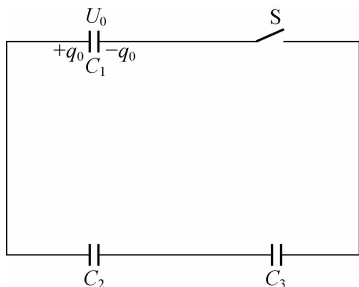


图 7-44

解: 已知在开关 S 闭合前, C_1 电容器所带的电荷量为 q_0 , C_2 和 C_3 极板上所带的电荷量为零. 开关 S 闭合后, C_1 放电, 并对 C_2 、 C_3 充电, 整个电路可看作为 C_2 、 C_3 串联再与 C_1 并联. 设稳定后, C_1 极板上的电荷量为 q_1 , C_2 和 C_3 极板上的电荷量为 q_2 , 因而有

$$q_1 + q_2 = q_0$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_2}{C_3}$$

联解两式得

$$q_1 = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} q_0, \quad q_2 = \frac{C_1^2(C_2 + C_3)}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} U_0$$

$$q_2 = q_0 - q_1 = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} U_0$$

因此得 C_1 、 C_2 和 C_3 上的电势差分别为

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} U_0$$

$$U_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{C_1C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} U_0$$

$$U_3 = \frac{q_2}{C_3} = \frac{C_1C_2}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} U_0$$

7.7 静电场中的电介质

7.7.1 电介质对电容器的影响 相对电容率

如图 7-45 所示, 一面积为 S 、相距为 d 的平行板电容器, 极板间为真空, 其电容为 C_0 . 若对此电容器充电, 实验测得两极板间的电压为 U_0 , 由此可知极板上的电荷为 $Q = C_0 U_0$. 此时

若撤去电源,维持极板上的电荷 Q 不变,并使两极板间充满均匀的各向同性的电介质,实验测得 $U=U_0/\epsilon_r$. 由平行板电容器电容公式可得

$$C=\epsilon_r C_0 \quad (7-47)$$

式中, ϵ_r 称为电介质的相对电容率(或相对介电常数). 相对电容率 ϵ_r 与真空电容率 ϵ_0 的乘积称为电容率 ϵ , 即 $\epsilon=\epsilon_0\epsilon_r$. 空气的相对电容率近似等于 1, 其他电介质的相对电容率均大于 1. 它的大小随电介质的不同而不同, 表 7-2 给出了真空和几种电介质的相对电容率.

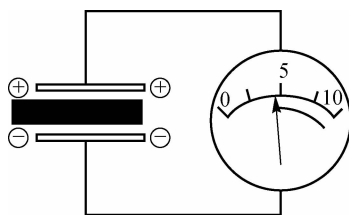


图 7-45

表 7-2 真空和几种电介质的相对电容率

电 介 质	相对电容率	介电强度/(kV · mm ⁻¹)
真空	1	
干燥空气	1.000 6	4.7
蒸馏水	81	30
变压器油	2.4	20
石英玻璃	4.2	25
普通玻璃	7	15
石蜡	2.1	40
蜡纸	5	30
电木	5~7.6	10~20
云母	4~7	80
聚乙烯	2.3	18
聚四氟乙烯	2.0	35
氧化钽	11.6	15
二氧化钛	100	6

注:电介质不发生击穿能安全承受的最大场强称为该电介质的介电强度.

若平行板电容器内充满了均匀的各向同性的电介质时的场强为 E , 电容器内为真空时的电场强度为 E_0 , 由 $U=U_0/\epsilon_r$ 可得

$$E=\frac{E_0}{\epsilon_r} \quad (7-48)$$

式(7-48)表明,在两极板电荷不变的条件下,充满均匀的各向同性的电介质的平行板电

容器中,电介质内任意点的电场强度为原来真空时的场强的 $\frac{1}{\epsilon_r}$.

电介质所能承受的最大电压称为击穿电压,此时电介质中的相应的场强称为击穿场强.

7.7.2 电介质的极化

电介质分子中的电子处于原子核的束缚之中,每个分子可以看成是中性的.但是分子的正电荷和负电荷中心并不集中于一点,在离分子距离比分子本身尺寸大得多的情况下,分子的电荷可以用一个等效的正电荷中心和一个等效的负电荷中心来代替.即分子中全部正电荷对外产生的作用等效于正电荷中心对外产生的作用,负电荷中心的情况也一样.正、负电荷中心都是点电荷,其电量分别与分子正、负电荷总电量相等.所以,在电介质内几乎不存在可自由运动的电荷.当把电介质放到外电场中时,电介质中的电子等带电粒子,也只能在电场力作用下做微观的相对运动.

根据正、负电荷中心的分布,可以将电介质分子分成两大类:无极分子和有极分子.有些材料,如氢、甲烷、石蜡、聚苯乙烯等,它们的分子正、负电荷中心在无外电场时是重合的,这类分子称为无极分子;有些材料,如水、有机玻璃、纤维素、聚氯乙烯等,即使在外电场不存在时,它们的分子正、负电荷中心也是不重合的,这类分子相当于一个有着固有电偶极矩的电偶极子,所以这类分子称为有极分子.但是要注意,所谓正、负电荷中心重合,是对时间平均而言的,就瞬时而言,即使无极分子也是有极的.在外电场的作用下,无极分子电介质将产生位移极化,有极分子电介质则产生转向极化.

1. 无极分子的位移极化

无极分子在没有受到外电场作用时,它的正负电荷的中心是重合的,因而没有电偶极矩,如图 7-46(a)所示.但当外电场存在时,它的正负电荷的中心会发生相对位移,形成一个电偶极子,其偶极矩 P 方向沿外电场 E_0 方向,如图 7-46(b)所示.对一块介质整体来说,由于电介质中每一个分子都成为电偶极子,所以,它们在电介质中的排列如图 7-46(c)所示,在电介质内电偶极子正负电荷相互靠近,因而对于均匀电介质来说,其内部仍是电中性的,但在和外电场垂直的两个端面上就不同了.由于电偶极子的负端朝向电介质一面,正端朝向另一面,所以电介质的一面出现负电荷,另一面出现正电荷,显然这种正负电荷是不能分离的,故为束缚电荷.电介质在外电场作用下,在介质表面出现束缚电荷的现象称为电介质的极化.

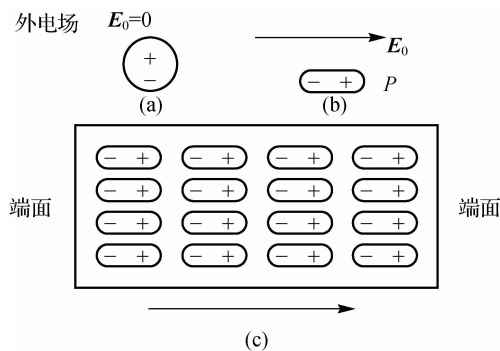


图 7-46

可见,无极分子的电极化是分子的正负电荷的中心在外电场的作用下发生相对位移的结果,这种电极化称为位移极化.

2. 有极分子的转向极化

对于有极分子电介质,虽然每个分子的正电荷中心与负电荷中心不重合,分子具有固有的电偶极矩,但由于分子的热运动,电偶极矩的取向混乱,电介质中所有分子的固有电偶极矩产生的总的效果,平均地说,相互抵消对外不显电性.当把有极分子电介质放入均匀电场中时,各分子的电偶极矩受到外电场的作用,都要转向趋于沿外电场方向排列.由于分子的热运动,分子电偶极矩的这种排列并不是很整齐,但对整个电介质来说,这种转向排列的结果,使电介质在垂直于电场方向的两个侧面上分别出现了正负电荷.由于这些电荷不能离开介质表面,也不能在介质内自由移动,而是被束缚在对应位置的分子中,因而称这些电荷为束缚电荷或极化电荷.有极分子电介质在电场中的这种极化称为转向极化.在转向极化中,分子电偶极矩沿电场方向的转向程度与热运动有关,因而电介质的转向极化与温度有关.

实际上,有极分子电介质在外电场的作用下,同样存在位移极化,但位移极化比转向极化弱得多(约弱一个数量级).

总之,尽管两类电介质极化的微观机制不同,但其结果都是在介质表面出现极化电荷(非均匀电介质内部也会出现极化电荷),因此在对电介质做宏观描述时,不再区分这两种极化.

7.7.3 极化强度

为了定量地描述电介质的极化程度,我们引入极化强度矢量这个物理量.

考虑电介质内任一宏观小、微观大的体积元 ΔV ,当电介质极化后, ΔV 内所有分子的电偶极矩的矢量和 $\sum \mathbf{P}_{分} \neq 0$.我们把 $\mathbf{P}_{分}$ 和 ΔV 之比称为 ΔV 所在点的电极化强度矢量,简称极化强度,用 \mathbf{P} 表示,即

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{P}_{分}}{\Delta V} \quad (7-49)$$

极化强度 \mathbf{P} 是个矢量,在国际单位制中,极化强度的单位为库仑每平方米(C/m^2).若在电介质中各处的极化强度矢量 \mathbf{P} 的大小和方向都相同,则称这样的极化为均匀极化,否则极化是不均匀的.

实验表明,对于大多数常见的各向同性线性电介质,任意一点的极化强度 \mathbf{P} 与该点的总电场强度 \mathbf{E} 成正比,且方向相同,即

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (7-50)$$

式中, χ 称为电介质的极化率,它与材料有关,是材料的一个特性,与场强 \mathbf{E} 无关. χ 大于零,是一个无量纲的纯数.若介质中个点 χ 为常数,则称为均匀介质.

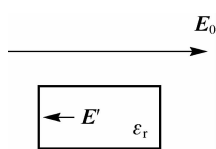


图 7-47

应该强调,式(7-50)中的场强 \mathbf{E} 是所考虑的场点的总场强,它既包括外加电场 \mathbf{E}_0 ,也包括极化电荷所产生的附加电场 \mathbf{E}' (介质极化时产生的极化电荷所激发的电场),附加电场的方向总与原电场的方向相反,如图 7-47 所示,即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' \quad (7-51)$$

分析表明,在电介质内部,极化电荷所产生的附加电场 \mathbf{E}' 总是起着减弱原来的外电场 \mathbf{E}_0 的作用,即 $|\mathbf{E}| < |\mathbf{E}_0|$,因而也总是起着减弱介质极化的作用,通常称为退极化场,其大小依赖于电介质的几何形状和极化率 χ_e .

7.7.4 电位移 有电介质时的高斯定理

在高斯面内不仅会有自由电荷,而且还会有极化电荷.这时,高斯定理应有哪些变化呢?

我们仍以在平行平板电容器中充满各向同性的均匀电介质为例来进行讨论.在如图 7-37 所示的实验中,由两块平行金属板组成电容器,两极板分别带有电量相等、符号相反的电荷,其间均匀地充满电介质时,实验指出 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 / \epsilon_r$,故有 $\mathbf{E}\epsilon_0\epsilon_r = \epsilon_0\mathbf{E}_0$,两边同时对任意封闭曲面积分

$$\oint_S \mathbf{E}\epsilon_0\epsilon_r \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \epsilon_0\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S}$$

令

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \quad (7-52)$$

式(7-52)为电位移矢量的定义式, \mathbf{D} 称为电位移矢量, $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i Q_i / \epsilon_0$,高斯定理变换为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i Q_i \quad (7-53)$$

式(7-53)称为电介质中的高斯定理,其表述为:通过任一封闭曲面(高斯面)的电位移通量等于该闭合曲面所包围的电荷的代数和.式(7-53)是在特殊情况下推导出来的,但是,可以证明:对于一般的情况,即电介质并未充满电场的情况,该式也是成立的.

可以看出,电位移通量只和自由电荷联系在一起.

电位移矢量 \mathbf{D} 、场强 \mathbf{E} 和电极化强度 \mathbf{P} 之间的关系为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (7-54)$$

例 7-22 若导体外有介质,求证:导体表面附近的电位移矢量与导体表面电荷面密度的关系为 $D = \epsilon\sigma$.

证明:如图 7-48 所示,在导体表面附近作一底面为 ΔS 的闭合柱面 S ,其侧面与导体表面垂直.按高斯定理,柱面上的电位移通量为

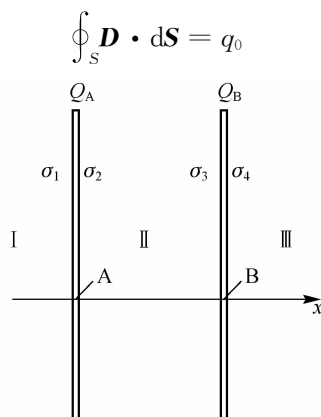


图 7-48

由于在导体内 $E=0$, 故 $D=0$, 所以柱的下底没有电位移通量. 由于导体表面是等势面, 表面附近场强 E 与表面垂直, 故电位移矢量 D 也与表面垂直, 所以柱的侧面也没有电位移通量. 只有柱面上底面有电位移通量, 所以有

$$D\Delta S = \sigma\Delta S$$

得到

$$D = \sigma$$

故命题得证, 同时还有

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

若 σ 为正电荷, D 和 E 垂直于导体表面指向导体外, 否则垂直于表面指向导体内. 若电介质为空气, 则回到原来的导体表面附近场强与电荷面密度的关系 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

例 7-23 一半径为 R 的金属球, 带有电荷 q_0 , 浸没在均匀“无限大”电介质中(电容率为 ϵ), 求球外任一点 P 处的场强及极化电荷分布.

解: 金属球是等势体, 电介质又以球体球心为中心球对称分布, 由此可知电场分布必仍具有球对称性, 所以用有电介质时的高斯定理来计算球外 P 点的场强. 如图 7-49 所示, 过 P 点作一半径为 r 并与金属球同心的闭合球面 S , 由有电介质时的高斯定理可知

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D4\pi r^2 = q_0$$

所以

$$D = \frac{q_0}{4\pi r^2}$$

写成矢量式为

$$\mathbf{D} = \frac{q_0}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

因 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, 所以离球心 r 处 P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r}$$

结果表明: 带电金属球周围充满均匀无限大的电介质后, 其场强减弱到真空时的 $1/\epsilon_r$.

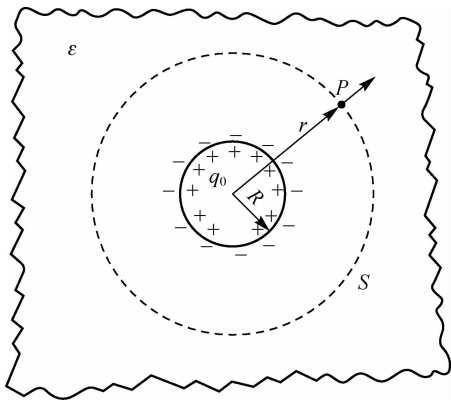


图 7-49

7.8 静电场的能量 能量密度

7.8.1 电容器的电能

一个电容器在未充电时是没有电能的,在充电过程中,外力要克服电荷之间的作用而做功,把其他形式的能量转化为电能.如图 7-50 所示,电容器的电容为 C ,通过一个充电过程,两极板上的电量从 0 达到 Q ,两极板间的电势差为 U .假设电容器在充电过程中某时刻,两极板上的电量为 q ,两极板间的电势差为 U ,此时外力使电量 dq 从负极板到正极板,外力做功为

$$dW = Udq = \frac{1}{C}qdq \quad (7-55)$$

因此充电结束后,外力的总功为

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q qdq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 \quad (7-56)$$

依据能量转换并守恒的思想,一个系统拥有的能量,应等于建立这个系统时所输入的能量.在电容器充电的过程中,能量是通过做功输入电容器中的,外力的功表现为能量转换的量度.于是我们可以肯定,一个电量为 Q 、电压为 U 的电容器储存的电能应该为

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU \quad (7-57)$$

图 7-50 中的电容器形式上是一个平行板电容器,但我们讨论的过程中并没有涉及平行板电容器的特性,而是对任意电容器都能适用,所以式(7-57)的结论是普遍成立的.

7.8.2 能量密度

电容器是一种储能元件,那么电容器的电能是带电体本身所具有的,还是带电体所形成的电场所具有的?也就是说,电能是储存在带电体上,还是储存在电场中?对于这个问题,在静电场的情况下无法做出判断,因为静电场总是与产生它的电荷联系着,但在发现了电磁波后,人们发现,变化的场可以脱离电荷独立存在,而且场的能量是以电磁波的形式在空间传播的,该能量已被成功地应用于无线电通信技术等领域中,这些事实证明了能量是储存在场中的观点.让我们来计算一个平行板电容器的电能.

因为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon S}$$

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd \quad (7-58)$$

式中, $Sd = V$ 表示电场的体积.此结果表明,对一定的介质中一定强度的电场,电能与电场体

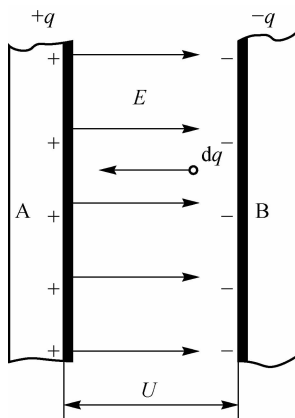


图 7-50

积成正比,这与我们说电能是存储于电场中的说法是一致的.平行板电容器中的电场是均匀电场,因而电场能量的分布也应该是均匀的,所以我们能求出单位体积内的电场能量,即电场的能量密度为

$$w = \frac{W_c}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (7-59)$$

也可表示为

$$w_c = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED = \frac{D^2}{2\epsilon} \quad (7-60)$$

可以证明,式(7-60)是普遍适用的.有了电场能量密度以后,对非均匀的电场,可以通过积分来求出它的能量.在电场中取体积元 dV ,在 dV 内的电场能量密度可看作是均匀的,于是 dV 内的电场能量为 $dW_c = w_c dV$,在体积 V 中的电场能量为

$$W_c = \int dW_c = \int_V w_c dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV$$

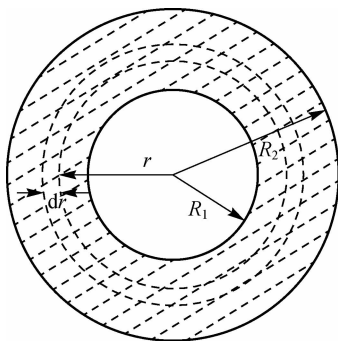


图 7-51

例 7-24 一球形电容器内、外球的半径分别为 R_1 和 R_2 ,如图 7-51 所示.两球间充满相对介电常量为 ϵ_r 的电介质,求此电容器带有电量 Q 时所储存的电能.

解:球形电容器充电后,内外两球分别带有电量 $+Q$ 和 $-Q$.由高斯定理可求出内球内部和外球外部的场强为零,两球之间的场强为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

在两球之间取一个半径为 r ,厚度为 dr 的球壳,它的体积为

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

球壳内的电场能量密度可看作是均匀的,故球壳内的电场能量为

$$dW_c = W_c dV = \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

电容器储存的电能为

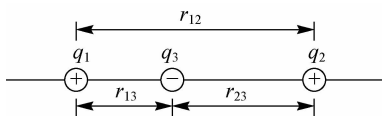
$$W_c = \int dW_c = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

球形电容器的电能也可以直接用电容器储存电能的公式求出,即

$$W_c = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

复习参考题

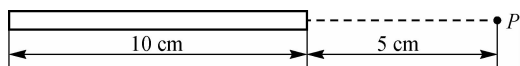
7-1 如题 7-1 图所示,两个正点电荷 q_1 与 q_2 间距为 r_{12} ,在引入另一个点电荷 q_3 后,三个点电荷都处于平衡状态,求 q_3 的位置及大小.



题 7-1 图

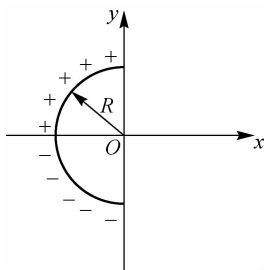
7-2 在电场中某点 P 放入试验电荷 q_0 , 测得电场力为 F , 则该点的场强为 F/q_0 , 若放入另一试验电荷 $-q_0$, 则该点的场强为多少?

7-3 如题 7-3 图所示, 一长为 10 cm 的均匀带正电细杆, 其带电量为 1.5×10^{-8} C. 试求在杆的延长线上距杆的端点 5 cm 处的 P 点的电场强度 ($\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^8$ N · m²/C²).



题 7-3 图

7-4 一根细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形, 沿其上半部分均匀分布有电量 $+Q$, 沿其下半部分均匀分布有电量 $-Q$, 如题 7-4 图所示. 试求圆心 O 处的场强.



题 7-4 图

7-5 实验表明, 在靠近地面处有相当强的电场, 场强 E 垂直于地面向下, 大小约为 100 N/C; 在离地面 1.5 km 高的地方, E 也是垂直于地面向下的, 大小约为 25 N/C. 求:

- (1) 从地面到此高度大气中电荷的平均体密度;
- (2) 假设地球表面处的电场强度完全是由均匀分布在地表面的电荷产生, 求地面上的电荷面密度 [已知 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ C²/(N · m)].

7-6 一半径为 R 的带电球体, 其电荷体密度分别为

$$\begin{cases} \rho = Ar (r \leq R) \\ \rho = 0 (r > R) \end{cases}$$

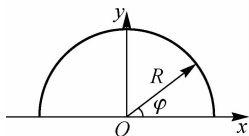
A 为一常数. 试求球体内外的场强分布.

7-7 一半径为 R 、长度为 L 的均匀带电圆柱面, 总电量为 Q . 试求端面处轴线上 P 点的电场强度.

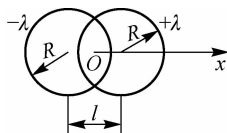
7-8 一带电细线弯成半径为 R 的半圆形, 电荷线密度为 $\lambda = \lambda_0 \sin \varphi$, 式中 λ_0 为一常数, φ 为半径 R 与 x 轴所成的夹角, 如题 7-8 图所示. 试求环心 O 处的电场强度.

7-9 如题 7-9 图所示, 两个平行共轴放置的均匀带电圆环, 它们的半径均为 R , 电荷线密度分别是 $+\lambda$ 和 $-\lambda$, 相距为 l , 试求以两环的对称中心 O 为坐标原点, 垂直于环面的 x 轴

上任一点的电势(以无穷远处为电势零点).

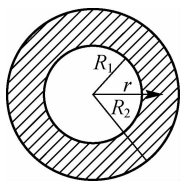


题 7-8 图



题 7-9 图

7-10 电量 q 均匀分布在长为 $2l$ 的细杆上, 求在杆外延长线上与杆端距离为 a 的 P 点的电势(设无穷远处为电势零点).



题 7-11 图

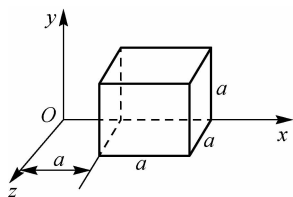
7-11 题 7-11 图所示为一个均匀带电的球层, 其电荷体密度为 ρ , 球层内表面半径为 R_1 , 外表面半径为 R_2 . 设无穷远处为电势零点, 求球层中半径为 r 处的电势.

7-12 电荷以相同的面密度 σ 分布在半径为 $r_1 = 10$ cm 和 $r_2 = 20$ cm 的两个同心球面上. 设无限远处电势为零, 球心处的电势为 $U_0 = 300$ V.

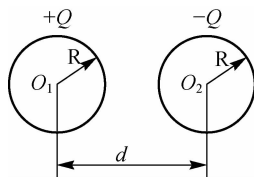
(1) 求电荷面密度 σ ;

(2) 若要使球心处的电势也为零, 外球面上应放掉多少电荷 [$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$]?

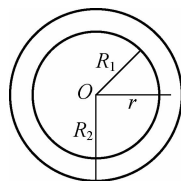
7-13 真空中一立方体形的高斯面, 边长 $a = 0.1$ m, 位于题 7-13 图中所示位置. 已知空间的场强分布为: $E_x = bx, E_y = 0, E_z = 0$. 常数 $b = 1000 \text{ N} / (\text{C} \cdot \text{m})$. 试求通过该高斯面的电通量.



题 7-13 图



题 7-15 图



题 7-16 图

7-14 若电荷以相同的面密度 σ 均匀分布在半径分别为 $r_1 = 10$ cm 和 $r_2 = 20$ cm 的两个同心球面上, 设无穷远处电势为零. 已知球心电势为 300 V, 试求两球面的电荷面密度 σ 的值 [$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$].

7-15 题 7-15 图所示为两个半径均为 R 的非导体球壳, 表面上均匀带电, 带电量分别为 $+Q$ 和 $-Q$, 两球心相距为 d ($d > 2R$). 求两球心间的电势差.

7-16 题 7-16 图所示为一个均匀带电的球层, 其电荷体密度为 ρ , 球层内表面半径为 R_1 , 外表面半径为 R_2 , 设无穷远处为电势零点, 求球层中半径为 r 处的电势.

7-17 半径分别为 1.0 cm 与 2.0 cm 的两个球形导体, 各带电量 1.0×10^{-18} C, 两球心间相距很远, 若用细导线将两球相连接. 求:

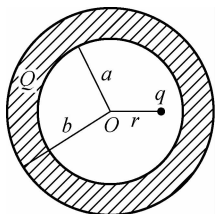
- (1) 每个球所带电量;
- (2) 每个球的电势.

7-18 如题 7-18 图所示, 一内半径为 a 、外半径为 b 的金属球壳, 带有电量 Q , 在球壳空

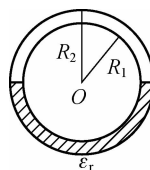
腔内距离球心 r 处有一点电荷 q , 设无限远处为电势零点, 试求:

- (1) 球壳内外表面上的电荷;
- (2) 球心 O 点处, 由球壳内表面上电荷产生的电势;
- (3) 球心 O 点处的总电势.

7-19 半径为 R_1 的导体球和内半径为 R_2 的同心导体球壳构成球形电容器, 其间一半充满相对介电常数为 ϵ_r 的各向同性均匀电介质, 另一半为空气, 如题 7-19 图所示. 试求该电容器的电容.



题 7-18 图



题 7-19 图

7-20 一圆柱形电容器, 内圆柱的半径为 R_1 , 外圆柱的半径为 R_2 , 长为 $L [L \gg (R_2 - R_1)]$. 两圆柱之间充满相对介电常数为 ϵ_r 的各向同性均匀电介质, 设内外圆柱单位长度上带电量(电荷线密度)分别为 λ 和 $-\lambda$, 求:

- (1) 电容器的电容;
- (2) 电容器储存的能量.



第 8 章

稳恒电流的磁场

人们发现磁现象要比发现电现象早很多,早在公元前数百年,古籍中就有了磁石能吸铁的记述.我国东汉时期的王充指出司南勺是个指南器,并在《武经总要》中叙述了制造指南针的方法.12世纪初,我国已将指南针用于航海船上,指南针传入欧洲则已是12世纪末了.

1820年以前,人们虽也曾在自然现象中观察到闪电能使钢针磁化或使磁针退磁等现象,但没能把电现象和磁现象联系起来,直到奥斯特(H. C. Oersted)于1820年发现了通电导线附近小磁针发生偏转的现象,才开创了电生磁相关方面的研究方法.

本章的主要内容有:描述磁场的物理量——磁感强度 B ;毕奥-萨伐尔定律;磁场的高斯定理和安培环路定理;带电粒子在磁场中的运动,安培力;磁场中的磁介质;等等.

8.1 稳恒电流

8.1.1 电流

在静电平衡条件下,导体内部场强为零,导体内的自由电子只有无规则的热运动而无宏观的定向运动.如果在导体内建立一定的电场,则导体中的自由电子将在电场力的作用下做定向运动.大量电荷做有规则的定向运动形成电流.带电粒子在导体中做有规则运动所形成的电流称为传导电流.在金属中传导电流的载流子是自由电子;在电解液中传导电流的载流子是正、负离子和电子.带电粒子及宏观带电体在空间做有规则机械运动所形成的电流称为运流电流.产生电流一般需要两个条件:①存在可以自由运动的电荷(自由电荷);②存在电场.

通过导体任意一个横截面的电量随时间的变化率称为流过该导体的电流强度,用 I 表示,即

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (8-1)$$

电流强度简称电流.国际上规定正电荷流动方向为电流的方向,因而电流总是沿着电场的方向,从高电势处指向低电势处.它是描述电流强弱的物理量,在国际单位制中,电流强度的单位为安培,简称安,用 A 表示.

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$$