

单元一

直流电路



学习目标

- 掌握电路各组成部分的作用及各物理量的意义。
- 理解电压、电流参考方向在电路分析中的作用,能正确使用万用表测量直流电压和电流。
- 了解电阻、电感、电容元件的特性,能根据电路需要正确选择元件参数。
- 掌握理想电压源和电流源的特性及实际电源的两种模型。
- 掌握基尔霍夫定律、戴维南定理及其在复杂电路分析中的应用,会应用戴维南定理解决实际电源替代问题。



课程导入

人们在日常生活、生产和科研中广泛使用着各种电路,如家用电器使用的单相交流电路,收音机、电视机中的放大电路、信号的调谐电路,电气设备的控制电路,以及科研生产所需的各种有专门用途的电路等。

本单元从电路的基本概念出发,重点介绍电路的基本定律、定理和分析方法,这是电路分析、电气控制和电子技术的基础。

一、电路的基本概念

(一)电路与电路模型

1. 电路

电路是电流流通的路径。它是由一些电气设备和元器件按一定方式连接而成,能够实现某些预期功能的电流通路。例如,图 1-1(a)是一个简单的手电筒照明电路的实际电路。

电路由电源、负载和中间环节三个部分组成,如图 1-1(b)所示。



电源是提供电能或信号的器件,如干电池、发电机、信号源等,由直流电源供电的电路是直流电路,由交流电源供电的电路是交流电路;负载是电路中吸收电能或输出信号的器件,如电灯、电动机、扬声器等;连接电源与负载之间的部分是中间环节,包括连接电源和负载的导线、开关和熔断器,监测和保护电路的设备及仪器仪表等。

电路的一种作用是实现电能的传输、分配和转换,如由发电机、变压器、输电线、开关、电动机等设备元件组成的电能传输与转换电路;电路的另一种作用是实现信号的传输、存储和处理,如电视机电路是将电能及电信号转换、处理为图像和声音信号。

2. 电路模型

实际电路是由具有不同作用、特性的电路元件组成的,如发电机、变压器、电阻器、电容器和电感线圈等,它们的电磁性质和物理过程较为复杂。为了便于对实际问题进行分析和计算,在一定条件下,忽略实际元件的次要性质,只考虑其主要性质,将其近似看成理想电路元件,简称电路元件。每个理想电路元件只表示一种电磁特性,如电阻元件只表示消耗电能的特性,电感元件只表示存储磁场能量的特性,电容元件只表示存储电场能量的特性。

根据实际电路元件的主要电磁特性,用一个或若干理想电路元件来模拟实际电路元件,再根据实际元件的连接方式,用理想导线连接起来,就构成了电路模型,如图 1-1(c)所示。

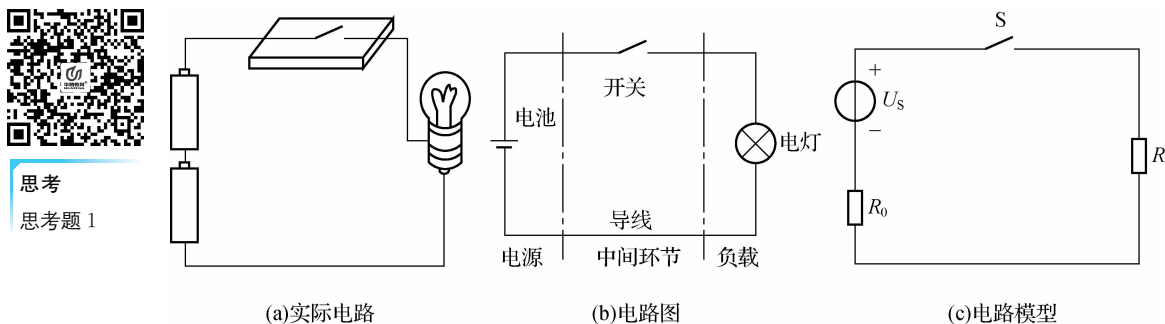


图 1-1 手电筒照明电路

(二) 电路的基本物理量

1. 电流

电荷的定向运动形成电流。如果电流的方向不随时间变化,称为直流电流;如果电流的方向和大小都不随时间变化,称为稳恒直流电流。直流电流简称 DC,用大写字母 I 表示。电流的基本单位为安培,简称安,用字母 A 表示,常用的单位还有毫安(mA)、微安(μA)。

$$1 \text{ A} = 10^3 \text{ mA} = 10^6 \mu\text{A}$$

$$1 \text{ kA} = 10^3 \text{ A}$$

习惯上规定正电荷运动的方向为电流的正方向。

在电路的分析计算中,如果事先不能判定电流的实际方向,可以先任意假定一个电流的方向,这个假定的电流方向称为电流的参考方向。按参考方向进行分析计算出的电流,当结果为正值时,说明电流的实际方向与参考方向一致;当结果为负值时,说明电流的实际方向

与参考方向相反。根据计算结果的正负和参考方向就能确定出电流的实际方向,如图 1-2 所示。

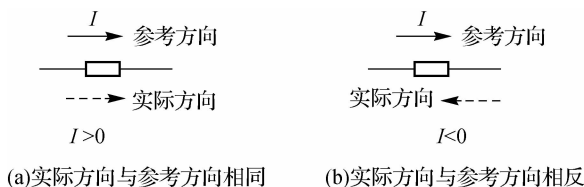


图 1-2 电流的方向



思考

思考题 2



提示

直流电流的测量用万用表的电流挡。首先选择合适的量程,然后按参考方向(电流从红表笔流进)将表串联在电路中试测,若指针正偏,电流值记“+”,说明电流的实际方向与参考方向一致;若指针反偏,应立即对调红黑表笔,电流值记“-”,说明电流的实际方向与参考方向相反。

2. 电压

电场力将单位正电荷从电场中的 a 点移到 b 点所做的功,称为 a 、 b 两点间的电压,电压是产生电流的根本原因。灯管之所以发光,是因为它两端加上了电压。电压的大小反映了电场力做功的本领,即

$$U_{ab} = \frac{dW}{dq} \quad (1-1)$$

电压的基本单位为伏特,简称伏,用字母 V 表示,常用的单位还有千伏(kV)、毫伏(mV)及微伏(μV)。

$$1 \text{ kV} = 10^3 \text{ V} = 10^6 \text{ mV} = 10^9 \mu V$$

电压的实际方向规定为正电荷在电场中受电场力作用的方向。与电流一样,由于电压的实际方向往往事先不能判定,因此可指定任意方向作为电压的参考方向。电压的参考方向可以用带双下标的字母,如 U_{ab} 表示,也可用“+”“-”或箭头表示,如图 1-3 所示。

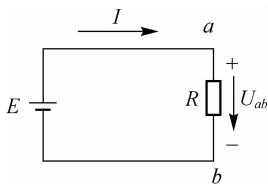


图 1-3 电压的参考方向及表示形式

按照所假设的参考方向分析计算时,当电压值为正时,表示电压的实际方向与参考方向相同;当电压值为负时,表示电压的实际方向与参考方向相反。电压的实际方向与参考方向的关系如图 1-4 所示。

在电路的分析和计算中,电压和电流参考方向的选择,原则上是任意的。为方便起见,



对一段电路或元件的电压和电流取一致的参考方向,称为关联参考方向;反之则称为非关联参考方向,如图 1-5 所示。

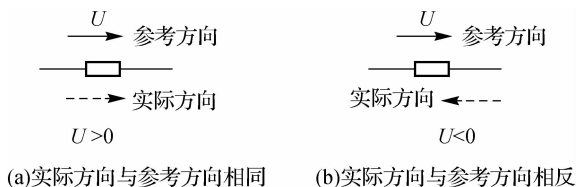


图 1-4 电压的方向

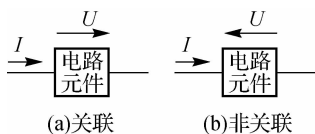


图 1-5 电压与电流参考方向示意图



提示

直流电压的测量用万用表的直流电压挡。首先选择合适的量程,然后按照参考方向将红表笔接“+”,黑表笔接“-”试测,若指针正偏,电压值记“+”,说明电压的实际方向与参考方向一致;若指针反偏,应立即对调红黑表笔,电压值记“-”,说明电压实际方向与参考方向相反。

3. 电位

在电子线路的分析中经常用到电位的概念,所谓电位,就是电路中某点到参考点之间的电压。电位的单位与电压相同,用字母 V 表示。

参考点的选取原则上是任意的,但实际工程技术中常选择大地作为零电位参考点,设备外壳接地的,与机壳相连的点都是零电位点;电子线路中一般选取导线的公共点(往往是电源的一个极)为参考点,用符号“ $\perp$ ”表示。

图 1-6 中选取 b 点为参考点,则 $V_b = 0$, $V_a = U_{ab}$ 或 $V_a = U_E = E$ 。

电路中两点之间的电压等于两点电位之差,即

$$U_{ab} = V_a - V_b \quad (1-2)$$

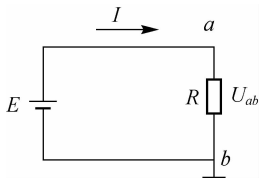


图 1-6 参考点的表示方法



思考

思考题 3

在电子线路中,通常选择电源的一个极为参考点,图 1-7 所示的电路可以简化为图 1-8 所示的形式,不画电源,只标出电位值。



例 1-1 在图 1-7 所示电路中, $E_1=40\text{ V}$, $E_2=5\text{ V}$, $R_1=R_2=10\ \Omega$, $R_3=5\ \Omega$, $I_1=3\text{ A}$, $I_2=-0.5\text{ A}$, $I_3=2\text{ A}$ 。取 d 点为参考点, 求各点的电位及电压 U_{ab} 和 U_{bc} 。

解 以 d 点为参考点, 则 $V_d=0$, $V_a=U_{ad}=E_1=40\text{ V}$

或

$$V_a=U_{ab}+U_{bd}=I_1R_1+I_3R_3=(3\times 10+2\times 5)\text{ V}=40\text{ V}$$

$$V_b=U_{bd}=I_3R_3=2\times 5=10\text{ V}$$

$$V_c=U_{cb}+U_{bd}=I_2R_2+10=(-0.5\times 10+10)\text{ V}=5\text{ V}$$

或

$$V_c=E_2=5\text{ V}$$

可得

$$U_{ab}=V_a-V_b=(40-10)\text{ V}=30\text{ V}$$

$$U_{bc}=V_b-V_c=(10-5)\text{ V}=5\text{ V}$$

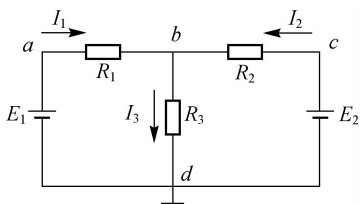


图 1-7 例 1-1 的电路

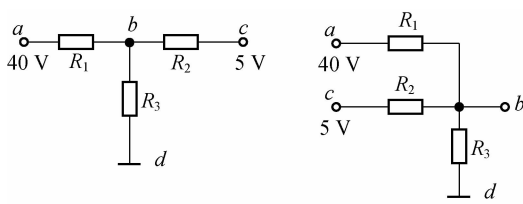


图 1-8 简化电路

如果选取图 1-7 中的 b 点为参考点, 如图 1-9 所示, 再求各点的电位及电压 U_{ab} 和 U_{bc} 。

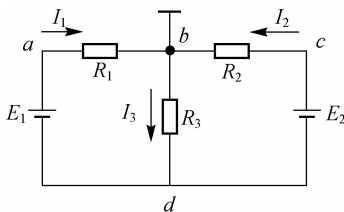


图 1-9 选择 b 为参考点

如果选择 b 点为参考点, 则

$$V_b=0$$

$$V_d=U_{db}=-I_3R_3=-10\text{ V}$$

$$V_a=U_{ab}=I_1R_1=30\text{ V}$$

$$V_c=U_{cb}=I_2R_2=-5\text{ V}$$

可得

$$U_{ab}=V_a-V_b=30\text{ V}-0=30\text{ V}$$

$$U_{bc}=V_b-V_c=0-(-5)\text{ V}=5\text{ V}$$

对比两次计算结果可见, 参考点选择不同, 电路中各点的电位值随着改变, 所以电位值是相对的, 而任意两点之间的电位差, 即电压值是不变的, 是绝对的。

在分析计算电路时,一个电路中只能选择一个参考点。电路中各点的电位与参考点的选择有关,但电路中任意两点间的电压值与参考点的选择无关。

4. 电动势

电动势是衡量电源力对电荷做功能力的物理量,是电源力将单位正电荷从低电位点(电源的负极)移动到高电位点(电源的正极)所做的功。电动势用字母 E 表示,其单位与电压相同。电动势的实际方向是由电源低电位(电源负极)指向高电位(电源正极),所以电源两端电压的方向与电动势的方向相反。电源开路电压值等于电动势的值。

5. 电功率

电场力在单位时间内所做的功,称为电功率,简称功率。功率的单位是瓦特,简称瓦,用字母 W 表示。

计算电功率时,必须先设定一个元件上电流和电压的参考方向,如果选择关联参考方向,则功率的计算公式为

$$P=UI \quad (1-3)$$

如果选择非关联参考方向,则功率的计算公式为

$$P=-UI$$

如果功率的计算结果为正值,即 $P>0$,则说明这个元件在电路中是吸收功率的,是负载;如果功率的计算结果为负值,即 $P<0$,则说明这个元件在电路中是发出功率的,是电源。

例 1-2 一个收音机供电电路如图 1-10 所示,用万用表测出收音机的供电电流为 80 mA,电源电动势为 3 V,忽略电源内阻,收音机和电源的功率各是多少? 分别说明是发出功率还是吸收功率。

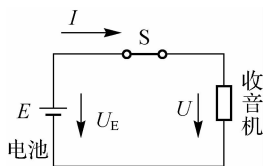


图 1-10 例 1-2 题图

解 收音机的电流与电压的参考方向是关联参考方向,所以

$$P=UI=3 \times 80 \times 10^{-3} \text{ W}=0.24 \text{ W}$$

结果为正,说明收音机吸收电功率。

电池的电流参考方向与电压参考方向相反,是非关联参考方向,所以

$$P_E=-U_E I=-3 \times 80 \times 10^{-3} \text{ W}=-0.24 \text{ W}$$

结果为负,说明电池发出电功率。

例 1-3 如果例 1-2 题中的电池电压已经降为 2 V,现将收音机换为充电器,电路如图 1-11 所示。充电电流 $I=-150 \text{ mA}$,问此时电池的功率为多少? 电池是吸收功率还是发出功率? 充电器的功率为多少? 充电器是吸收功率还是发出功率?

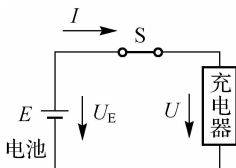


图 1-11 例 1-3 题图

解 电池的电流与电压的参考方向是非关联的,所以

$$P_E = -U_E I = -2 \times (-150 \times 10^{-3}) \text{ W} = 0.3 \text{ W}$$

结果为正,说明电池吸收功率,这时电池是负载。

充电器的电流与电压的参考方向是关联的,所以

$$P_E = U_E I = 2 \times (-150 \times 10^{-3}) \text{ W} = -0.3 \text{ W}$$

结果为负,说明充电器发出功率,它是电路中的电源。

电源发出的功率等于负载消耗的功率,在一个电路中功率的代数和为零,即功率平衡。

(三) 电路基本元件

电路中的元件,如不另加说明,则都指理想元件。理想电路元件的端电压与通过它的电流之间都有确定的关系,这种电压与电流的关系称为元件的伏安特性。

1. 电阻元件

电阻元件是从实际电阻器抽象出来的理想元件模型,如灯泡、电阻炉、电烙铁等实际电阻器件都可视为电阻元件,如图 1-12 所示。电阻元件的伏安特性为通过坐标原点的直线,如图 1-13 所示,它表明电压与电流成比例关系,这类电阻元件称为线性电阻元件,其两端的电压与电流服从欧姆定律,即

$$u = Ri \text{ 或 } i = \frac{u}{R} \quad (1-4)$$

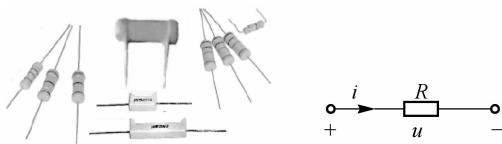


图 1-12 电阻元件

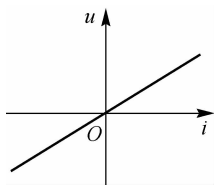


图 1-13 线性电阻元件的伏安特性

线性电阻元件吸收的功率为

$$P = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R} \quad (1-5)$$



提示

不论 u 、 i 是正值还是负值, P 总大于零, 上式说明电阻元件总是消耗电功率的, 与电流电压的实际方向没有关系, 电阻元件具有分压和限流的作用。

2. 电感元件

理想电感元件简称电感元件,它是从实际电感线圈中抽象出来的理想化模型,如图 1-14(a)所示。当电感线圈中通以电流时,在其内部及周围会建立磁场。线圈中的电流变化时,磁场也随之变化,并在线圈中产生自感电动势。当线圈中的电压、电流和电动势的参考方向如图 1-14(b)所示时,则有

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (1-6)$$

式(1-6)表明,电感元件两端的电压与它的电流对时间的变化率成正比,比例系数 L 称为电感。

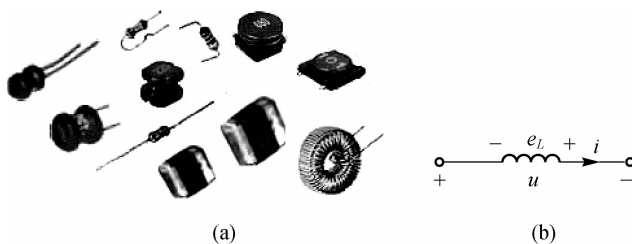


图 1-14 电感元件

电感的单位是亨(H),工程上采用毫亨(mH)或微亨(μH)。

$$1 \text{ H} = 10^3 \text{ mH} = 10^6 \mu\text{H}$$

习惯上把电感元件称为电感,因此电感既表示电感元件又表示元件参数。电感元件储存的磁场能量为

$$W_L = \int_0^t ui \, dt = \int_0^i Li \, di = \frac{1}{2} Li^2 \quad (1-7)$$

式(1-7)表明,电感元件在某时刻储存的磁场能量,与该时刻流过的电流的平方成正比,如图 1-15(a)所示。电感元件不消耗能量,是储能元件。 LC 滤波器、天线线圈、振荡线圈、扼流圈、偏转线圈等都是利用电感的通直流阻交流的性质应用于电子通信设备的。

3. 电容元件

理想电容元件简称电容元件,是从实际电容器抽象出来的理想化模型。电容器加上电压后,两极板出现等量异号电荷,并在两极板间形成电场。当忽略电容器的漏电阻和电感时,可将其抽象为只具有储存电场能量性质的电容元件。

当电路中的电压、电流参考方向如图 1-15(b)所示时,则有

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (1-8)$$

式(1-8)表明,通过电容元件的电流与该时刻元件两端电压的变化率成正比。

电容既表示电路元件,又表示元件参数。其单位是法拉(F),工程上一般采用微法(μF)和皮法(pF)。

$$1 \text{ F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{ pF}$$

电容元件极板间储存的电场能量为

$$W_C = \int_0^t ui \, dt = \int_0^u Cu \, du = \frac{1}{2} Cu^2 \quad (1-9)$$

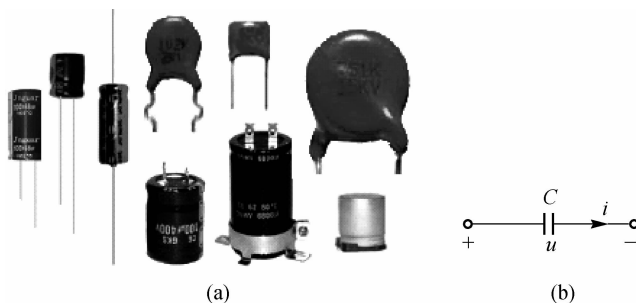


图 1-15 电容元件

式(1-9)表明,电容元件在某时刻储存的电场能量与该时刻元件电压的平方成正比。电容元件不消耗能量,也是一种储能元件。电容在电子线路和控制电路中应用广泛,多用于电容滤波、隔直、交流耦合、交流旁路等,也可以与电感组成调谐电路、滤波电路和振荡电路。

4. 理想电压源

无论流过多大的电流,都能提供确定电压的电路元件称为理想电压源,即

$$U = U_S \text{ 或 } u(t) = u_s(t) \quad (1-10)$$

电压源输出的电压是定值或是时间 t 的函数,而与外电路无关;通过电压源的电流取决于外电路。常见的电压源有直流电压源和正弦交流电压源。图 1-16 所示为理想电压源及其外特性。

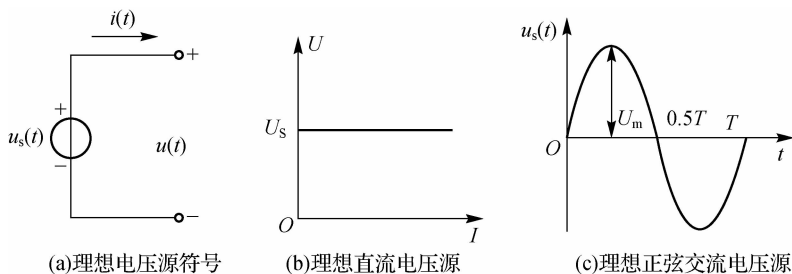


图 1-16 理想电压源

通常用的直流稳压电源可认为是一个理想电压源,如果一个电压源的内阻 R_S 为零,则称为理想电压源。

5. 理想电流源

在电路中,无论它的端电压是多少,都能提供确定电流的电路元件称为理想电流源。图 1-17 是理想电流源的符号和伏安特性曲线, I_S 为理想电流源的电流,其电压电流关系为

$$I = I_S \quad (1-11)$$

理想电流源输出的电流是定值,与外电路无关,其两端的电压 U 决定于外电路。

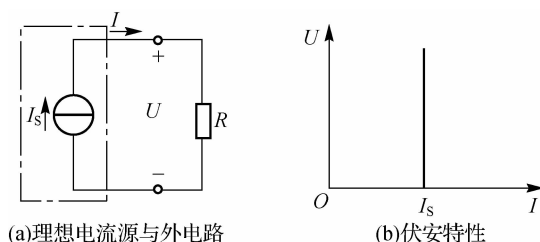


图 1-17 理想电流源

理想电流源实际上是不存在的,但如果电流源的内阻远大于负载电阻,则电流基本恒定,可认为是理想电流源。在实际使用的电源中,电流源虽并不多见,但恒流电源(或称恒流器)、光电池和在放大区工作的三极管都可近似地认为是理想电流源。

6. 实际电源的两种电路模型

理想电源是不存在的,电路中的许多实际电源,如电池、发电机或信号源,都有一定的内电阻,要消耗一部分电能。为分析和计算方便,将实际电源等效为由一个理想电压源和一个电阻元件串联的电压源模型,或等效为一个由理想电流源和一个电阻元件并联的电流源模型。

图 1-18(a)所示为实际电源的电压源模型,其端电压为

$$U = U_s - R_s I \quad (1-12)$$

式(1-12)称为实际电压源的外特性(输出伏安特性)关系式,当负载开路时, $I=0, U=U_s$;当负载短路时, $U=0, I=U_s/R_s$ 。图 1-18(b)为实际电压源外特性曲线。从电压源模型的伏安特性可以看出,内阻越小,输出电压随电流的变化就越小,即输出电压越稳定。

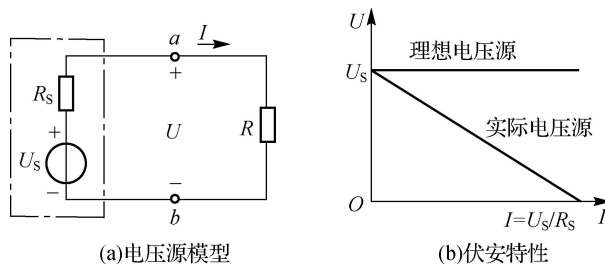


图 1-18 电压源模型

实际电源除了采用理想电压源与电阻元件串联的电压源模型外,还可以采用理想电流源与电阻元件并联的电流源模型,如图 1-19 所示。

由图 1-19(a)可得电流源的外特性(输出伏安特性)关系为

$$I = I_s - \frac{U}{R_s}$$

$$U = R_s I_s - R_s I \quad (1-13)$$



思考

思考题 4

或

由式(1-13)可作出电流源外特性曲线,如图 1-19(b)所示。当电流源短路时,输出电压 $U=0$, I_S 全部成为输出电流,即 $I=I_S$;当电流源开路时,输出电流 $I=0$, I_S 全部从内阻中通过,内阻 R_S 的电压最大,即开路电压最大, $U_{OC}=I_S R_S$ 。从电流源模型的伏安特性可以看出,内阻越大,输出电流随电压变化越小,即输出电流越稳定。

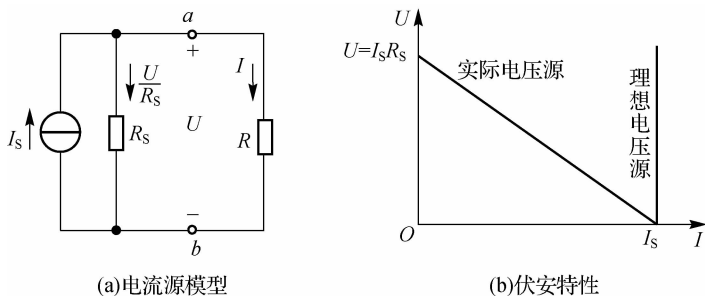


图 1-19 电流源模型

一个具有内阻 R_S 的实际电源的两种电路模型,即电压源模型和电流源模型,对外电路而言,其作用是等效的,即它们具有相同的外特性。对比式(1-12)和式(1-13)可知, U_S 与内阻 R_S 串联的电压源模型,可以等效为 I_S 与内阻 R_S 并联的电流源模型,而 $I_S=U_S/R_S$; I_S 与内阻 R_S 并联的电流源模型,可以等效为 U_S 与内阻 R_S 串联的电压源模型,而 $U_S=I_S R_S$ 。实际电压源与实际电流源的等效变换如图 1-20 所示。

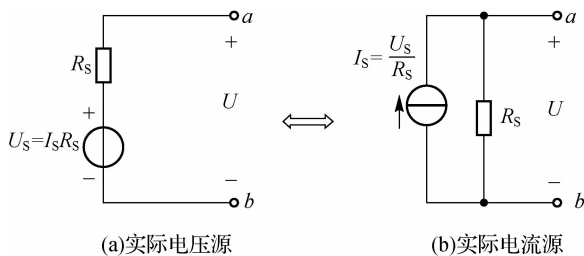


图 1-20 实际电压源与实际电流源的等效变换

在进行两种电源模型的等效变换时应注意以下几点。

- (1) 两种电源模型的等效,只是对电源外部电路等效。
- (2) 变换时,两种电源模型的极性必须保持一致,即电流源流出电流的一端与电压源的正极性端相对应。
- (3) 理想电压源和理想电流源不能进行这种等效变换。

(四) 电路的三种工作状态

电路的工作状态有三种:空载(开路或断路)、负载(通路)和短路。

1. 空载状态

在图 1-21 中,开关 S 断开时,电源与负载断开,电路中的电流为零,这种状态称为空载状态或开路状态。此时 $I=0$,电源端电压 $U=U_S$,电源不输出电能,即

$$I=0, U=U_S, P=0$$

空载时负载电阻 R_L 没有电流通过,因此 R_L 上没有电压降。开关两端电压就等于 U_S ,根据这个特点,利用万用表电压挡可以查找电路中的开路故障点。

2. 负载状态

在图 1-22 所示电路中,当开关 S 闭合,电源与负载接通,就是电源有载工作状态,即负载状态。

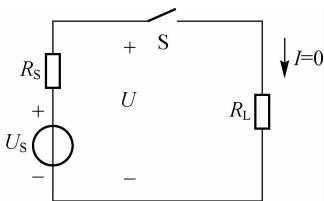


图 1-21 空载状态

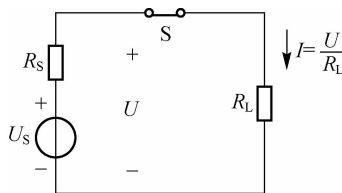


图 1-22 负载状态

根据欧姆定律可得

$$\begin{aligned} I &= \frac{U_S}{R_S + R_L} \\ U &= IR_L = U_S - IR_S \\ P &= UI = U_S I - I^2 R_S \end{aligned} \quad (1-14)$$

式(1-14)中, $U_S I$ 为电压源产生的电功率; $I^2 R_S$ 为电源内阻消耗的电功率; $P = UI$ 是电源输出的电功率,即负载 R_L 消耗的电功率。可见整个电路的功率是平衡的。

输出功率除了与电源有关外,还决定于负载的大小。在恒压供电系统中,一般用电设备都是并联于供电线路上的,因此接入的负载越多,总电阻越小,电路中的电流便越大。在电工技术中把这种情况称为负载增大。



提示

负载的大小是指负载电流的大小或功率的大小,而不是电阻的大小。

用电设备和元器件的性能指标和限定的工作条件,称为额定值,通常标在电气设备的铭牌上或说明书中。用电设备在额定电压 U_N 作用下工作,消耗额定功率 P_N 的状态称为电路的额定工作状态,这种负载状态是最合理、最经济和最安全的。当实际电流或功率大于额定值时,称为过载,过载会降低设备的使用寿命,甚至会损坏用电设备及电源;当实际电流或功率小于额定值时,称为欠载,欠载时,电气设备不能正常发挥其效能。

3. 短路状态

在图 1-22 所示电路中,电源两端没有经过负载而直接连在一起时,称为电源被短路,如图 1-23 所示,此时

$$I = \frac{U_S}{R_S}$$

由于电源的内电阻一般很小,短路时电流将比正常电流大很多倍,电源产生的电功率全部被内电阻消耗,如果没有短路保护措施,会使电源或导线严重过热而烧毁,甚至发生火灾。

在电路中接入熔断器和自动断路器,严格遵守操作规程,定期检查电气设备及线路绝缘情况,是避免短路事故的有效安全措施。

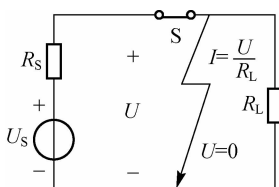


图 1-23 短路状态

但有时为了某种技术需要,可将局部电路短路或按技术要求对电源设备进行短路试验,如测量变压器的铜损,则是通过对变压器进行短路试验完成的。

二、直流电路的分析方法

实际电路的结构和功能多种多样,因此,必须根据电路的结构特点,采用合适的分析方法。对于简单直流电路,可应用欧姆定律和电阻等效变换法求解;对于复杂电路,可应用基尔霍夫定律和相关定理来求解。

(一)电阻等效

1. 电阻的串联

两个或多个电阻无分支地依次相连,各个电阻中通过同一电流,称为电阻的串联,如图 1-24(a)所示。

串联电阻电路有以下特点。

(1)通过各个电阻的电流相等,即

$$I = I_1 = I_2 = \cdots = I_n \quad (1-15)$$

(2)串联电路的总电压等于各电阻上电压的代数和,即

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \quad (1-16)$$

(3)串联电路的总电阻(等效电阻)等于各电阻之和,即

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \quad (1-17)$$

(4)各串联电阻电压与其阻值成正比,即

$$U_n = IR_n = \frac{U}{R} R_n \quad (1-18)$$

2. 电阻的并联

两个或多个电阻并列连接在电路中两个公共端点之间,每个电阻的端电压相同,这样的连接方式称为电阻的并联,如图 1-24(b)所示。

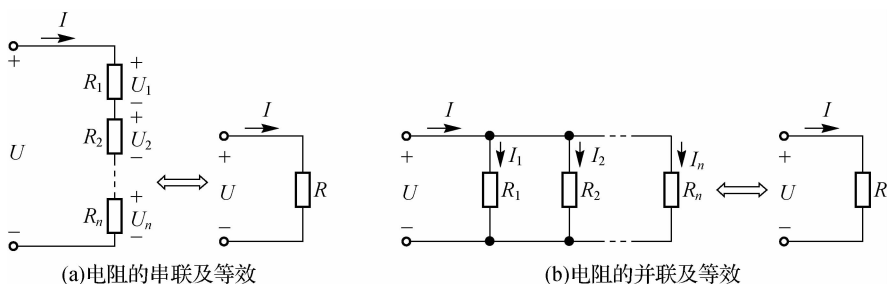


图 1-24 电阻的等效变换

并联电阻电路具有以下特点。

(1) 各并联电阻的端电压相等, 即

$$U = U_1 = U_2 = \cdots = U_n \quad (1-18)$$

(2) 流过并联电路的总电流等于各支路电流之和, 即

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n \quad (1-19)$$

(3) 并联电路的总电阻(等效电阻)的倒数, 等于各个并联电阻倒数之和。

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad (1-20)$$

(4) 流过各并联电阻的电流与其阻值成反比, 即

$$I_n = \frac{U}{R_n} = \frac{R}{R_n} I \quad (1-21)$$



思考
思考题 5

民用供电电路中的照明灯及家用电器等都是并联在 220 V 的交流电源上的, 一个用电器故障或断开, 不影响其他用电器的工作。

例 1-4 如图 1-25 所示, 由两节 5 号电池供电的收录机, 用万用表测得它的最大工作电流为 100 mA, 要想改用直流电源供电。现有一个 9 V 的直流电源, 采用串联分压的方式, 试选择串联电阻, 并画出电路图。

解 画出如图 1-26 所示的电路。其中, R_1 是要选择的电阻, R_2 为收录机工作时的等效电阻。

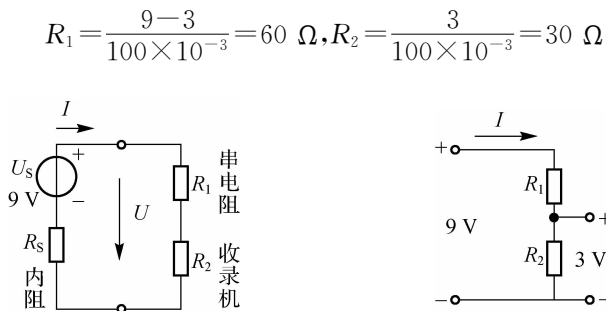


图 1-25 实际电路

图 1-26 例 1-4 题图

查电阻手册可知标称电阻没有 60 Ω , 则取最接近的 56 Ω 。

在选择电阻时不能只考虑阻值, 还应考虑功率值, 即

$$P_{R_1} = I^2 R_1 = 100 \times 10^{-3} \times 6 = 0.6 \text{ W}$$

查电阻手册,功率级没有 0.6 W 的电阻,则取大于并最接近计算值的 1 W,即 R_1 选择 56 Ω ,即功率级为 1 W 的电阻。

(二)基尔霍夫定律

电路中各个元件的电流和电压受到两类约束:一类是元件自身特性对电压、电流的约束,另一类是电路结构对电压、电流的约束。基尔霍夫电流定律(KCL)、基尔霍夫电压定律(KVL)反映了电路结构对电流、电压的约束关系。

1. 电路结构的基本术语

支路:电路中流过同一电流的每一个分支称为支路。图 1-27 中的 $defa$ 、 $dcba$ 和 ad 都是支路, I_1 、 I_2 和 I_3 箭头所标方向分别是以上三条支路电流的参考方向。

节点:三条或三条以上支路的汇连接点称为节点。图 1-27 中共有 a 和 d 两个节点。

回路:电路中任意闭合的路径称为回路。图 1-27 中有 $adefa$ 、 $adcba$ 和 $abcdefa$ 三个回路。

网孔:内部不含其他支路的回路,即最简单的回路称为网孔。 $adefa$ 和 $adcba$ 都是网孔。

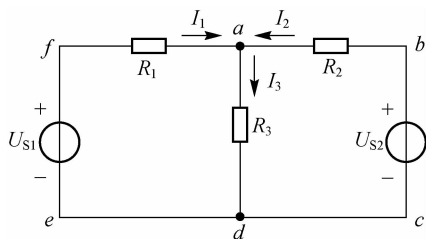


图 1-27 电路术语示意图



动画

基尔霍夫电流定律

2. 基尔霍夫电流定律(KCL)

基尔霍夫电流定律的内容是:在任意瞬间,通过任一节点所连的各支路电流的代数和恒等于零,即

$$\sum I = 0 \quad (1-22)$$

也可以写成

$$\sum I_{\text{入}} = \sum I_{\text{出}} \quad (1-23)$$

式(1-23)表明,任意瞬间,流入任一节点电流之和恒等于流出该节点的电流之和,流入和流出均以电流的参考方向为依据。

运用 KCL 解题时,应先标出各支路电流的参考方向,列 $\sum I = 0$ 表达式时,如果规定流入节点的电流取“+”,则流出节点的电流就取“-”;反之亦然。

例如,在图 1-27 中,对节点 a 可以写出

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

也可将上式写成

$$I_1 + I_2 = I_3$$

KCL 不仅适用于节点,也可以推广应用于电路中任意假定的闭合面。例如,三极管放



大电路,如图 1-28 所示,对虚线所包围的闭合面,可将其视为一个节点,而节点外三条支路的电流关系可应用 KCL 得

$$I_B + I_C - I_E = 0 \text{ 或 } I_B + I_C = I_E$$

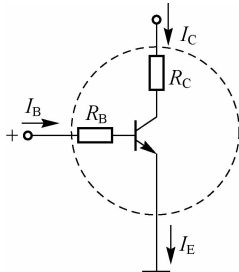


图 1-28 KCL 推广应用

例 1-5 已知图 1-28 中的 $I_C = 1.5 \text{ mA}$, $I_E = 1.54 \text{ mA}$, 求 I_B 。

解 根据 KCL 可得

$$I_B + I_C = I_E$$

$$I_B = I_E - I_C = (1.54 - 1.5) \text{ mA} = 0.04 \text{ mA} = 40 \text{ } \mu\text{A}$$

3. 基尔霍夫电压定律(KVL)

基尔霍夫电压定律的内容是:在任意瞬间,沿任一回路绕行一周(顺时针或逆时针方向),回路中各个元件电压的代数和恒等于零,即

$$\sum U = 0 \quad (1-24)$$

运用 KVL 解题时,首先应设定各个支路的电流方向、各元件已知或未知电压的参考方向以及回路的绕行方向(顺时针方向或逆时针方向均可),若元件电压的参考方向与回路的绕行方向一致,该电压前面取“+”,反之取“-”。

例 1-6 列出图 1-29 所示电路中回路 I 和回路 II 的 KVL 表达式。

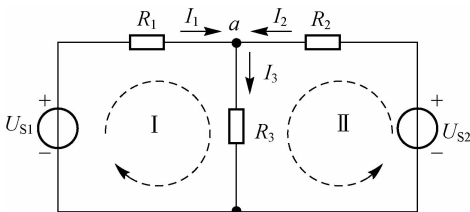


图 1-29 KVL 举例

解 标出各支路的电流方向、回路的绕行方向,如图 1-29 所示。列回路 $\sum U = 0$ 表达式如下。

$$\text{回路 I: } -U_{S1} + I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0$$

$$\text{回路 II: } -U_{S2} + I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0$$

KVL 除了应用于闭合回路外,也可推广应用于任意不闭合回路,列写回路电压方程时,必须将开路处电压列入方程。



思考

思考题 6

例 1-7 图 1-30 所示电路为某电路中的一部分, 设各支路电流方向和回路绕行方向如图中所示, 试求 a 、 b 两点间电压 U_{ab} 的表达式。

解 根据图示电流参考方向和回路绕行方向, 列 KVL 方程如下。

$$U_{ab} + U_{S3} + I_3 R_3 - I_2 R_2 - U_{S2} - I_1 R_1 - U_{S1} = 0$$

则 U_{ab} 的表达式为

$$U_{ab} = U_{S1} + I_1 R_1 + U_{S2} + I_2 R_2 - I_3 R_3 - U_{S3}$$

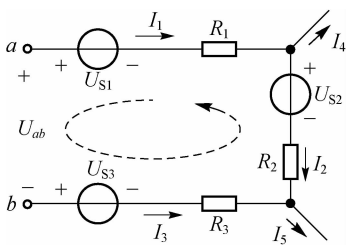


图 1-30 例 1-7 题图

(三) 支路电流法

支路电流法是以支路电流为未知量, 应用 KCL 和 KVL, 列出与支路数相等的节点电流方程和回路电压方程, 解出各支路电流的方法。

下面通过具体实例说明支路电流法的求解步骤。

例 1-8 图 1-31 为一手机电池充电电路, 手机充电电源 $U_{S1} = 7.6 \text{ V}$, 内阻 $R_{S1} = 20 \Omega$, 手机电池 $U_{S2} = 4 \text{ V}$, 内阻 $R_{S2} = 3 \Omega$, 手机处于开通状态, 其等效电阻 $R_3 = 70 \Omega$ 。试求各支路电流。

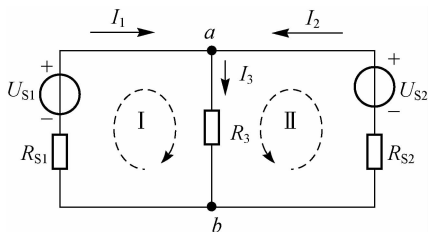


图 1-31 例 1-8 题图

解 图 1-31 所示电路共有三条支路, 两个节点, 需要列出三个独立方程, 求解三个支路电流。

(1) 设定各支路电流的参考方向, 列出节点 a 的方程如下。

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

(2) 设定网孔绕行方向, 根据各元件电压的参考方向, 列出网孔电压的方程。

$$\text{网孔 I: } I_1 R_{S1} - U_{S1} + I_3 R_3 = 0$$

$$\text{网孔 II: } I_2 R_{S2} - U_{S2} + I_3 R_3 = 0$$

(3) 解联立方程组, 求出各支路电流值。

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$20I_1 - 7.6 + 70I_3 = 0$$

$$3I_2 - 4 + 70I_3 = 0$$

解得各支路电流为: $I_1 \approx 165 \text{ mA}$, $I_2 \approx -103 \text{ mA}$, $I_3 \approx 62 \text{ mA}$ 。其中, I_2 为负值, 说明 I_2 的实际方向与图中所设的参考方向相反, U_{S2} 为负载, 吸收电功率。

(四) 节点电压法

节点电压法是以电路中的节点电压为未知量, 应用 KCL 列出与节点电压数相等的节点电流方程, 联立后求解各个节点电压的电路分析方法。求出节点电压, 便可得到各支路电压, 利用欧姆定律和 KVL, 就可以求出各支路电流。

在电路的 n 个节点中, 任选一个为参考节点, 把其余 $n-1$ 个节点对参考节点的电压称为该节点的节点电压, 其参考方向均是从该节点指向参考节点。电路中所有支路电压都可以用节点电压来表示。下面以图 1-32 所示电路为例, 说明节点电压法。

图 1-32 中共有 3 个节点, 选节点 3 作为参考节点, 节点 1 和节点 2 对参考节点 3 的节点电压分别用 U_1 、 U_2 表示, 图中各支路电流的参考方向用箭头标注。根据 KCL, 对节点 1 有

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1}{R_2} + \frac{U_1 - U_2}{R_3} + \frac{U_1 - U_2}{R_4} = I_{S1} + I_{S2} \quad (1-25)$$

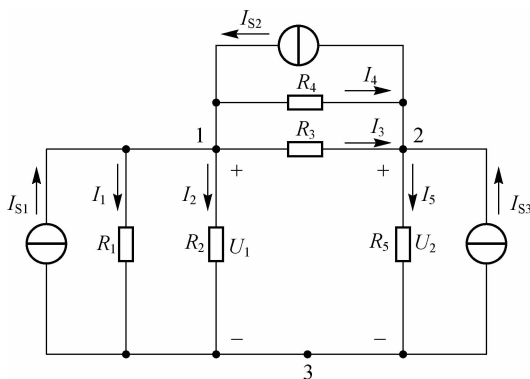


图 1-32 节点电压法

对节点 2 有

$$\frac{U_2}{R_5} + I_{S2} = \frac{U_1 - U_2}{R_3} + \frac{U_1 - U_2}{R_4} + I_{S3} \quad (1-26)$$

整理以上两式可得

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_1 - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_2 = I_{S1} + I_{S2} \quad (1-27)$$

$$-\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)U_2 = I_{S3} - I_{S2} \quad (1-28)$$

式(1-27)和式(1-28)即图 1-32 所示电路的节点电压方程, 解此方程组可得节点电压 U_1 和 U_2 , 进而可求得其他支路的电压和电流。

若用 $G_1 = \frac{1}{R_1}$, $G_2 = \frac{1}{R_2}$, $G_3 = \frac{1}{R_3}$, $G_4 = \frac{1}{R_4}$, $G_5 = \frac{1}{R_5}$ 代入式(1-27)和式(1-28), 并分别记

$$G_{11} = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$



$$G_{22} = G_3 + G_4 + G_5$$

$$G_{12} = G_{21} = -(G_3 + G_4)$$

$$I_{S11} = I_{S1} + I_{S2}$$

$$I_{S22} = I_{S3} - I_{S2}$$

则图 1-32 所示电路的节点电压方程可写成以下一般形式。

$$G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = I_{S11} \quad (1-29)$$

$$G_{12}U_1 + G_{22}U_2 = I_{S22} \quad (1-30)$$

其中, $G_{11} = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$, $G_{22} = G_3 + G_4 + G_5$ 分别是节点 1 和节点 2 所连接的各支路电导之和, 称为各节点的自电导, 自电导总是正值; $G_{12} = G_{21} = -(G_3 + G_4)$ 是连接在节点 1 与节点 2 之间的各公共支路的电导之和的负值, 称为两相邻节点的互电导, 互电导总是负值; $I_{S11} = I_{S1} + I_{S2}$, $I_{S22} = I_{S3} - I_{S2}$ 分别是流入节点 1 和节点 2 的各电流源电流的代数和, 流入节点的取“+”, 流出节点的取“-”。



提示

节点电压法适用于节点数少, 支路数多的电路。对于只有两个节点, 多条支路的电路, 用节点电压法求支路电流更为方便。当电路中含有电压源支路, 尽可能取电压源支路的负极性端作为参考点, 把电压源中的电流作为变量列入节点方程。

图 1-33 所示为含电压源支路且只有两个节点的电路。

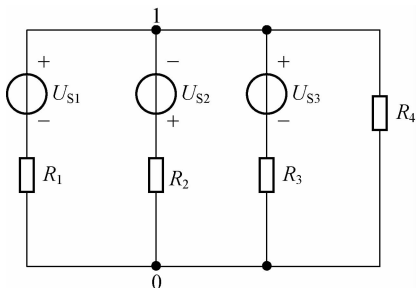


图 1-33 含电压源支路的电路

选 0 为参考节点, 仅一个节点电压 U_{10} , 可直接列出节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_{10} = \frac{U_{S1}}{R_1} - \frac{U_{S2}}{R_2} + \frac{U_{S3}}{R_3}$$

或写成

$$U_{10} = \frac{\frac{U_{S1}}{R_1} - \frac{U_{S2}}{R_2} + \frac{U_{S3}}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{G_1 U_{S1} - G_2 U_{S2} + G_3 U_{S3}}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

对于只有一个独立节点的电路, 节点电压方程可以写成

$$U_{10} = \frac{\sum G_K U_{SK}}{\sum G_K} \text{ 或 } U_{10} = \frac{\sum I_{SK}}{\sum G_K} \quad (1-31)$$

式(1-31)称为弥尔曼定理。

例 1-9 应用弥尔曼定理求图 1-34 所示电路中的各支路电流。已知 $U_{S1}=6\text{ V}$, $U_{S2}=8\text{ V}$, $I_S=0.4\text{ A}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=6\ \Omega$, $R_3=10\ \Omega$, $R=3\ \Omega$ 。

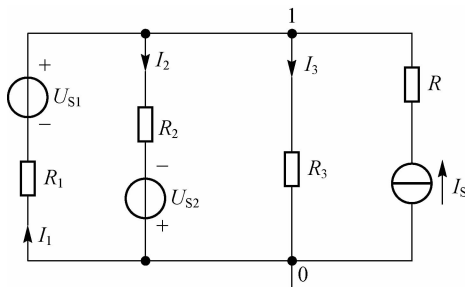


图 1-34 例 1-9 题图

解 设 0 点为参考点, 则节点电压 U_{10} 为

$$U_{10} = \frac{\frac{U_{S1}}{R_1} - \frac{U_{S2}}{R_2} + I_S}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{6}{1} - \frac{8}{6} + 0.4}{\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}} \text{ V} = 4\text{ V}$$

由欧姆定律及 KVL 得

$$I_1 = \frac{U_{S1} - U_{10}}{R_1} = \frac{6 - 4}{1} \text{ A} = 2\text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U_{S2} + U_{10}}{R_2} = \frac{8 + 4}{6} \text{ A} = 2\text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_{10}}{R_3} = \frac{4}{10} \text{ A} = 0.4\text{ A}$$

本例题中电流源支路的电流只由电流源确定, 与 R 没有关系。



提示

弥尔曼定理用于分析有两个节点多条支路的电路。

(五)叠加原理

在多个电源共同作用的线性电路中, 任意支路的响应(电流或电压)都是多个电源共同作用的结果。叠加原理是指在线性电路中, 如果有多个电源同时作用, 任意支路的电流或电压, 等于各个电源分别单独作用时, 在该支路中产生的响应的代数和。

无作用电源的处理方法: 将电压源短路, 将电流源开路, 如果电源有内电阻, 则将内电阻保留。

例 1-10 现仍以例 1-8 题为例, 采用叠加原理求解各支路电流。

解 根据叠加原理, 先分别求出各电源单独作用产生的电流, 再用叠加原理求得两个电源同时作用时产生的总电流。

(1) 画出各个电源单独作用的电路, 分别如图 1-35(b)、图 1-35(c) 所示。

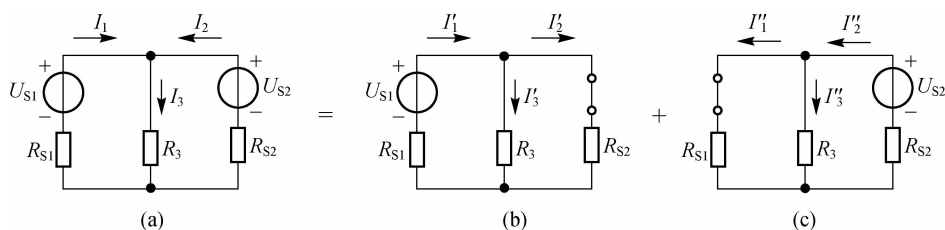


图 1-35 例 1-10 题图

(2) 求单独作用的各支路电流。

U_{S1} 单独作用时(式中“//”表示两个电阻并联),有

$$I'_1 = \frac{U_{S1}}{R_{S1} + R_3 // R_{S2}} = \frac{7.6}{20 + 70 // 3} \times 10^3 \approx 332 \text{ mA}$$

$$I'_2 = -\frac{R_3}{R_3 + R_{S2}} I'_1 = -\frac{70}{70 + 3} \times 332 \approx -318 \text{ mA}$$

$$I'_3 = I'_1 + I'_2 = 14 \text{ mA}$$

U_{S2} 单独作用时,有

$$I''_2 = \frac{U_{S2}}{R_{S2} + R_3 // R_{S1}} \approx 215 \text{ mA}$$

$$I''_1 = \frac{R_3}{R_{S1} + R_3} I''_2 \approx 167 \text{ mA}$$

$$I''_3 = I''_2 - I''_1 = 48 \text{ mA}$$

(3) 求两个电源同时作用时各支路电流。

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 165 \text{ mA}$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = -103 \text{ mA}$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 62 \text{ mA}$$

应用叠加原理分析电路时,应注意以下问题。

(1) 叠加原理只适用于线性电路电压和电流的计算,不适合电功率的计算,如例 1-10 中电阻 R_3 消耗的电功率为

$$P = I_3^2 R_3 = (I'_3 + I''_3)^2 R_3 \neq I_3'^2 R_3 + I_3''^2 R_3$$

(2) 将各个电源单独作用产生的电压和电流进行叠加时,要注意各分电路中电压和电流的参考方向应与原电路中对应电压和电流的参考方向保持一致,若不一致,则应在分量前加“一”。

(六) 戴维南定理

在电路分析中,有时只需要计算其中某一支路的电流或电压。为了使计算方便,常常应用等效电压源的方法,将所需要计算的那条支路划出,而把其余部分看作一个有源二端网络,这个有源二端网络对于划出的支路来说,相当于一个电压源,如图 1-36 所示。

戴维南定理是指任何一个线性有源二端网络,对外部电路而言,都可以用一个理想电压源 U_S 与内阻 R_S 串联的电压源模型来等效。这里的 U_S 等于有源二端网络的开路电压 U_{OC} ,内阻 R_S 等于有源二端网络转换成无源二端网络(将理想电压源短路,理想电流源开路)后,二端之间的等效电阻。

在图 1-36(b)中,如果求出了等效电路的开路电压 U_{OC} (即 U_S 的数值)和等效电阻 R_S ,就可以方便地求出电阻 R_L 中的电流为

$$I = \frac{U_S}{R_S + R_L} \quad (1-32)$$

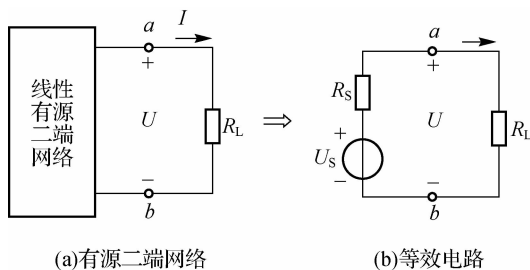


图 1-36 线性有源二端网络的等效电路

例 1-11 用戴维南定理求图 1-37 所示电路中的电流 I 。

解 (1) 断开待求支路,得有源二端网络如图 1-37(b)所示。由图可求得开路电压 U_{OC} 为

$$U_{OC} = U_S = (2 \times 3 + \frac{6}{6+6} \times 24) \text{ V} = 6 + 12 = 18 \text{ V}$$

(2) 将图 1-37(b)中的电压源短路,电流源开路,转化成无源后的二端网络,如图 1-37(c)所示,由图可求得等效电阻 R_S 为

$$R_S = (3 + \frac{6 \times 6}{6+6}) = 3 + 3 = 6 \Omega$$

(3) 根据 U_S 和 R_S 画出戴维南等效电路并接上待求支路,得图 1-37(d)所示的等效电路。由图 1-37(d)可求得 I 为

$$I = \frac{18}{6+3} = 2 \text{ A}$$

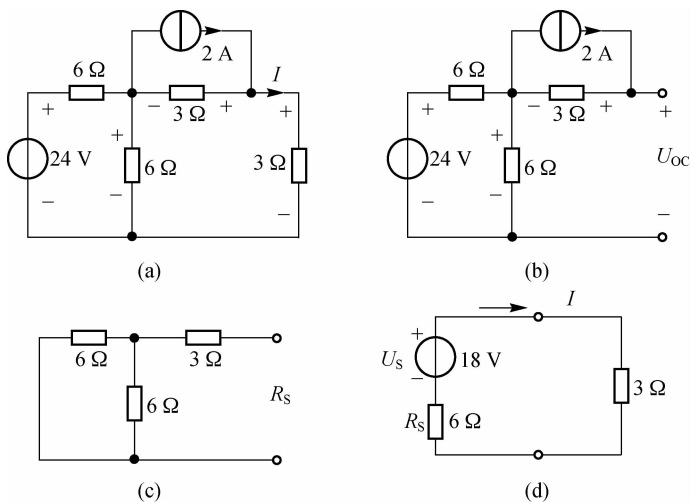


图 1-37 例 1-11 题图



提示

戴维南定理一般适用于只求某一支路的电流或电压的情形。



单元小结

(1) 电路的组成及基本物理量。任何一个完整的电路都有电源、负载和中间环节 3 个组成部分。用理想电路元件代替实际电路元件构成的电路称为电路模型。

电流、电压和电功率是电路中 3 个重要的物理量。电压、电流的参考方向是事先选定的一个方向,根据电压和电流数值的正、负,可确定电压和电流的实际方向。功率的计算与电压及电流的参考方向有关。当电压和电流选择关联参考方向时,则 $P=UI$;如果电流和电压为非关联参考方向, $P=-UI$ 。当 $P>0$ 时,说明该元件吸收功率;当 $P<0$ 时,说明该元件发出功率。一个电路中所有元件功率的代数和等于零。

(2) 电路的基本元件。组成电路的理想电路元件分无源元件(电阻元件、电感元件、电容元件)和有源元件(理想电压源和理想电流源)。电阻元件是耗能元件,电感和电容元件是储能元件。

理想电压源有确定的电压值,电流随外电路而变;理想电流源有确定的电流值,而电压随外电路而变。

(3) 电路有空载、短路、负载 3 种状态。

(4) 电路的分析方法。简单电路的分析采用电阻的串并联等效变换的方法来化简。实际电压源和实际电流源可以等效互换。

支路电流法是依据基尔霍夫定律分析和计算复杂电路的基本方法。

节点电压法适用于节点数少支路数多的电路,其中弥尔曼定理用于有 2 个节点多条支路的电路的求解。

叠加原理是反映线性电路基本性质的重要定理。多个电源共同作用产生的电压和电流,等于各电源独立作用产生的电压和电流的代数和。注意叠加原理只适用于线性电路中的电压和电流。

戴维南定理是简化复杂电路的重要定理。戴维南定理最适用于求解线性有源网络中某一支路的电流。



检测习题

一、填空题

1. 电路由_____、负载和_____ 3 部分组成。电路的主要作用有两个:_____和_____。

2. 在电路的分析计算中,必须先假设电流与电压的参考方向,电压与电流的参考方向可以独立_____。如果两者的参考方向一致,则称为_____。按照假设的参考方向,若电压或电流的计算值为负,则说明其实际方向与参考方向_____。

3. 线性电阻 R 上的电压 u 与电流 i 的关系满足_____定律,当两者取关联参考方向时,其表达式为_____。



4. 一个电路中电源发出的电功率_____负载_____的电功率, 电路的功率是平衡的。
5. 基尔霍夫定律与电路的_____有关, 而与构成该电路的元器件具有什么样的性质无关。
6. KCL 实际上体现了电荷守恒定律或_____的性质。
7. KVL 实际上体现了_____的性质。
8. 应用叠加原理分析电路时, 不作用的电压源应该_____, 不作用的电流源应该_____。电源如果有内电阻, 应该_____。
9. 节点电压法是以_____为独立变量, 应用_____, 列出节点电流方程的方法。
10. 一个 10 V , 内阻 $2\ \Omega$ 的实际电压源, 用实际电流源来等效, 则等效电流源的电流是_____ A , 内阻是_____ Ω 。
11. 列节点电压方程时, 先指定一个节点为_____, 其余节点与该节点之间的电压称为_____电压。
12. 一个支路电压等于两个节点电压之差, 它与_____无关。
13. 不能用叠加原理来计算线性电路中的_____。
14. 一个含独立电源的线性二端网络, 可以用戴维南定理来等效, 则其等效电压源等于该二端网络的_____, 其等效内阻等于该端口内所有独立电源_____时, 该端口的输入电阻。

二、选择题

1. 已知电路中 A 点对地电位是 65 V , B 点对地电位是 35 V , 则 $U_{BA} = (\quad)$ 。
A. 100 V B. -100 V C. -30 V D. 30 V
2. 一个输出电压几乎不变的设备有载运行, 当负载增大时, 是指 $(\quad)$ 。
A. 负载电阻增大 B. 负载电阻减小
C. 负载电流减小 D. 电源输出功率增大
3. 电路如图 1-38 所示, 已知 $I_1 = -1\text{ A}$, $U_3 = 2\text{ V}$, $R_1 = R_3 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, 则电压源电压 $U_S = (\quad)$ 。
A. 7 V B. 9 V C. -7 V D. -9 V
4. 电路如图 1-39 所示, 已知 $I_1 = -2\text{ A}$, $U_5 = -2\text{ V}$, $R_3 = R_4 = 1\ \Omega$, $R_5 = 2\ \Omega$, 则电流源电流 $I_S = (\quad)$ 。
A. 3 A B. 6 A C. -6 A D. $\frac{2}{R_1 + R_2}$

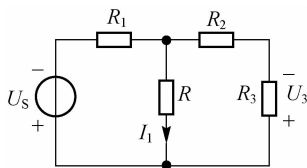


图 1-38

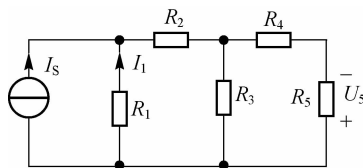


图 1-39



5. 电路如图 1-40 所示, 则电流源功率为()。

- A. 发出 B. 吸收 C. 为零 D. 不确定

6. 电路如图 1-41 所示, $U = -10 \text{ V}$, $I = -2 \text{ A}$, 则网络 N 的功率为()。

- A. 吸收 20 W B. 发出 20 W C. 发出 10 W D. 发出 -10 W

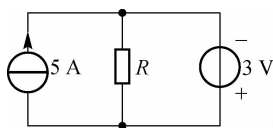


图 1-40

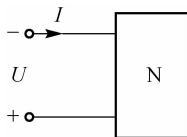


图 1-41

7. 电路如图 1-42 所示, 已知 $I_S = 3 \text{ A}$, $R_S = 20 \Omega$, 要使电流 $I = 2 \text{ A}$, 则 $R = ()$ 。

- A. 40Ω B. 30Ω C. 20Ω D. 10Ω

8. 电路如图 1-43 所示, $U_S = 3 \text{ V}$, $I_S = 1 \text{ A}$, $R = 1 \Omega$, 电流源发出(产生)的功率 $P = ()$ 。

- A. 1 W B. -1 W C. 4 W D. -4 W

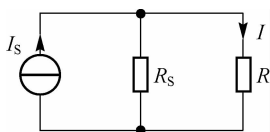


图 1-42

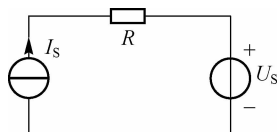


图 1-43

三、分析计算题

1. 3 个电阻串联后接到电源两端, 已知 $R_1 = 2R_2$, $R_2 = 2R_3$, R_2 两端的电压为 10 V, 求电源两端的电压(设电源的内阻为零)。

2. 电路如图 1-44 所示。试分别计算开关 S 断开与闭合两种情况下的 U_{ab} 、 U_{bc} 和 I 。

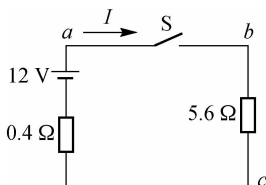


图 1-44

3. 在图 1-45 中, 5 个元件分别代表电源或负载。电流和电压的参考方向如图所示, 用万用表测得 $I_1 = -4 \text{ A}$, $I_2 = 6 \text{ A}$, $I_3 = 10 \text{ A}$, $U_1 = 140 \text{ V}$, $U_2 = -90 \text{ V}$, $U_3 = 60 \text{ V}$, $U_4 = -80 \text{ V}$, $U_5 = 30 \text{ V}$ 。

(1) 试标出各电流的实际方向和各电压的实际极性。

(2) 判断哪些元件是电源, 哪些元件是负载。

(3) 计算各元件的功率、电源发出的功率和负载取用的功率是否平衡。

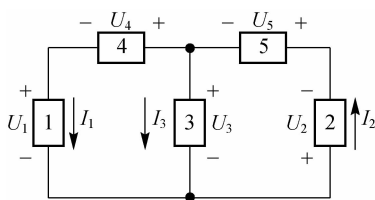


图 1-45

4. 在图 1-46 所示的两个电路中,要在 12 V 的直流电源上使 6 V、50 mA 的指示灯正常发光,应该采用哪个连接电路? 为什么?

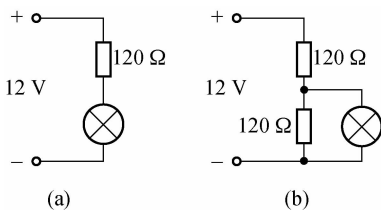


图 1-46

5. 计算图 1-47 所示两电路中 a 、 b 间的等效电阻 R_{ab} 。

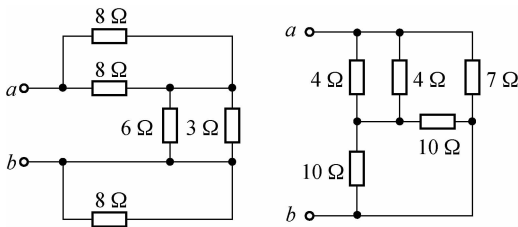


图 1-47

6. 用支路电流法求图 1-48 中各支路的电流,并说明 U_{S1} 和 U_{S2} 是起电源作用还是起负载作用。图中的 $U_{S1} = 12\text{ V}$, $U_{S2} = 15\text{ V}$, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 1.5\ \Omega$, $R_3 = 9\ \Omega$ 。

7. 用戴维南定理求图 1-48 中的 I_3 。

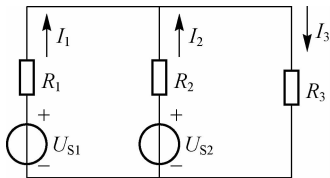


图 1-48

8. 利用戴维南定理分别求出图 1-49(a)、图 1-49(b) 所示有源二端网络的等效电路以及 U_{OC} 和 R_S 的数值。

9. 在图 1-50 所示的电路中, $U_{S1} = 140\text{ V}$, $U_{S2} = 90\text{ V}$, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, 试用节点电压法求各支路电流。

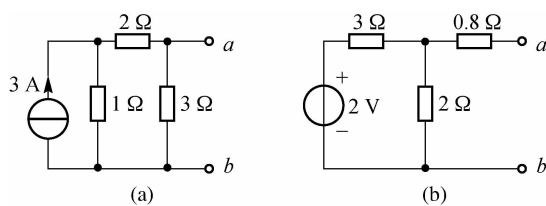


图 1-49

10. 用叠加原理求图 1-50 中的支路电流 I_3 。

11. 试用节点电压法(弥尔曼定理)求图 1-51 所示电路的各支路电流。

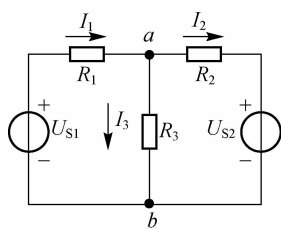


图 1-50

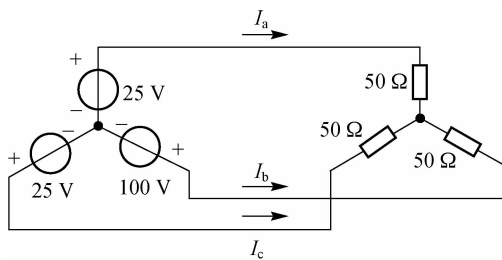


图 1-51

单元二

正弦交流电路



学习目标

- 掌握正弦交流电的三要素及三种表示方法,了解正弦交流电路中相位、相位差的概念,掌握正弦量有效值的概念,掌握一般正弦交流电的分析方法(相量法)。
- 了解三大基本电路元件在正弦交流电路中的作用及相量模型,掌握有功功率、无功功率的概念。
- 理解对称三相交流电的物理意义,掌握三相电源的两种联结方式及特点,了解三相四线制供电体系的优越性。
- 了解线电流、相电流、中线电流的概念,掌握三相负载星形、三角形两种联结形式下相、线电压的关系,相、线电流的关系及中线的作用,掌握三相电路的分析方法。
- 掌握三相电路中有功功率、无功功率、视在功率的物理意义及计算方法。



课程导入

常用的交流电是按正弦规律变化的正弦交流电,简称交流电。正弦交流电在产生、输送和使用方面有诸多优越性,分析和讨论正弦交流电路具有重要意义。本单元介绍交流电的三要素和相量表示法,并从单一参数交流电路入手,以 RLC 串联电路为典型电路,分析交流电路中电压和电流的关系及功率和能量的交换;三相交流电源与负载的连接方式,电压电流的相值与线值的关系及三相功率问题。

一、正弦交流电的三要素

由发电机产生的交流电,其大小和方向随时间按正弦规律变化,称为正弦交流电。交流电的特征表现在其变化的快慢、大小和初始值三个方面,用以描述上述三方面特征的量是交流电的三要素,即频率(周期)、幅值(有效值)和初相位。三要素是比较和区分不同正弦量的依据。

1. 频率与周期

现以一正弦交流电压为例,其瞬时值表达式为

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-1)$$

其随时间变化的曲线称为波形图,如图 2-1 所示。

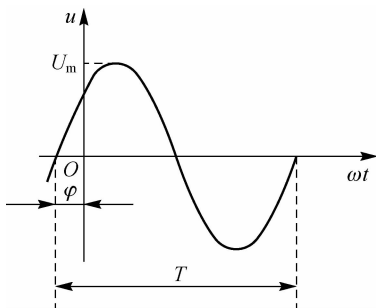


图 2-1 正弦交流电压的波形

正弦交流电每秒内完成周期性变化的次数称为频率 f , 单位是赫兹(Hz)。交流电完成一次周期性变化所需要的时间称为周期 T , 单位是秒(s)。频率与周期的关系为

$$f = \frac{1}{T} \quad (2-2)$$

我国电力系统采用 50 Hz 为交流电的标准频率, 习惯上称为工频。有些国家(如美国和日本)的电力系统的交流电频率为 60 Hz。

式(2-1)中的 ω 称为角频率, 指正弦量在单位时间内变化的电角度, 单位是弧度/秒(rad/s)。 ω 与 f 和 T 之间的关系为

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (2-3)$$

2. 瞬时值、最大值和有效值

交流电每时每刻均随时间变化, 任意时刻的数值称为瞬时值。正弦量最大的瞬时值称为交流电的最大值, 如式(2-1)中的 U_m 。

在电工技术中, 通常所说的交流电的电压和电流的数值都是指有效值。

有效值是根据电流的热效应定义的。若把一交流电流 i 和直流电流 I 分别通过阻值相等的电阻 R , 如果它们在相同时间内产生的热量相等, 则此直流电值 I 就定义为该交流电流 i 的有效值, 有效值用大写字母表示。有效值与最大值的关系为

$$\begin{aligned} U_m &= \sqrt{2}U \\ I_m &= \sqrt{2}I \\ E_m &= \sqrt{2}E \end{aligned} \quad (2-4)$$

通常所说的民用电 220 V 为交流电的有效值, 而其幅值是 $U_m = \sqrt{2}U \approx 311$ V。用万用表测得的交流电压值均为有效值。

3. 初相位

式(2-1)中的 $\omega t + \varphi$ 称为交流电的相位。它表示交流电随时间变化的进程, 决定该时刻



瞬时值的大小、方向和变化趋势。当 $t=0$ 时, $\omega t=0$, 此时的相位 φ 称为初相位, 它表示计时开始时交流电所处的状态, 如图 2-1 所示。一般规定, 初相位的绝对值用小于或等于 180° 的角表示, 即 $|\varphi| \leq 180^\circ$ 。

为了比较同频率正弦量在变化过程中的相位关系和先后顺序, 引入相位差的概念。相位差就是两个同频率正弦量的相位之差, 用 $\Delta\varphi$ 表示。例如, 有以下两个同频率的正弦电压。

$$u_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = U_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

由上述定义得两电压的相位差为

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (2-5)$$

式(2-5)表明, 两个同频率正弦量的相位差等于它们的初相之差, 与时间 t 无关。



提示

只有两个同频率的正弦量才可以比较它们之间的相位关系。

例 2-1 已知选定参考方向下, 频率为 ω 的正弦量 u_1 、 u_2 的波形如图 2-2 所示, 试写出正弦量的表达式, 并比较它们的相位关系。

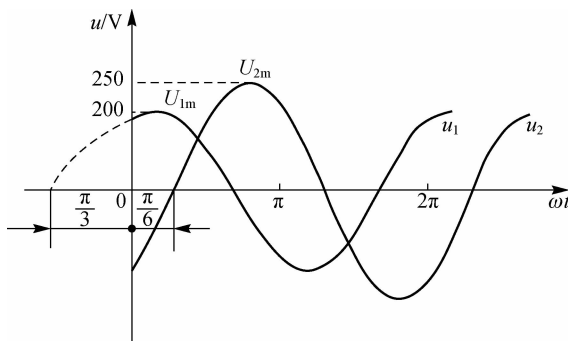


图 2-2 例 2-1 图

解 由图 2-2 可知, $U_{1m}=200 \text{ V}$, $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$; $U_{2m}=250 \text{ V}$, $\varphi_2=-\frac{\pi}{6}$ 。由式(2-1)可写出

$$u_1 = 200 \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

$$u_2 = 250 \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$$

两个正弦电压的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$$



思考

思考题 7

提示

当两个同频率的正弦量相位差为零时,两者相位具有同相关系;若两个正弦量相位差为 90° ,则两者相位具有正交关系;当两个正弦量的相位差是 180° 时,两者之间的相位关系是反相。

综上所述,一个正弦量的最大值(或有效值)、角频率(或周期、频率)及初相位一经确定,表示该正弦量的解析式和波形图就是唯一确定的,因此把最大值、角频率及初相位称为正弦交流电的三要素。

二、正弦量的相量表示法

正弦量可以用三角函数式表示,也可以用波形图表示。如果利用三角函数式进行正弦量的加减运算是非常烦琐的,如果借助波形图逐点将波形加减,不但烦琐,而且计算误差大,因此有必要寻求一种简洁实用的运算方法。以下介绍的正弦量的相量表示法,极大地方便了正弦交流电路的分析和计算。

(一)旋转矢量与相量

设有一正弦电流 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, 它可以用这样一个旋转矢量来表示:矢量的长度等于该正弦量的最大值 I_m ; 矢量初始位置与横轴正向的夹角等于该正弦量的初相位 φ ; 该矢量逆时针方向旋转,其旋转的角速度等于该正弦量的角频率 ω 。那么这个旋转矢量任意瞬时纵轴上的投影,就是正弦量 i 在该时刻的瞬时值。显然,旋转矢量与正弦量有一一对应的关系,如图 2-3 所示。

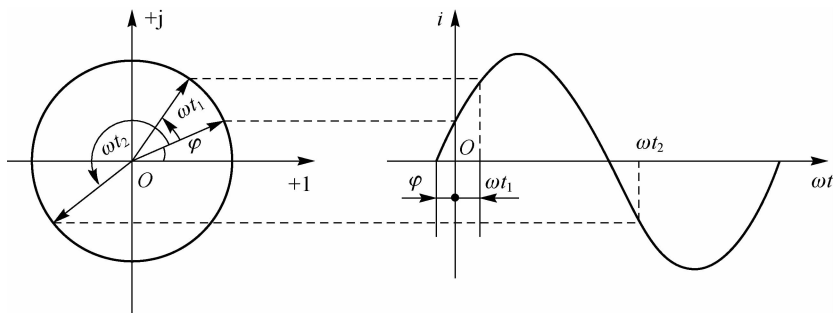


图 2-3 正弦量用旋转矢量表示

表示正弦量的旋转矢量始终以交流电的频率 ω 旋转,而交流电源的频率往往是已知的,所以旋转矢量的初始状态(只考虑最大值或有效值和初相位)就能够确定一个正弦量。初始状态的旋转矢量可以用复平面内的相量表示,即可以用复数表示,因此正弦量可以用复数表示。用复数表示正弦量的方法,称为相量法。

正弦量采用相量表示法时应注意以下几点。

- (1) 相量特指表示正弦量的复数。
- (2) 相量可以用有向线段表示(相量图),也可以用相量式表示(复数式)。
- (3) 相量只包含正弦量的两个要素,即值和初相位。这是因为相量是作为分析和计算正

弦交流电路的工具而引入电学的,而同一电路中的所有正弦量都是同频率的,因此隐含了频率这一要素。

(4) 只有同频率的相量才能标示在同一相量图中。

(二) 复数的表示形式和四则运算

1. 复数的表示形式

一个复数有多种表示形式,常见的有代数形式、三角形式和极坐标形式三种。

复数的代数形式如下。

$$A = a + jb \quad (2-6)$$

式(2-6)中, a 、 b 均为实数,分别称为复数的实部和虚部; $j = \sqrt{-1}$ 为虚数的虚单位(数学中用 i 表示,而在电路中用 j 表示,以示区别)。复数 A 可以用复平面上的有向线段 OA 表示,如图2-4所示。

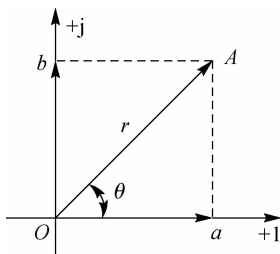


图 2-4 复数的表示形式

向量 OA 的长度等于复数的模 r ,向量 OA 与正实轴方向的夹角 θ 称为复数的辐角。各量之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} r &= |A| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ a &= r \cos \theta \\ b &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

于是可得复数的三角形式为

$$A = r \cos \theta + jr \sin \theta \quad (2-8)$$

复数的极坐标形式为

$$A = r / \theta \quad (2-9)$$

虚单位 j 是模为1,辐角为 90° 的相量,其极坐标形式为

$$j = 1 / 90^\circ$$

2. 复数的四则运算

设有两个复数 $A_1 = a_1 + jb_1 = r_1 / \theta_1$, $A_2 = a_2 + jb_2 = r_2 / \theta_2$,则两个复数的加减运算为

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \quad (2-10)$$

两个复数的乘除运算为

$$A_2 \cdot B_2 = r_1 / \theta_1 \cdot r_2 / \theta_2 = r_1 \cdot r_2 / \theta_1 + \theta_2 \quad (2-11)$$

$$\frac{A_1}{B_2} = \frac{r_1 / \theta_1}{r_2 / \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} / \theta_1 - \theta_2 \quad (2-12)$$



提示

代数式适合于复数的加减运算,极坐标式适合于复数的乘除运算。

(三)相量法的应用

由前面的分析可知,正弦量可以用复数表示,用复数表示正弦量的方法称为正弦量的相量表示法。复数的运算法则适用于相量运算。

现以频率为 ω ,初相位为 φ 的交流电流为例,其相量图如图 2-5 所示。

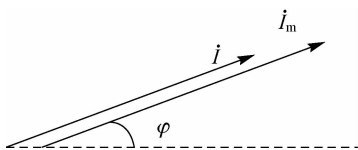


图 2-5 正弦量的相量表示

例 2-2 已知同频率正弦量的解析式分别为 $i = 10\sin(\omega t + 30^\circ)$, $u = 220\sin(\omega t - 45^\circ)$ 。分别写出电压和电流的相量式 $\dot{I}$ 和 $\dot{U}$,并画出相量图,比较它们的相位差。

解 由解析式可得

$$\dot{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ = 5\sqrt{2} \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U} = \frac{220}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = 110\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ V}$$

相量图如图 2-6 所示,电流超前电压 75° 。

例 2-3 已知频率为 ω 的交流电 u_1 和 u_2 ,有效值分别为 $U_1 = 100 \text{ V}$, $U_2 = 60 \text{ V}$, u_1 的初相为 0° 且超前 u_2 60° ,试求:(1)总电压 $u = u_1 + u_2$ 的瞬时值表达式,并画出相量图;(2)总电压 u 与 u_1 、 u_2 的相位差。

解 根据已知条件,题中给出了 u_1 和 u_2 的有效值和相位差及 u_1 的初相位,所以

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = -60^\circ$$

则两电压的有效值相量分别为

$$\dot{U}_1 = U_1 \angle \varphi_1 = 100 \angle 0^\circ = 100 \text{ V}, \dot{U}_2 = U_2 \angle \varphi_2 = 60 \angle 60^\circ = (30 - j51.96) \text{ V}$$

总电压的有效值相量

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 100 + 30 - j51.96 = 130 - j51.96 = 140 \angle -21.8^\circ \text{ V}$$

相量图如图 2-7 所示。

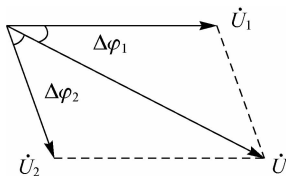


图 2-7 例 2-3 题相量图

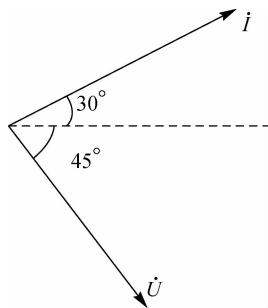


图 2-6 例 2-2 题图



思考

思考题 8



(1) 总电压 u 的瞬时值表达式为

$$u = 140\sqrt{2}\sin(\omega t - 21.8^\circ)$$

(2) u 与 u_1 及 u_2 的相位差分别为

$$\Delta\varphi_1 = \varphi - \varphi_1 = -21.8^\circ - 0^\circ = -21.8^\circ$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi - \varphi_2 = -21.8^\circ - (-60^\circ) = 38.2^\circ$$

两个相位差说明, 总电压 u 滞后 u_1 21.8° , 超前 u_2 38.2° 。

三、单一参数交流电路

单一参数交流电路是指在电路中只有电阻 R 、电感 L 或电容 C 其中一种电路元件的交流电路。在集中元件的交流电路中, 实际元件的电特性往往多元而复杂, 但是, 一定条件下某一电特性为影响电路的主要特性时, 其余电特性可以忽略, 即构成了单一参数电路元件的交流电路, 复杂的交流电路也可以认为是由单一参数电路元件组合而成的。

(一) 电阻电路

日常生活中所用的电热恒温箱、电热锅、电热炉、灯泡等, 都具备将电能转化为热能电特性, 与电阻元件的电特性接近, 因此可用电阻元件作为它们的电路模型。只有电阻元件的电路称为纯电阻电路, 如图 2-8(a) 所示。

1. 电阻电路电压与电流的关系

在图 2-8(a) 中, 电阻 R 两端的电压为 u , 通过的电流为 i , 电压电流取关联参考方向, 根据欧姆定律, u 与 i 的瞬时值关系为

$$u = Ri$$

设 $i = I_m \sin(\omega t)$, 则电阻 R 两端的电压

$$u = Ri = RI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t \quad (2-13)$$

由此可得

$$U = RI \text{ 或 } U_m = RI_m \quad (2-14)$$

由式(2-13)可知, 电阻两端的电压也按正弦规律变化, 且与电流同相位。它们的波形图和相量图分别如图 2-8(b) 和图 2-8(c) 所示。

用相量表示上述关系为

$$\dot{U} = R\dot{I} \text{ 或 } \dot{U}_m = R\dot{I}_m \quad (2-15)$$

式(2-15)是电阻电路中电压与电流关系的相量式, 它同时给出了电压与电流的数量关系 $U = RI$ 或 $U_m = RI_m$ 及 u 与 i 同相位关系。

2. 电阻元件的功率

(1) 瞬时功率。

$$\begin{aligned} p_R &= ui = U_m I_m \sin^2(\omega t) = \frac{U_m I_m}{2} [1 - \cos 2\omega t] = UI [1 - \cos 2\omega t] \\ &= UI + \sin(2\omega t - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (2-16)$$

由式(2-16)可知, 电阻的瞬时功率 p_R 由两部分组成: 恒定分量 UI 和随时间 t 变化的正弦分量, 其波形如图 2-8(d) 所示。由波形图可见, 瞬时功率的大小虽然随时间变化, 但电阻

的功率 P_R 永远为正值,说明电阻总是从电源吸收电能,它是电路中的耗能元件。

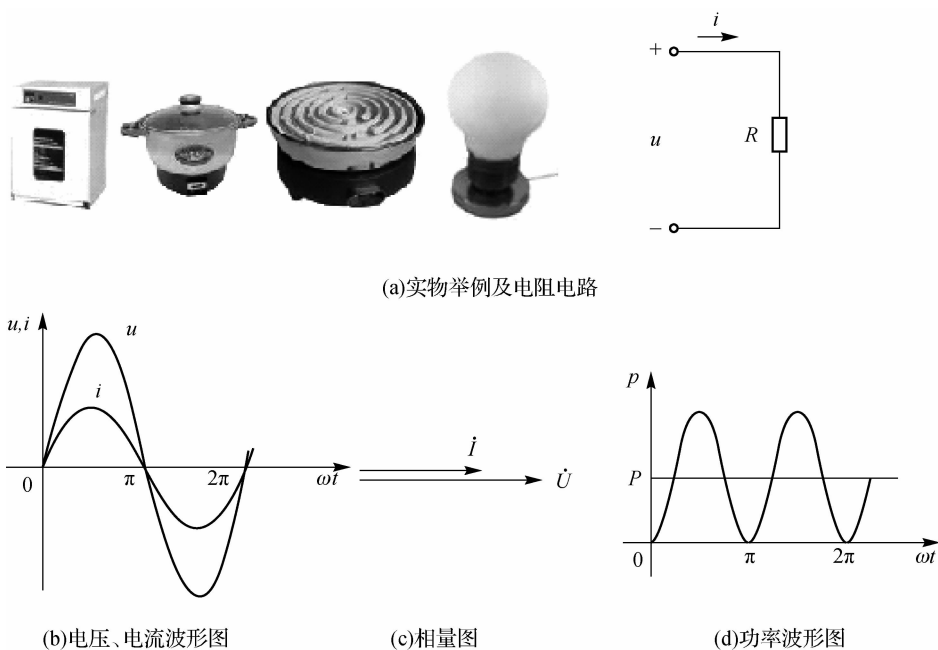


图 2-8 电阻电路

(2)平均功率。

在工程计算和实际测量中常用平均功率,即一个周期内瞬时功率的平均值,用 P 表示。

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T p_R dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI [1 - \cos 2\omega t] dt = UI \quad (2-17)$$

式(2-17)又可写成如下形式。

$$P_R = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (2-18)$$

平均功率是电阻元件实际消耗的功率,也称为有功功率,习惯简称功率。

例 2-4 已知一个白炽灯工作时的电阻为 $484 \, \Omega$,其两端的工作电压为 $u = 311 \sin(314t + 60^\circ)$,试求:(1)通过白炽灯的电流及瞬时值表达式;(2)白炽灯工作时的功率。

解 (1) 通过白炽灯的电流为

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\frac{311}{\sqrt{2}}}{484} \text{ A} \approx 0.45 \text{ A}$$

电流与电压同相位,所以

$$i = 0.45 \sqrt{2} \sin(314t + 60^\circ)$$

(2) 白炽灯工作时的电功率为

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = \left(\frac{311}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{1}{484} \text{ W} \approx 100 \text{ W}$$

(二)电感电路

在电子线路中常用的电感线圈,高频扼流圈,电机、变压器的绕组等,如果不考虑线圈导

线的电阻,只考虑其通电建立磁场的特性,可视其为理想的电感元件。只有电感元件的电路称为纯电感电路,如图 2-9(a)、图 2-9(b)所示。

1. 电感电路电压与电流的关系

在图 2-9(b)中,取电流 i 与自感电压 u 为关联参考方向,并设通过线圈中的电流为

$$i = I_m \sin(\omega t) \quad (2-19)$$

则电感两端的电压为

$$u = L \frac{di}{dt} = L \frac{dI_m \sin(\omega t)}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t) = U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (2-20)$$

由此可得

$$U_m = I_m \omega L \text{ 或 } U = I \omega L \quad (2-21)$$

比较式(2-19)和式(2-20)可知,在纯电感电路中,电压与电流是同频率的正弦量,电压 u 的相位超前 i 的相位 90° 。式(2-21)表明,电感元件上电压和电流的有效值符合欧姆定律,其中阻碍电流的作用是感抗 $X_L = \omega L = 2\pi fL$, X_L 与电感 L 和频率 f 成正比。波形图和相量图如图 2-9(c)和图 2-9(d)所示。

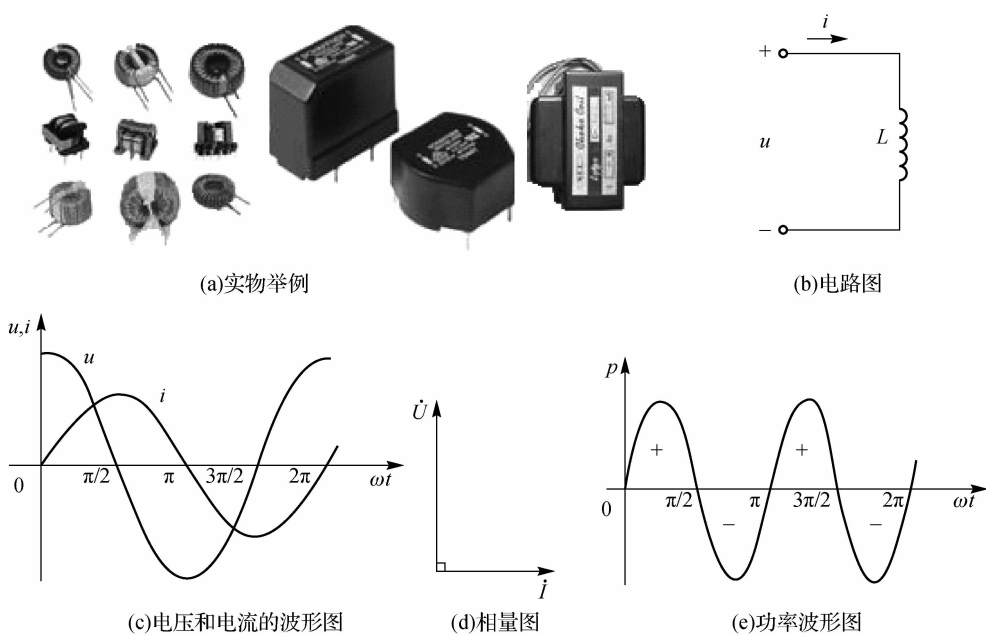


图 2-9 电感电路

上述关系用相量式表示为

$$\dot{U}_m = j\omega L \dot{I}_m \text{ 或 } \dot{U} = j\omega L \dot{I} \quad (2-22)$$

式(2-22)既表明电压与电流的数值关系符合欧姆定律,又表明了电压超前电流 90° 的相位关系。 $j\omega L$ 称为感抗的相量模型。

2. 电感元件的功率

(1) 瞬时功率。

电感元件的瞬时功率表达式如下。



$$\begin{aligned}
 p_L &= ui = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) I_m \sin(\omega t) \\
 &= \frac{1}{2} I_m U_m \sin(2\omega t) \\
 &= IU \sin(2\omega t)
 \end{aligned} \quad (2-23)$$

由式(2-23)可知,电感瞬时功率 P_L 随时间 t 按正弦规律做周期性变化,其角频率是电压电流角频率的两倍。图 2-9(e)所示为 P_L 的波形图,由图可见,在 $0 \sim \pi/2$, p_L 为正值,电感从电源吸收能量,并将此能量转换成磁场能储存在电感中;在 $\pi/2 \sim \pi$, p_L 为负值,表明此时电感将储存的磁能又转变为电能送回电源。

(2)平均功率。

电感元件在交流电路中,电感与电源总是不断地进行等量能量交换,所以它在一个周期内的平均功率等于零,其表达式如下。

$$P_L = \frac{1}{T} \int_0^T p_L dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0 \quad (2-24)$$

式(2-24)表明,电感元件不消耗电能,它是储能元件。

(3)无功功率。

电感元件与电源之间进行能量交换,可以用瞬时功率的最大值衡量电感元件与电源之间能量交换的规模,称为无功功率,即

$$Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L} \quad (2-25)$$

为区别于有功功率,无功功率的单位用乏(var)或千乏(kvar)表示。

例 2-5 在功放机的电路中有一个高频扼流线圈,用来阻挡高频信号而让音频信号通过。已知扼流圈的电感 $L=10 \text{ mH}$,它对频率分别为 $f_1=500 \text{ kHz}$ 的高频信号和 $f_2=1 \text{ kHz}$ 的音频信号的感抗分别是多少?若两个信号的电压均为 5 V ,线圈的无功功率分别是多少?

解 $X_{L1} = 2\pi f_1 L = 2 \times 3.14 \times 500 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-3} \Omega = 31.4 \text{ k}\Omega$

$$Q_{L1} = \frac{U^2}{X_{L1}} = \frac{5^2}{31.4 \times 10^3} = 0.8 \times 10^{-3} \text{ var}$$

$$X_{L2} = 2\pi f_2 L = 2 \times 3.14 \times 1 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-3} \Omega = 62.8 \Omega$$

$$Q_{L2} = \frac{U^2}{X_{L2}} = \frac{5^2}{62.8} \text{ var} \approx 0.37 \text{ var}$$

此题表明,频率对感抗的影响很大,频率越高,感抗越大,线圈中的电流小,线圈交换的无功功率也随之减小。

(三)电容电路

电容器是组成电子线路的基本元件之一,广泛应用于滤波电路、耦合电路、振荡电路等。电力电容器用于电力系统中电力负荷无功功率的补偿。如果电容器的漏电流(电容器内部从正极板通过电介质流向负极板的电流)和介质损耗可以忽略不计,则可视作理想电容元件,如图 2-10(a)所示。

1. 电容电路电压与电流的关系

在图 2-10(a)中,取电流 i 与电压 u 为关联参考方向,如选择电压为参考量,即设

$$u = U_m \sin(\omega t) \quad (2-26)$$

根据式(1-8),则电容上通过的电流为

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (2-27)$$

比较式(2-26)和式(2-27)可知,在电容电路中,电压与电流是同频率的正弦量,电流 i 超前电压 u 相位 90° ,其波形图和相量图如图 2-10(b)、图 2-10(c)所示。

由式(2-27)可得

$$I_m = \omega C U_m \text{ 或 } U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m \quad (2-28)$$

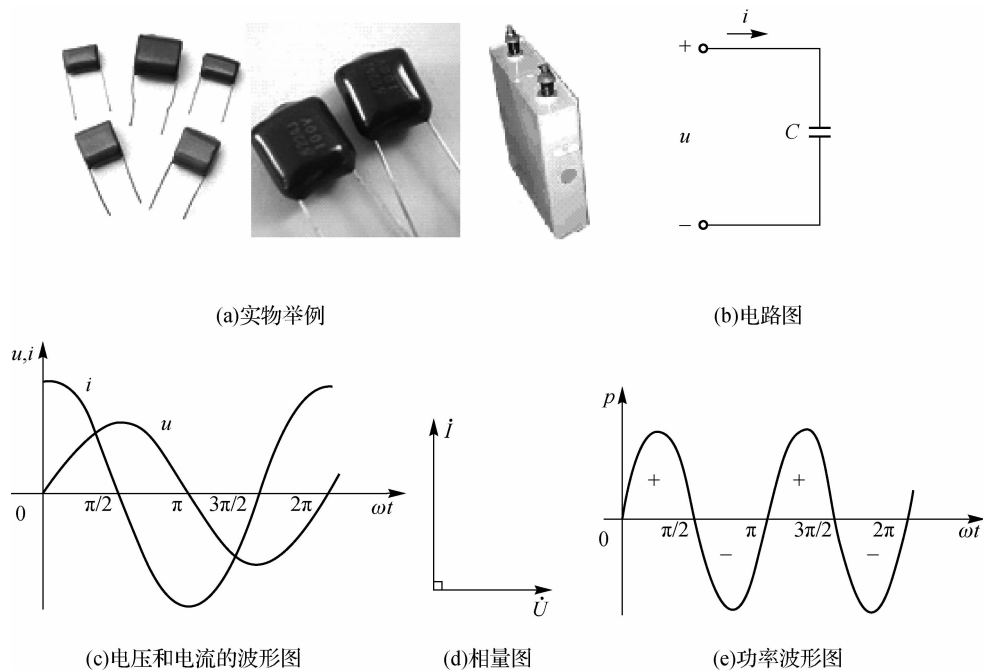


图 2-10 电容电路

式(2-28)中, $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$ 表示电容对交流电流的阻碍作用,称为容抗,单位是欧姆(Ω)。 X_C 与频率 f 成反比,如果 C 确定后, f 愈高, X_C 愈小, f 愈低, X_C 愈大。在直流电路中,容抗 X_C 趋于 ∞ ,说明电容在直流电路中可视为开路。通常人们所说的电容器的通交隔直作用,实际上就是指频率对容抗的影响。

式(2-27)用相量式表示为

$$\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m \text{ 或 } \dot{I} = j\omega C \dot{U} \quad (2-29)$$

也可写成

$$\dot{U}_m = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m \text{ 或 } \dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I} \quad (2-30)$$

式(2-29)、式(2-30)既表明电压与电流的数值关系符合欧姆定律,又表明电压超前电流 90° 的相位关系。 $\frac{1}{j\omega C}$ 称为容抗的相量模型。



2. 电容元件的功率

(1) 瞬时功率。

电容的瞬时功率表达式如下。

$$p_C = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = UI \sin 2\omega t \quad (2-31)$$

由式(2-31)可知, 电容的瞬时功率 p_C 随时间 t 按正弦规律做周期性变化, 其频率是电压电流角频率的 2 倍。图 2-10(e) 为 p_C 的波形图, 由图可见, 在 $0 \sim \pi/2$, p_C 为正值, 表明此时电源对电容器充电, 电容从电源吸取能量, 并以电场能的形式储存在电容器中; 在 $\pi/2 \sim \pi$, p_C 为负值, 表明此时电容将储存的电场能回送电源。

(2) 平均功率。

在交流电路中, 电容器与电源总是不断地进行等量的能量交换, 所以它在一个周期内的平均功率等于零, 即

$$P_C = \frac{1}{T} \int_0^T p_C dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0 \quad (2-32)$$

(3) 无功功率。

电容的平均功率 $p_C = 0$, 表明电容并不消耗功率, 所以电容元件也为储能元件。电容与电源之间互换的能量仍用无功功率 Q 来计量, 单位是乏(var), 表达式为

$$Q_C = UI = I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C} \quad (2-33)$$

例 2-6 在收录机的输出电路中, 常利用电容来滤掉高频干扰信号, 保留音频信号。如果高频滤波的电容为 $0.1 \mu\text{F}$, 干扰信号的频率 $f_1 = 1\,000 \text{ kHz}$, 音频信号的频率 $f_2 = 1 \text{ kHz}$, 求容抗分别为多少?

解 该电容对两个不同频率信号的容抗分别为

$$X_{C_1} = \frac{1}{2\pi f_1 C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 1\,000 \times 10^3 \times 0.1 \times 10^{-6}} \approx 1.6 \, \Omega$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{2\pi f_2 C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 1 \times 10^3 \times 0.1 \times 10^{-6}} \approx 1.6 \text{ k}\Omega$$

此题表明, 频率影响电容元件的容抗。



思考

思考题 9

四、正弦交流电路的分析方法

正弦交流电路应用相量分析法, 就是把正弦交流电路中的电压、电流用相量表示, 电路参数用复阻抗表示, 直流电路中所介绍的电路定律和定理在相量分析法中依然适用。

(一) 复阻抗及阻抗的概念

设有一个无源二端网络 N , 其端口电压和输入电流为同频率的正弦量。现用相量表示端电压和输入电流, 且 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 取关联的参考方向, 如图 2-11 所示。

将端口电压相量与电流相量的比定义为该二端网络的复阻抗, 用大写字母 Z 表示, 即

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \quad (2-34)$$

式(2-34)为相量形式的欧姆定律, 它反映了电路元件对正弦电压和电流的约束关系。 Z 的单位为欧姆(Ω)。

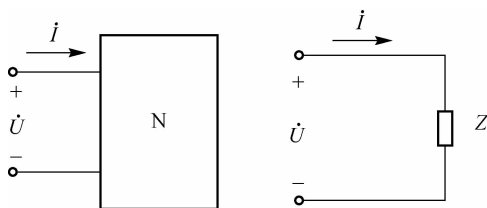


图 2-11 复阻抗的定义



提示

与电阻不同,复阻抗 Z 是一个复数,但它不是一个用来表示正弦量的复数,而只是一个复数计算量,因此,复阻抗 Z 不是相量, Z 上面不能加点。

设 $\dot{U} = U \angle \varphi_u$, $\dot{I} = I \angle \varphi_i$, 则复阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle \varphi_u - \varphi_i = |Z| \angle \varphi \quad (2-35)$$

式(2-35)中, $|Z| = \frac{U}{I}$ 是复阻抗的模,称为阻抗; $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ 称为阻抗角,是正弦电压与电流的相位差,由负载的性质决定。

根据复阻抗的定义,电阻 R 、电感 L 、电容 C 的复阻抗分别为

$$Z_R = \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = R \quad (2-36)$$

$$Z_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L} = j\omega L = jX_L \quad (2-37)$$

$$Z_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C \quad (2-38)$$

(二)相量形式的基尔霍夫定律

基尔霍夫定律描述了电路结构对各部分电流和电压的约束关系,对任一瞬间,基尔霍夫定律总是适用的,因此,基尔霍夫定律同样适用于正弦交流电路。

1. 相量形式的基尔霍夫电流定律

在任意瞬间,流过电路某个节点(或闭合面)的电流代数之和为零,即

$$\sum i = 0$$

在正弦交流电路中,各支路电流都是与正弦交流电源同频率的正弦量,将它们用相量表示,则相量形式的基尔霍夫电流定律为

$$\sum \dot{I} = 0 \quad (2-39)$$

式(2-39)中各电流前的正、负号由其参考方向决定。若其参考方向指向节点时取“+”,流出节点则取“-”;反之也可。

2. 相量形式的基尔霍夫电压定律

在任意瞬间,电路任意一个闭合回路中各元件电压的代数和为零,即

$$\sum u = 0$$

在正弦交流电路中,各元件电压都是与正弦交流电源同频率的正弦量,将它们用相量表示,则相量形式的基尔霍夫电压定律为

$$\sum \dot{U} = 0 \quad (2-40)$$

式(2-40)中各电压前的正负号由其参考方向和回路的绕行方向决定,若电压的参考方向与回路的绕行方向一致,则取“+”,相反则取“-”;反之也可。

由此可见,由相量形式表示的欧姆定律和基尔霍夫定律与直流电路的表达式相似。因此,在直流电路中由欧姆定律和基尔霍夫定律推导出来的支路电流法、节点电压法、叠加原理和戴维南定理同样适用于正弦交流电路。

例 2-7 在图 2-12 所示电路中,已知电流表 A_1 、 A_2 、 A_3 的示数都是 10 A,求电路中电流表 A 的读数。

解 设端电压为 $\dot{U} = U \angle 0^\circ$ V,选定电流的参考方向如图 2-12 所示,则

$$\dot{I}_1 = 10 \angle 0^\circ \text{ A}, \dot{I}_2 = 10 \angle -90^\circ \text{ A}, \dot{I}_3 = 10 \angle 90^\circ \text{ A}$$

根据式(2-39),总电流为

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 10 \angle 0^\circ + 10 \angle -90^\circ + 10 \angle 90^\circ = 10 \text{ A}$$

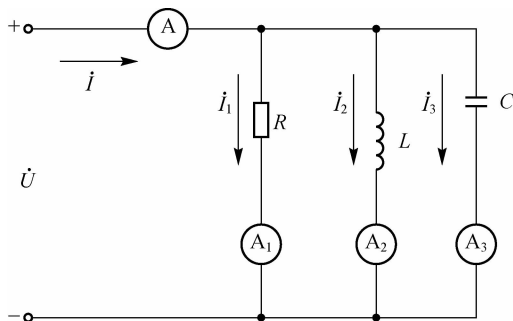


图 2-12 例 2-6 题图

五、多参数组合的正弦交流电路

单一元件参数的正弦交流电路属于理想化电路。实际电路(如日光灯电路、电动机、变压器等)往往是由电阻、电感和电容按不同的方式组合而成,因此分析多参数组合的正弦交流电路具有实际意义。

(一)电阻、电感、电容串联电路的相量分析

电阻、电感、电容串联的电路如图 2-13 所示,图中所示各电压、电流为同频率的正弦量。将电压、电流用相量表示, RLC 用复阻抗表示,图 2-13(a)所示电路的相量模型如图 2-13(b)所示。

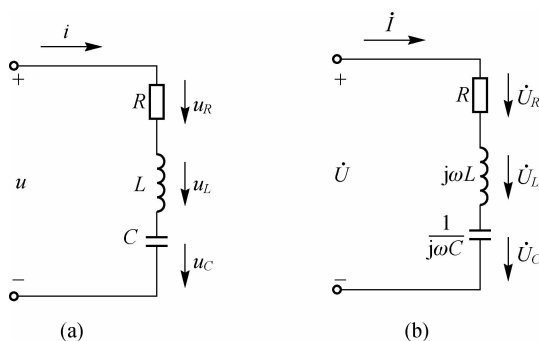


图 2-13 RLC 串联电路

根据图 2-13(b)所示电路中电压和电流的参考方向,由 KVL 得

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C \quad (2-41)$$

选择电流 $\dot{I}$ 为参考相量,即 $\dot{I} = I \angle 0^\circ$,则各元件上的电压分别为

$$\dot{U}_R = R\dot{I}, \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}, \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

将以上各式代入式(2-41),得总电压为

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} \\ &= \dot{I} \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \\ &= \dot{I} [R + j(X_L - X_C)] \\ &= \dot{I} (R + jX) = \dot{I} Z \end{aligned} \quad (2-42)$$

式(2-42)中, $Z = R + jX = |Z| \angle \varphi$,称为复阻抗;其模 $|Z|$ 称为阻抗,即

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (2-43)$$

阻抗角

$$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = \arctan \frac{X}{R} \quad (2-44)$$

根据式(2-43), $|Z|$ 、 R 、 X 三者之间的关系可以用直角三角形,即阻抗三角形来表示,如图 2-14 所示。阻抗不是正弦量,阻抗三角形不能画成相量图。

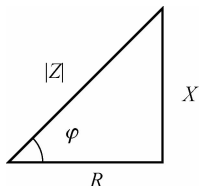


图 2-14 阻抗三角形

由式(2-42)可得电压之间的关系为 $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{U}_R + \dot{U}_X$,可用图 2-15(b)所示的相量图表示,这里假设 $X_L > X_C$ 。可见,电压之间的关系也可以用直角三角形,即电压三角形

来表示,电压三角形是相量图。

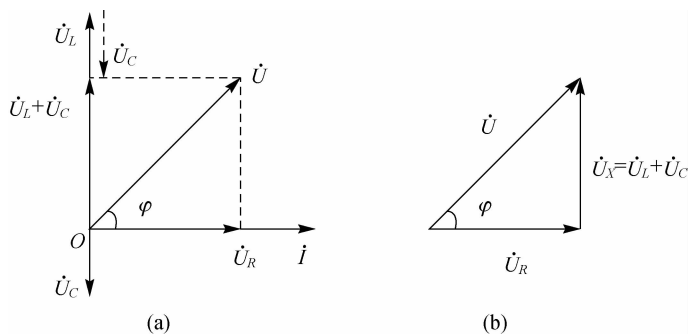


图 2-15 串联电路相量图和电压三角形

由式(2-44)可知,RLC 串联电路的性质与 X_L 和 X_C 的大小有关,下面对三种不同情况进行讨论。

- (1) 当 $X_L > X_C$ 时, $X > 0$, $U_L > U_C$ 。阻抗角 $\varphi > 0$, 总电压超前电流 φ , 电路呈电感性。
- (2) 当 $X_L < X_C$ 时, $X < 0$, $U_L < U_C$, 阻抗角 $\varphi < 0$, 总电压滞后电流 φ , 电路呈电容性。
- (3) 当 $X_L = X_C$ 时, $X = 0$, $U_L = U_C$, 阻抗角 $\varphi = 0$, 总电压与电流同相位, 电路呈电阻性, 这种特殊情况称为串联谐振。

(二) 正弦交流电路的电功率

在分析单一参数电路元件的交流电路时可知,电阻元件是消耗电能的,而电感和电容元件是不消耗电能的,它们只与电源之间进行能量交换。下面分析 RLC 串联电路中的电功率。

1. 有功功率

因为只有电阻元件消耗电能,所以电路的平均功率就是电阻消耗的功率,即

$$P = U_R I \quad (2-45)$$

由图 2-15(b)所示的电压三角形可知 $U_R = U \cos \varphi$, 代入式(2-47)可得

$$P = U_R I = UI \cos \varphi \quad (2-46)$$

应用以上两式要注意 $P = U_R I \neq \frac{U^2}{R}$, 而是 $P = \frac{U_R^2}{R}$ 。

2. 无功功率

储能元件电感与电容虽不消耗功率,但与电源之间进行能量交换,能量交换的规模仍用无功功率表示。由于感性无功功率 $Q_L = U_L I$ 与容性无功功率 $Q_C = U_C I$ 的作用是相反的,即电感吸取能量时,电容恰好释放能量;反之亦然。这样就减轻了电源的负担,使电源与负载之间传输的无功功率等于 Q_L 与 Q_C 之差,因此电路总的无功功率为

$$Q = Q_L - Q_C = U_L I - U_C I = (U_L - U_C) I = U_X I \quad (2-47)$$

由图 2-15(b)所示的电压三角形可知 $U_X = U \sin \varphi$, 代入式(2-47)得

$$Q = UI \sin \varphi \quad (2-48)$$

应用以上两式时也要注意 $Q = U_X I = \frac{U_X^2}{X} \neq \frac{U^2}{X}$ 。

3. 视在功率

在电工技术中,将电路端口电压与电流的乘积称为电路的视在功率,视在功率是电源提

供给负载的总容量,单位是伏安($V \cdot A$)或千伏安($kV \cdot A$),用 S 表示,即

$$S=UI \quad (2-49)$$

由式(2-46)、式(2-48)和式(2-49)可知,有功功率、无功功率和视在功率三者之间的关系也可以用一个直角三角形,即功率三角形来表示,如图 2-16 所示。由于功率不是正弦量,所以也不应将功率三角形画成相量图。

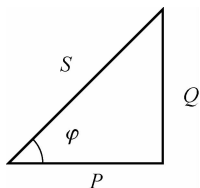


图 2-16 功率三角形

由功率三角形可知,视在功率与有功功率、无功功率的关系为

$$S=UI=\sqrt{P^2+Q^2}=\frac{P}{\cos\varphi} \quad (2-50)$$

式(2-50)中的 $\cos\varphi$ 称为功率因数,其意义是有功功率与视在功率的比值。 φ 称为功率因数角,在数值上等于阻抗角,由负载性质决定,等于总电压与总电流之间的相位差。

例 2-8 一个 RLC 串联电路如图 2-17 所示,其中 $R=30\ \Omega$, $L=382\text{ mH}$, $C=39.8\ \mu\text{F}$,外加电压 $u=220\sqrt{2}\sin(314t+60^\circ)\text{ V}$ 。试求:(1)电路的复阻抗 Z ,并确定电路的性质;(2)电路的电流 $\dot{I}$ 及电阻、电感、电容的电压 $\dot{U}_R$ 、 $\dot{U}_L$ 、 $\dot{U}_C$; (3)绘出相量图。

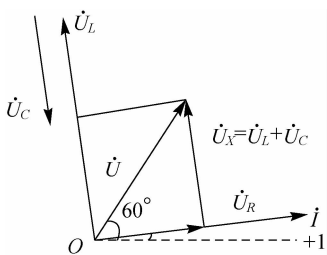


图 2-17 例 2-8 题图

解 (1)电路的复阻抗为

$$\begin{aligned} Z &= R + j(X_L - X_C) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \\ &= 30 + j(314 \times 0.382 - \frac{10^6}{314 \times 39.8}) \\ &= 30 + j(120 - 80) = 30 + j40 = 50 \angle 53.1^\circ \ \Omega \end{aligned}$$

$\varphi = 53.1^\circ > 0$,说明此电路为感性电路。

(2)根据相量形式的欧姆定律得

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220 \angle 60^\circ}{50 \angle 53.1^\circ} = 4.4 \angle 6.9^\circ \text{ A} \\ \dot{U}_R &= \dot{I}R = 4.4 \angle 6.9^\circ \times 30 = 132 \angle 6.9^\circ \text{ V} \\ \dot{U}_L &= \dot{I}jX_L = 4.4 \angle 6.9^\circ \times 120 \angle 90^\circ = 528 \angle 96.9^\circ \text{ V} \\ \dot{U}_C &= \dot{I}jX_C = 4.4 \angle 6.9^\circ \times 80 \angle -90^\circ = 352 \angle -83.1^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

相量图如图 2-17 所示。

六、电路的谐振特性分析

谐振技术在收音机、电视机等电子线路及通信技术中应用广泛,但有时谐振也会带来信

号干扰和损坏元器件等不利因素。所谓谐振,是指在含有电容和电感的电路中,当调节电路的参数或电源的频率,使电路的总电压和总电流相位相同时,整个电路呈电阻性,这时电路就发生了谐振。谐振分为串联谐振和并联谐振。

(一) 串联谐振

1. 谐振条件与谐振频率

RLC 串联电路如图 2-18 所示。

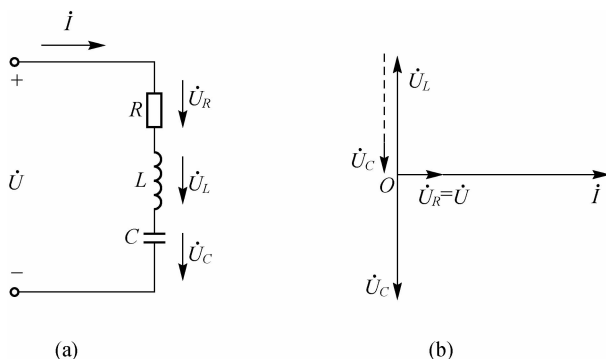


图 2-18 串联谐振

当 $\dot{U}$ 与 $\dot{i}$ 同相,即 $\varphi=0$ 时,电路产生串联谐振。串联谐振的条件是

$$X_L = X_C \text{ (即 } 2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C} \text{)} \quad (2-51)$$

式(2-51)中, f_0 为谐振频率,由此可得

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (2-52)$$

式(2-52)表明,调节 L 或 C 可改变谐振频率 f_0 ,或调节电源的频率 $f=f_0$ 也可使电路产生谐振。

2. 串联谐振的特点

(1) 电路的阻抗最小并呈电阻性,为

$$|Z_0| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$$

(2) 电路中的电流最大,谐振时的电流为

$$I_0 = \frac{U}{|Z_0|} = \frac{U}{R}$$

(3) 串联谐振时,电感、电容的电压可以比总电压大许多倍。

$$U_{L0} = \omega_0 L I_0 = \frac{\omega_0 L}{R} U$$

$$U_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = \frac{1}{\omega_0 C R} U$$

当 $X_L = X_C \gg R$ 时, $U_{L0} = U_{C0} \gg U$, 串联谐振可以在电容和电感两端产生高压,故又称其为电压谐振。其电压的相量关系如图 2-18(b) 所示。

谐振电容两端的电压 U_{C0} 或电感线圈两端的电压 U_{L0} 与总电压 U 的比值,称为串联谐振

电路的品质因数,用字母 Q 表示。

$$Q = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\omega_0 L}{R} \text{ 或 } U_{L0} = U_{C0} = QU \quad (2-53)$$

式(2-53)表明,串联谐振时电感的电压 U_{L0} 或电容的电压 U_{C0} 是电源电压 U 的 Q 倍。在电子技术中,为了提高信号的频率选择性,实用谐振电路的品质因数一般为 $50 \sim 200$,而电力系统中为了避免产生高电压,应防止电路出现串联谐振。

例 2-9 某三极管收音机的输入电路如图 2-19 所示。各地电台发射的无线电波在天线线圈中分别产生感应电动势 e_1 、 e_2 、 e_3 等。如果线圈的电阻为 16Ω ,电感为 0.3 mH ,今欲收听中央人民广播电台 560 kHz 的广播,应将调谐的可变电容 C 调到多少? 如果调谐回路中感应电压为 $2 \mu\text{V}$,求谐振电流及谐振线圈上的电压 U_L 及谐振电路的品质因数 Q 。

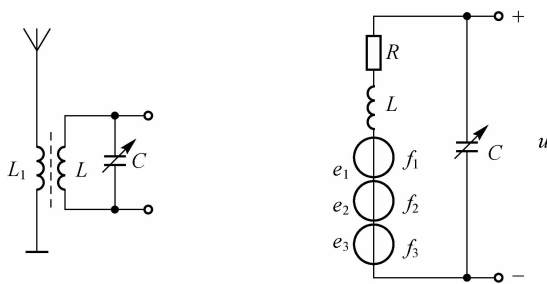


图 2-19 三极管收音机的输入电路及等效电路

解 串联谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

电容为

$$C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} = \frac{1}{(2 \times 3.14 \times 560)^2 \times 0.3} \approx 269 \text{ pF}$$

谐振时

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{2}{16} \approx 0.13 \mu\text{A}$$

$$X_L = 2\pi f_0 L = 2 \times 3.14 \times 560 \times 10^3 \times 0.3 \times 10^{-3} \approx 1 \text{ k}\Omega$$

$$U_L = X_L I_0 = 1 \times 10^3 \times 0.13 \times 10^{-6} = 130 \mu\text{V}$$

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{130}{2} = 65$$

(二)并联谐振

对于电阻不能忽略的电感线圈与电容并联的电路,当电路中的电压与总电流达到同相位时,电路所处的状态称为并联谐振,如图 2-20(a)所示。

1. 谐振条件和谐振频率

设电源的电压为 $\dot{U}$,由相量形式的欧姆定律求得各支路电流如下。

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L}, \dot{I}_C = j\omega C \dot{U}$$

由相量形式的基尔霍夫定律可得线路的总电流为

$$\begin{aligned}
 \dot{I} &= \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} + j\omega C \dot{U} \\
 &= \left[\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \right] \dot{U}
 \end{aligned} \quad (2-54)$$

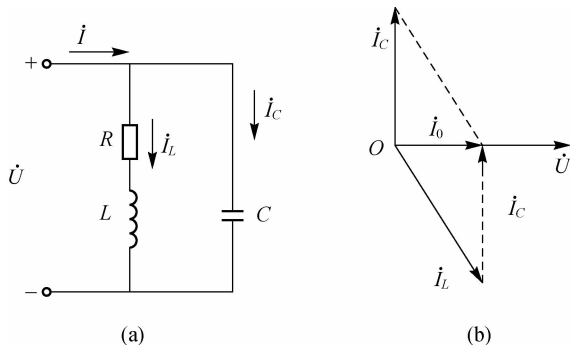


图 2-20 并联谐振电路及其相量图

根据谐振的定义,由上式可得并联谐振的条件为

$$\omega C = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

由式(2-54)可求出并联谐振的角频率和频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}, f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad (2-55)$$

一般线圈电阻 R 很小,特别是在频率较高时, $R \ll \omega L$, $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 同相,即 $\varphi = 0$,由式(2-55)可推导出并联谐振的条件是 $X_L = X_C$,并联谐振频率与串联谐振时相近,即

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (2-56)$$

2. 并联谐振的特点

(1) 电路的阻抗最大,呈电阻性, $|Z_0| = \frac{L}{RC}$ 。

(2) 电路的总电流量小, $I_0 = \frac{U}{|Z_0|}$ 。

(3) 谐振总电流 $\dot{I}_0$ 和支路电流 $\dot{I}_L$ 和 $\dot{I}_C$ 的相量关系如图 2-20(b)所示。并联谐振各支路电流大于总电流,所以并联谐振又称为电流谐振。并联谐振在电子线路中有着广泛的应用,而在电力工程中应避免并联谐振,以免给电气设备带来过流危害。

七、功率因数提高的意义和方法

(一) 提高功率因数的意义

1. 可使电源的能量得到充分利用

交流电源(发电机或变压器)的额定容量通常用视在功率 $S_N = U_N I_N$ 来表示,其供电能力是由额定电压和额定电流决定的,但是其输出并提供给负载的有功功率则与负载的功率

因数有关。当发电机的电压和电流达到额定值,如果负载的功率因数是 0.5,则发电机输出的有功功率 $P=0.5S_N$,只占发电机额定功率的 50%,而另外 50%的能量被负载的无功电流占用,却不能供给其他负载用,所以说电源的能量未能得到充分利用。

2. 减少了线路上的电压损失和功率损耗

在电源电压 U 和负载功率 P 一定的条件下,由 $I=\frac{P}{U\cos\varphi}$ 可知,提高功率因数可使输电线路的电流减小,从而减少了线路上的电压损失和功率损耗。

(二)提高功率因数的方法

提高功率因数一般有自然补偿和人工补偿两种方法。自然补偿主要是要合理使用电气设备,改善运行方式,合理选择异步电动机的型号、规格和容量,如避免异步电动机空载或轻载工作(异步电动机空载运行时,功率因数只有 0.2~0.3)。人工补偿通常在变配电所内集中安装电容器提高功率因数。对于日光灯等感性负载,可在负载两端并联适当容量的电容器,如图 2-21(a)所示。但对于功率因数很低的特大容量感性电路,实用中通常采用大型同步电动机过励磁运行(容性负载)来补偿这类电路的功率因数。

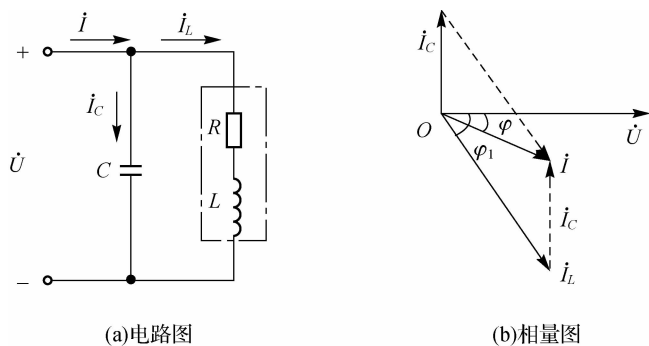


图 2-21 提高功率因数的方法

图 2-21(b)是并联电容后的电流相量图。并联电路选择电压为参考相量 $\dot{U}=U\angle 0^\circ$,电流之间的相量关系可根据 KCL 得出 $\dot{I}=\dot{I}_L+\dot{I}_C$ 。由图 2-21(b)的相量图和式(2-54),得出电容支路电流的有效值为

$$I_C=I_L\sin\varphi_1-I\sin\varphi=\frac{P}{U\cos\varphi_1}\sin\varphi_1-\frac{P}{U\cos\varphi}\sin\varphi=\frac{P}{U}(\tan\varphi_1-\tan\varphi)$$

又根据电容电路有

$$I_C=\frac{U}{X_C}=\omega CU$$

则

$$\begin{aligned}\omega CU &= \frac{P}{U}(\tan\varphi_1-\tan\varphi) \\ C &= \frac{P}{\omega U^2}(\tan\varphi_1-\tan\varphi)\end{aligned}\quad (2-57)$$

式(2-57)中, φ_1 为并联电容前的功率因数角, φ 为并联电容后的功率因数角,可根据要达到的 $\lambda=\cos\varphi$ 的值求得,一般要求 $0.9\leq\lambda<1$ 。如果 $\lambda=1$,则电路产生谐振,这是电力系统不允许的。



例 2-10 某供电设备输出电压为 220 V, 额定视在功率为 220 kV·A, 如果向额定功率为 33 kW, 功率因数为 $\lambda_1=0.8$ 的小型民办工厂供电, 问能供给几个工厂? 若把功率因数提高到 $\lambda=0.95$, 又能供给几个工厂? 每个工厂应并接多大的电容?

解 供电设备输出的额定电流为

$$I_N = \frac{S}{U} = \frac{220}{220} \text{ kA} = 1 \text{ kA}$$

当 $\lambda_1=0.8$ 时, 每个工厂取用的电流为

$$I_1 = \frac{P}{U\lambda_1} = \frac{33}{220 \times 0.8} \text{ A} = 187.5 \text{ A}$$

可供给的工厂数为

$$\frac{I_N}{I_1} = \frac{1\,000}{187.5} \approx 5$$

当 $\lambda=0.95$ 时, 每个工厂取用的电流为

$$I = \frac{P}{U\lambda} = \frac{33 \times 10^3}{220 \times 0.95} \text{ A} \approx 157.9 \text{ A}$$

可供给的工厂数为

$$\frac{I_N}{I} = \frac{1\,000}{157.9} \approx 6$$

应并接的电容为

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi)$$

其中, $\varphi_1 = \arccos 0.8 \approx 36.9^\circ$, $\varphi = \arccos 0.95 \approx 18.2^\circ$, $C = \frac{33 \times 1\,000}{2 \times 3.14 \times 50 \times 220^2} (\tan 36.9^\circ - \tan 18.2^\circ) \approx 916 \mu\text{F}$ 。

此例说明, 负载的功率因数由 0.8 提高到 0.95, 可使同台供电设备带相同负载的能力由 5 个增加到 6 个。显然, 提高功率因数可使供电设备的利用率得以提高。



八、三相交流电路

由于三相交流电在产生、输送和配电等方面的优越性, 因此交流电力系统都采用三相三线制输电、三相四线制配电。单相交流电路是三相交流电路的一相, 三相交流电路可视为三个特殊的单相交流电路的组合。

(一) 三相交流电源

1. 三相对称电动势

三相交流电动势是由三相交流发电机产生的。三相交流发电机内有三个结构完全相同的电枢绕组, 在空间互差 120° 对称分布, 称为对称三相绕组。发电机的定子一般由直流电磁铁构成, 通入直流励磁电流而产生固定磁极, 极面做成适当形状, 使定子与转子空气隙的磁感应强度按正弦规律分布。当转子由原动机拖动时, 电枢绕组在同一旋转磁场中切割磁力线, 产生三相对称的交流电动势, 即三相电动势的最大值相等, 角频率相同, 相位互差 120° , 如图 2-22 所示。

$$e_A = E_m \sin \omega t$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ)$$

思考

思考题 10

$$e_C = E_m \sin(\omega t + 120^\circ) \quad (2-58)$$

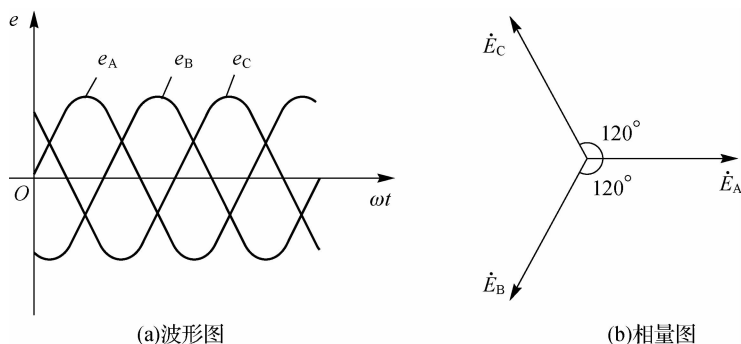


图 2-22 三相交流电

三相交流电达到正的(或负的)最大值的先后顺序,称为相序。在图 2-22 中,三相对称电动势的相序是 A—B—C。

2. 三相电源的星形联结方式

通常将发电机三相绕组的末端 X、Y、Z 连接在一起,这个联结点 N 称为中性点,自该点引出的输电线称为中性线,俗称零线,中线用蓝色标志;从三相绕组的首端 A、B、C 引出的三根输电线,称为相线,俗称火线,三相线可分别用黄、绿、红三种颜色标识。这种有中性线的三相供电方式称为三相四线制,如图 2-23(a)所示。只有三根相线而无中性线的供电方式称为三相三线制。

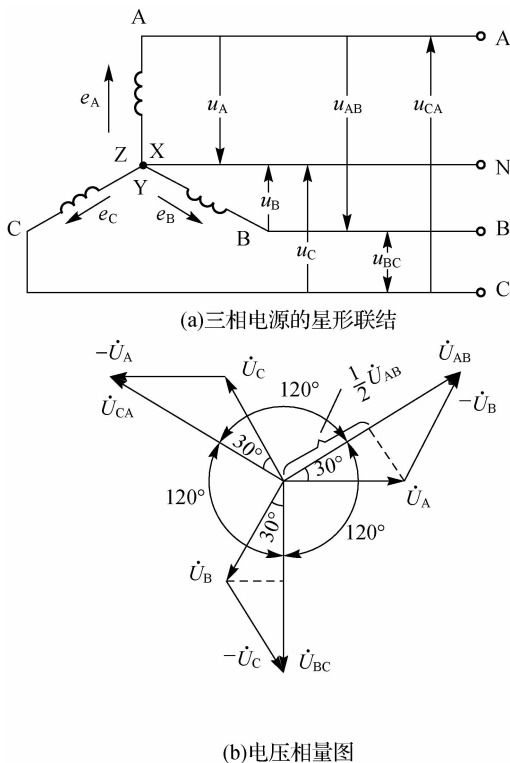


图 2-23 三相电源的星形联结

三相四线制电源可提供两种电压:相电压和线电压。相线与中性线之间的电压 U_A 、 U_B 、 U_C 称为相电压,相线与相线之间的电压 U_{AB} 、 U_{BC} 、 U_{CA} 称为线电压。由图 2-23 所示电路可知各相电压与各线电压的关系为

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B \\ \dot{U}_{CB} = \dot{U}_B - \dot{U}_C \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A \end{cases} \quad (2-59)$$

它们的相量图如图 2-23(b)所示,由图可得线电压与相电压的关系为 $\dot{U}_{AB} = \sqrt{3}\dot{U}_A / 30^\circ$,即线电压的有效值 U_l 是相电压 U_p 的 $\sqrt{3}$ 倍,相位超前相应的相电压 30° 。

如果在低压配电系统中的相电压为 220 V,则线电压 $U_l = \sqrt{3} \times 220 \text{ V} \approx 380 \text{ V}$ 。可根据负载的额定电压决定其接法。

(二)三相负载的星形(Υ)联结

交流电路的负载有三相负载和单相负载,三相电动机、三相电热炉属于三相负载。对于众多的单相用电设备,应尽量均衡分配在三相中,对于电源来说,这些单相设备的组合也称为三相负载。三相负载有两种联结方法,一种是星形(Υ)联结,另一种是三角形(Δ)联结。

在三相负载中,若每相负载的阻抗相等,即 $Z_a = Z_b = Z_c$,阻抗角相同,即 $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c$,则称为三相对称负载,否则为三相不对称负载。

将三相负载分别接在三相电源的相线和中性线之间,每相负载的电压等于电源的相电压,称为三相负载的星形(Υ)联结,如图 2-24 所示。

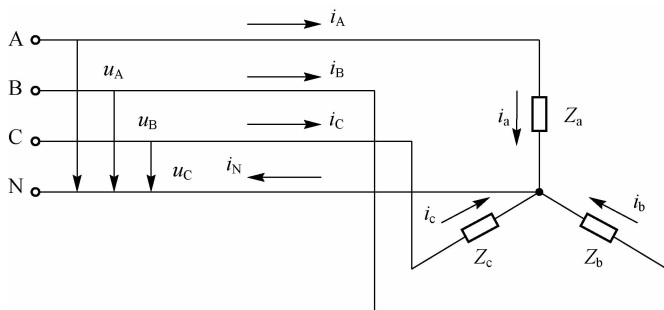


图 2-24 负载星形联结的三相四线制电路

每相负载所流过的电流 i_a 、 i_b 、 i_c 称为相电流,流过相线的电流 i_A 、 i_B 、 i_C 称为线电流。显然,对于负载星形联结,线电流等于相电流,即

$$i_A = i_a, i_B = i_b, i_C = i_c \quad (2-60)$$

其有效值一般表示为 $I_l = I_p$ 。

三相四线制各相电源与各相负载经中线构成各自独立的回路,可以利用单相交流电的分析方法对每相负载进行独立计算,即

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{Z_a}, \dot{I}_B = \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_B}{Z_b}, \dot{I}_C = \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_C}{Z_c} \quad (2-61)$$

根据 KCL 得中线电流为

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C \quad (2-62)$$

如果三相负载对称,则 $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$, 相量图如图 2-25 所示, 此时中性线可以省去; 若三相负载不对称, 中性线电流不等于零, 中性线必须保留, 且中性线不允许安装熔断器和开关, 否则若中性线断开, 各相负载不能独立正常工作, 过压或欠压甚至会造成负载的损坏。

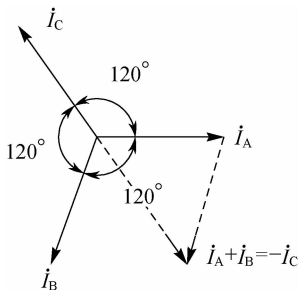


图 2-25 三相对称负载的电流相量图

例 2-11 在三相四线制电路中, 星形联结负载各相阻抗分别为 $Z_a = 8 + j6 \, \Omega$, $Z_b = 3 - j4 \, \Omega$, $Z_c = 10 \, \Omega$, 三相电源线电压为 380 V, 求各相电流及中性线电流。

解 设电源为星形联结, 则由题意知 $U_p = \frac{U_l}{\sqrt{3}} \approx 220 \, \text{V}$, 设 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \, \text{V}$, 则

$$\begin{aligned}\dot{I}_a &= \frac{\dot{U}_A}{Z_a} = \frac{220 \angle 0^\circ}{8 + j6} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle 36.9^\circ} = 22 \angle -36.9^\circ \, \text{A} \\ \dot{I}_b &= \frac{\dot{U}_B}{Z_b} = \frac{220 \angle -120^\circ}{3 - j4} = \frac{220 \angle -120^\circ}{5 \angle -53.1^\circ} = 44 \angle -66.9^\circ \, \text{A} \\ \dot{I}_c &= \frac{\dot{U}_C}{Z_c} = \frac{220 \angle 120^\circ}{10} = \frac{220 \angle 120^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 22 \angle 120^\circ \, \text{A} \\ \dot{I}_N &= \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c \\ &= 22 \angle -36.9^\circ + 44 \angle -66.9^\circ + 22 \angle 120^\circ \\ &= 17.6 - j13.2 + 17.3 - j40.5 - 11 + j19.1 \\ &= 23.9 - j34.6 \\ &= 42 \angle -55.4^\circ \, \text{A}\end{aligned}$$

由此例可见, 若三相负载不对称, 则必须保留中线。中线能使三相不对称负载的相电压对称。

例 2-12 图 2-26(a) 所示电路是用来测定三相电源相序的仪器, 称为相序指示器。任意指定电源的一相为 A 相, 把电容 C 接到 A 相上, 两只白炽灯接到另外两相上。设 $R = \frac{1}{\omega C}$, 试说明如何根据两只灯的亮度来确定 B、C 相。

解 这是一个不对称的星形负载联结电路, 如图 2-26(b) 所示, 设 $\dot{U}_A = U \angle 0^\circ$, 利用弥尔曼定理得中点电压为

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_A j\omega C + \dot{U}_B G + \dot{U}_C G}{j\omega C + 2G}$$

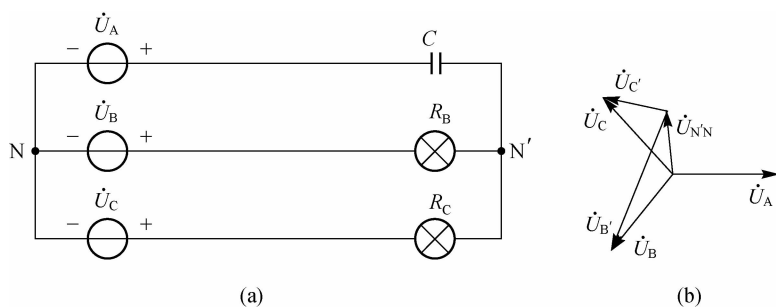


图 2-26 例 2-11 题图

将 $R=1/\omega C$, 即 $G=\omega C$ 代入上式得

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{j + 1/\angle -120^\circ + 1/\angle 120^\circ}{2+j} U = \frac{-1+j}{2+j} U = 0.632U/\angle 108.4^\circ$$

两个白炽灯的电压分别为

$$\dot{U}_{B'} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = U/\angle -120^\circ - 0.632U/\angle 108.4^\circ = 1.49U/\angle -101^\circ$$

$$\dot{U}_{C'} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = U/\angle 120^\circ - 0.632U/\angle 108.4^\circ = 0.4U/\angle 138.4^\circ$$

显然, $\dot{U}_{B'} > \dot{U}_{C'}$, 从而可知, 较亮的白炽灯所接的为 B 相, 较暗的为 C 相。

(三) 三相负载的三角形(Δ)联结

三相负载依次接在三相电源的相线与相线之间, 构成了三相负载的三角形联结, 由此可得每相负载的电压是电源的线电压。负载连接电路如图 2-27 所示。

图 2-27 中的 Z_{ab} 、 Z_{bc} 、 Z_{ca} 分别为三相负载, i_{ab} 、 i_{bc} 、 i_{ca} 分别是每相负载流过的电流, 称为相电流, I_A 、 I_B 、 I_C 是线电流。每相负载的电流如下。

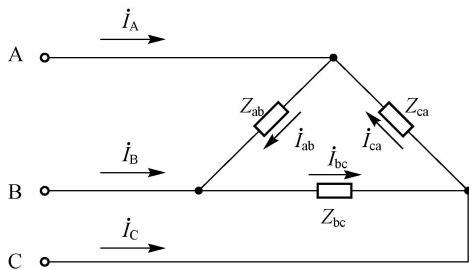


图 2-27 负载的三角形联结

$$i_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{ab}}, i_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{bc}}, i_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{ca}} \quad (2-63)$$

如果三相负载对称, 则三相电流也对称。

三相负载对称时, 可以在图 2-27 中由 KCL 得线电流与相电流的关系如下。

$$I_A = i_{ab} - i_{ca}, I_B = i_{bc} - i_{ab}, I_C = i_{ca} - i_{bc} \quad (2-64)$$

为便于分析, 设 $i_{ab} = I_P/\angle 0^\circ$, $i_{bc} = I_P/\angle -120^\circ$, $i_{ca} = I_P/\angle 120^\circ$, 则各线电流为



$$\begin{aligned}
 \dot{I}_A &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = I_P \angle 0^\circ - I_P \angle 120^\circ = I_P - I_P \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= \sqrt{3} I_P \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} I_P \angle -30^\circ \\
 &= \sqrt{3} \dot{I}_{ab} \angle -30^\circ
 \end{aligned}$$

同理

$$\dot{I}_B = \sqrt{3} \dot{I}_{bc} \angle -30^\circ, \dot{I}_C = \sqrt{3} \dot{I}_{ca} \angle -30^\circ \quad (2-65)$$

式(2-65)表明,三相对称负载三角形联结时,相电流对称,线电流也对称。线电流的有效值 I_l 是相电流有效值 I_P 的 $\sqrt{3}$ 倍,即 $I_l = \sqrt{3} I_P$,相位滞后相应的相电流 30° 。

三相负载的三角形联结只有三相三线制。



提示

三相负载究竟是接成星形还是接成三角形,要根据三相负载的额定电压和电源的线电压决定。因为实际电气设备的正常工作条件是加在设备两端的电压等于其额定电压。从供电方面考虑,我国低压供电系统的线电压一般采用 380 V 的标准;从电气设备来考虑,我国低压电气设备的额定值一般多按 380 V 或 220 V 设计。因此,在电源线电压一定,电气设备又必须得到额定电压的前提下,用户可采用合理调整负载的连接方法正确使用电源。当三相电源的线电压是 380 V,低压电气设备的额定电压也是 380 V (通常指三相负载,如三相异步电动机、三相变压器、三相感应炉等多按 380 V 设计),三相电气设备应该接成三角形;若三相负载的额定电压为 220 V,负载就必须连接成星形。若三相负载对称,则可以把中线省掉。

日常办公和生活中用到的照明电路、计算机、家电等单相电气设备的额定电压一般都设计为 220 V,所以通常把单相负载接在三相四线电源的相线和中性线之间,保证负载的电压达到 220 V 的额定电压。在连接这些单相设备时,应考虑各相负载的对称,应尽量使之相对均匀地分布在三相电源中。此时,三相负载属于不对称负载,连成星形时必须要有中性线。

(三)三相负载的功率

三相负载无论对称与否,无论作何种接法,负载总的有功功率为

$$P = P_A + P_B + P_C \quad (2-66)$$

三相总的无功功率等于各相无功功率的代数和,即

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c \quad (2-67)$$

三相总的视在功率根据功率三角形可得

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (2-68)$$

负载与三相电源联结时尽可能对称分布,如果负载对称,则三相总的功率分别为

$$\left. \begin{aligned}
 P &= 3U_P I_P \cos \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi \\
 Q &= 3U_P I_P \sin \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi \\
 S &= 3U_P I_P = \sqrt{3} U_l I_l
 \end{aligned} \right\} \quad (2-69)$$



式(2-69)中, φ 是各相电压与相电流之间的相位差。

例 2-13 如图 2-28 所示的三相对称负载, 每相负载的电阻 $R=6\ \Omega$, 感抗 $X_L=8\ \Omega$, 接入 380 V 三相三线制电源。试比较负载分别星形和三角形联结时三相负载总的有功功率。

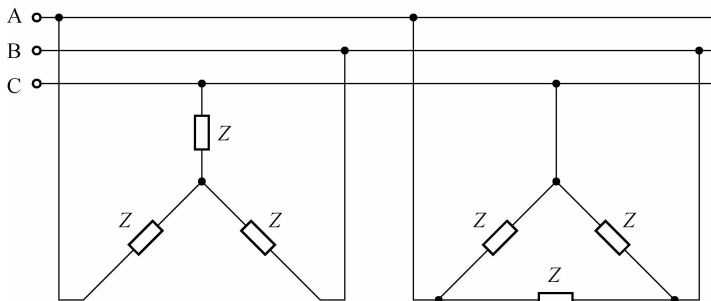


图 2-28 例 2-12 题图

解 各相负载的阻抗

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}\ \Omega = 10\ \Omega$$

负载的功率因数

$$\cos \varphi = \frac{R}{|Z|} = \frac{6}{10} = 0.6$$

星形联结时, 线电流等于相电流, 即

$$I_1 = I_P = \frac{U_P}{|Z|} = \frac{220}{10}\text{ A} = 22\text{ A}$$

故星形联结时三相总有功功率为

$$P_Y = \sqrt{3}U_1 I_1 \cos \varphi = \sqrt{3} \times 380 \times 22 \times 0.6 = 8.7\text{ kW}$$

改为三角形联结时, 每相负载的电压等于电源的线电压, 即

$$U_P = U_1 = 380\text{ V}$$

负载的相电流

$$I_P = \frac{U_P}{|Z|} = \frac{380}{10}\text{ A} = 38\text{ A}$$

则线电流 $I_1 = \sqrt{3}I_P = \sqrt{3} \times 38\text{ A} \approx 66\text{ A}$ 。

三角形联结时的三相总有功功率为

$$P_\Delta = \sqrt{3}U_1 I_1 \cos \varphi = \sqrt{3} \times 380 \times 66 \times 0.6\text{ W} \approx 26.1\text{ kW}$$

可见 $P_\Delta = 3P_Y$ 。

此例结果表明, 相同的三相对称负载, 接在同一三相对称电源中, 负载三角形联结时的功率是星形联结时的 3 倍。



单元小结

(1) 随时间按正弦规律变化的电压、电流和电动势称为交流电或正弦量。幅值、频率和初相位是正弦交流电的三要素, 知道了三个参数, 就可确定这个交流电。交流电的有效值是根据电流的热效应规定的, 有效值与幅值的关系为 $I_m = \sqrt{2}I$ 。



思考
思考题 11



(2) 正弦交流电有瞬时表达式、波形图和相量法三种表示法。相量法利用复数的运算方法对正弦交流电进行分析和计算。直流电路的分析方法和定律同样适用于相量法分析正弦交流电路。

(3) 单一参数的交流电路。

纯电阻电路: $\dot{U} = R\dot{I}$, 电压与电流同相位, $P_R = UI = I^2 R, Q = 0$ 。

纯电感电路: $\dot{U} = j\omega L\dot{I}$, 电压超前电流 90° , $P_L = 0, Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L}$ 。

纯电容电路: $\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$, 电压滞后电流 90° , $P_C = 0, Q_C = UI = I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C}$ 。

电阻为耗能元件, 电感、电容均为储能元件。

(4) RLC 串联电路, 电压与电流的关系如下。

$$\dot{U} = \dot{I} [R + j(X_L - X_C)] = \dot{I} Z$$

Z 为复阻抗, 阻抗 $|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, 阻抗角 $\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R}$ 。

各种功率和功率因数如下。

$$P = UI \cos \varphi$$

$$Q = UI \sin \varphi$$

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

以上关系可借助三个相似三角形来帮助记忆。

(5) RLC 串联谐振的条件是 $X_L = X_C$, 谐振频率为 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 同相。其特点

是阻抗最小 $|Z_0| = R$, 电流最大, 即 $I_0 = \frac{U}{R}$ 。如果 $\omega_0 L \gg R$, 则 $U_{L0} = U_{C0} = QU$, 串联谐振又称电压谐振。

当 $R \ll X_L$ 时, 并联谐振的条件也为 $X_L = X_C$, 谐振频率为 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 同相。

其特点是阻抗最大, 总电流 I_0 最小, 线圈或电容支路的电流比总电流大很多倍。

(6) 提高功率因数的意义是充分发挥电源的利用率, 减少线路上的电压和功率损失。感性负载两端并联适当容量的电容器可以提高功率因数, 并联电容的大小按式 $C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi)$ 求得。

(7) 三相交流发电机产生按正弦规律变化的幅值相等、频率相同、相位互差 120° 的三相对称交流电。三相发电机绕组星形联结时, 若采用三相四线制供电, 可给负载提供线电压和相电压两种电压, 且 $U_l = \sqrt{3}U_p$, 在相位上, 线电压超前相电压 30° 。

8. 三相负载有星形联结和三角形联结两种方式。如果三相负载对称, 则三相有功功率 $P = 3U_p I_p \cos \varphi = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi$ 。中性线上不允许接熔断器及开关。



检测习题

一、填空题

1. 随时间按_____规律变化的交变电压(或电流),称为正弦交流电。
2. 正弦交流电的三要素是_____, _____和初相位。 ω 与 f 、 T 三者之间的关系是_____。
3. 交流电的有效值是根据_____来规定的。
4. 为简化计算,工程上采用数学中的复数来表示同频率的_____,并将它们称为相量。
5. 三相对称交流电源的特点是_____, _____, _____。
6. 电感线圈对交流电的阻碍作用称为_____,其值与_____比,流过纯电感线圈中的电流比它两端的电压在相位上_____。
7. 电容元件对交流电的阻碍作用称为_____,电容对低频电流的阻碍作用大,对高频电流的阻碍作用_____。
8. 在电工技术中,把复数 $Z=R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})$ 称为_____,把复数的模称为_____。
9. 阻抗角 $\varphi>0$,电路呈感性; $\varphi<0$,电路呈容性; $\varphi=0$,电路呈_____,电压与电流同相位时,电路则发生了_____。
10. 在电工技术中,把电路端口电压有效值 U 与端口电流有效值 I 的乘积称为二端网络的_____。
11. 提高功率因数的意义是_____;降低了电能在线路上的损失。
12. 提高功率因数的方法是_____和提高自然功率因数。并联_____后,负载上的电压和_____功率均保持不变。
13. 在 RLC 串联电路中,可以用调节_____和改变_____的方法使电路谐振。
14. 若三相负载对称,则不论星形联结还是三角形联结,其三相有功功率都可用公式_____来计算。
15. 三相对称电动势的特点是最大值_____,频率_____,相位_____。
16. 对称三相四线制电源可提供两种电压:_____, $U_1=\sqrt{3}U_P$,相位关系是_____。
17. 三相对称负载作三角形联结,接入三相对称电源,则线电流是相电流的_____倍。
18. 在三相四线制供电系统中,中性线的作用是使不对称的三相负载的_____对称;中性线上不准安装_____和开关。



二、选择题

1. 已知两个正弦量分别为 $i_1 = -4\sin(100t + 60^\circ)$ A, $i_2 = 4\sin(100t + 60^\circ)$ A, 则 i_1 与 i_2 的相位差为()。

- A. 180° B. 0° C. 90° D. -90°

2. 已知两个同频率的相量分别为 $\dot{U}_1 = 50\angle 30^\circ$ V, $\dot{U}_2 = -100\angle -150^\circ$ V, 则其对应的正弦电压 u_1 与 u_2 的相位差为()。

- A. 0° B. 90° C. 120° D. -120°

3. 某正弦电流 $i = 100\sin(314t + 15^\circ)$ A, 则其周期和有效值为()。

- A. 0.01 s, 100 A B. 0.02 s, 100 A C. 0.01 s, 70.7 A D. 0.02 s, 70.7 A

4. 相量 $A = 1 - j$ 的辐角为()。

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $3\frac{\pi}{4}$ C. $-3\frac{\pi}{4}$ D. $-\frac{\pi}{4}$

5. 某正弦电压 $u_1 = U_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{3})$ V, u_2 超前 u_1 相位 60° , 则 u_2 的初相位为()。

- A. 0° B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $-\frac{2\pi}{3}$ D. π

6. 对于三相四线制供电线路, 已知作星形联结的三相负载中 A 相负载为纯电阻, B 相为纯电感, C 相为纯电容, 通过三相负载的电流均为 10 A, 则中性线电流为()。

- A. 30 A B. 10 A C. 7.32 A D. 0 A

7. 在电源对称的三相四线制电路中, 若三相负载不对称, 则该负载各相电压()。

- A. 不对称 B. 仍然对称 C. 不一定对称

8. 三相发电机绕组接成三相四线制, 测得三个相电压 $U_A = U_B = U_C = 220$ V, 三个线电压 $U_{AB} = 380$ V, $U_{BC} = U_{CA} = 220$ V, 这说明()接反了。

- A. A 相绕组 B. B 相绕组 C. C 相绕组

9. 三相对称电路是指()。

- A. 三相电源对称的电路 B. 三相负载对称的电路
C. 三相电源和三相负载都对称的电路

10. 在三相四线制中, 中线的作用是()。

- A. 保证三相负载对称 B. 保证三相功率对称
C. 保证三相电压对称 D. 保证三相电流对称

三、分析计算题

1. 我国民用照明电压的频率、周期、有效值和幅值分别是多少? 写出初相位为零的电压瞬时值表达式, 画出波形图, 并计算当 $t = 5$ ms 时电压的瞬时值。

2. 有一个加热器, 用万用表测出其阻值为 $80\ \Omega$, 现接到 $u = 311\sin 314t$ V 的交流电源上, 写出加热器流过的电流瞬时值表达式, 并计算每天使用 1 h, 30 天消耗多少度电?

3. 一个额定功率为 220 V/500 W 的电熨斗, 接在 220 V 的工频电源上, 求电熨斗的电流。如果每天使用 1 h, 30 天共耗多少度电? 如果电源频率改为 60 Hz, 上述计算值是否有变化?

4. 写出 $u_A = 220\sqrt{2}\sin 314t$ V, $u_B = 220\sin(314t - 120^\circ)$ V, $u_C = 220\sin(314t + 120^\circ)$ V



的相量表达式,并画出相量图。

5. 在电视机的电源滤波电路中有一个电感为 0.6 mH 的线圈,试计算它对 50 Hz 的电源感抗和对 100 kHz 的微波干扰信号的感抗。

6. 已知相量 $A=8+j6, B=8\angle-60^\circ$ 。试求: (1) $A+B$; (2) $A-B$; (3) $A\times B$; (4) A/B 。

7. 有一个电扇电机的电感为 0.1 H ,电阻忽略不计,接在工频 220 V 的电源上,求电机电流和无功功率,并画出以电流为参考量的电压与电流相量图。

8. 为了提高负载的功率因数,将一个 $250 \text{ V}/4.7 \mu\text{F}$ 无极性电容与感性负载并联接在工频 220 V 的电源上,求电容支路的电流和电容的无功功率,并以电压为参考量,画出电容电压与电容电流的相量图。

9. 在图 2-29 所示电路中,已知 $R=50 \Omega, L=31.8 \text{ mH}, C=318 \mu\text{F}$ 。求电源电压为 220 V ,频率分别为 50 Hz 和 1 kHz 两种情况下各元件所流过的电流,并以电源电压为参考量,画出 $\dot{I}_R, \dot{I}_L, \dot{I}_C$ 和 $\dot{I}$ 的相量图。

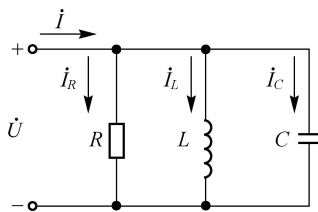


图 2-29

10. 在图 2-30 所示电路中,A、B、C 三个照明灯相同,三种元件的 $R=X_C=X_L$,试问接于交流电源上时,照明灯的亮度有什么不同?若改接到电压相同的直流电源上,稳定后,与交流电源时相比,各照明灯亮度有什么变化?

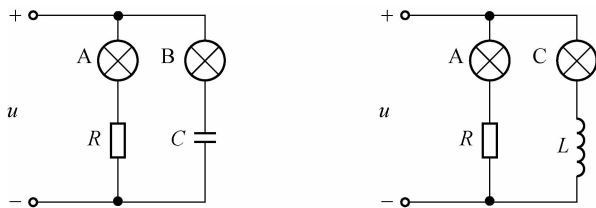


图 2-30

11. 将一个电感线圈接在 12 V 直流电源上,通过的电流为 0.8 A ,改接在 1 kHz 、 12 V 的交流电源上,通过的电流为 0.6 A ,求此线圈的电阻和电感。

12. 已知 $R=30 \Omega, L=127 \text{ mH}, C=40 \mu\text{F}$ 串联,流过的电流为 $i=4.4\sqrt{2}\sin 314t \text{ A}$ 。试求: (1) 感抗、容抗和阻抗; (2) 各元件上电压的有效值及总电压的瞬时值表达式; (3) 有功功率、无功功率和视在功率; (4) 画出电压相量图。

13. 调幅半导体收音机的中频变压器电感为 0.6 mH ,问应并联多大的电容才能谐振在 465 kHz 的中频频率上。

14. 某收音机的输入电路见图 2-19,如果天线回路中的电感为 0.33 mH ,可变电容 C 应

在多大范围内可调才能收听到 530~1 600 kHz 的中波段广播。

15. 有一日光灯电路如图 2-31 所示, 灯管与镇流器串联接在工频 220 V 的交流电源上, 灯管的电阻 $R_1=300\ \Omega$, 镇流器的线圈电感 $L=1.5\ \text{H}$, 电阻 $R=20\ \Omega$ 。试求: (1) 电路中的电流 I ; (2) 灯管两端的电压 U_{R_1} 及镇流器两端的电压 U_{LR} ; (3) 电路消耗的有功功率 P 和无功功率 Q_L 及功率因数 $\cos\varphi$; (4) 画出以电流 $\dot{I}$ 为参考相量的 $\dot{U}_{R_1}$ 、 $\dot{U}_{LR}$ 和 $\dot{U}$; (5) 如要将功率因数提高到 0.95, 应并联多大的电容?

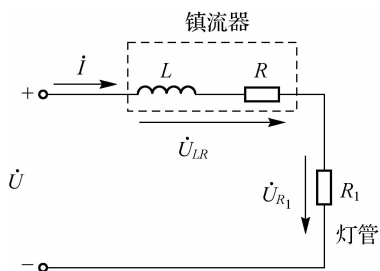


图 2-31

16. 在三相四线制供电系统中, 如果相电压 $u_A=220\sqrt{2}\sin\omega t$, 试写出 u_B 和 u_C 的表达式, 并求出 U_l 的值。

17. 使用三相电源时, 三相负载尽可能对称分布在三相电源中。如果现有民用六层楼房, 每层楼总的负荷是 6 kW, 应怎样接在线电压为 380 V 的三相四线制电源上? 画出接线图。如果负载都处于工作状态, 求每相负载的电压、电流、各相线电流和中性线电流, 如果 A 相断了, 再求中性线电流。

18. 对于三相对称负载, 每相的电阻 $R=8\ \Omega$, 感抗 $X_L=6\ \Omega$, 星形联结在线电压 $U_l=380\ \text{V}$ 的三相电源上, 求相电压、相电流、线电流、中性线电流和三相总的有功功率、无功功率及视在功率。

单元三

线性电路的过渡过程



学习目标

- 了解换路及一阶线性电路过渡过程的概念及物理意义。
- 掌握换路定律,并会应用换路定律求动态电路的初值。
- 掌握一阶 RC 、 RL 电路的零输入响应的求解方法。
- 掌握一阶 RC 、 RL 电路的零状态响应的求解方法。
- 掌握三要素法求解一阶 RC 、 RL 电路全响应的方法。



课程导入

在含有储能元件的电路中,当电路的工作条件发生变化,如电路的接通或断开、某支路短路、元件参数突变等,这些情况的变化称为换路。换路时,电路中的电压、电流要从原有的稳态值向新的稳态值转变,一般情况下这个转变不会瞬间完成,它必须经历一段时间,在这段时间内完成从原有稳态向新稳态的过渡,这一过程称为电路的过渡过程,也称暂态。本单元讨论一阶线性电路的过渡过程。

一、过渡过程的产生及换路定律

(一)过渡过程的产生

前面对电路的分析都是稳态分析。稳态是指电路中的电流和电压在给定的条件下已达到稳定值的状态。

过渡过程的产生是物质所具有的能量不能跃变引起的。如果能量能跃变,即意味着能量的变化率(功率)为无穷大,因此在含有电感或电容的电路中,储能元件能量的储存和消失都需要有一个过程。

由于电感的储能 $W_L = \frac{1}{2}Li^2$, 电容的储能 $W_C = \frac{1}{2}Cu^2$, 故电感中的电流 i_L 、电容的电压

u_C 不能跃变,只能缓慢变化。

暂态在实践中有着重要的作用,在波形的产生和改善设计中广泛应用了电路的暂态过程。但是,暂态也有不利的一面,如在接通或断开某些电路而发生的暂态过程中,会产生过电压和过电流的现象,导致电气设备和电气元件受到损害。

(二)换路定律

假设 $t=0$ 为换路瞬间,而以 $t=0_-$ 表示换路前的瞬间, $t=0_+$ 表示换路后的瞬间。 0_- 和 0_+ 在数值上都等于 0,但前者是指 t 从负值趋于零,后者是指 t 从正值趋于零。从 $t=0_-$ 到 0_+ 瞬间,电感元件中的电流和电容元件的电压不能跃变,这称为换路定律,用公式表示为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (3-1)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (3-2)$$

在运用换路定律求取电路变量的初始值时,应注意以下几点。

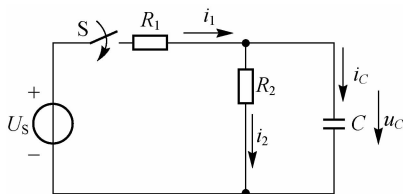
(1)换路定律只适用于换路瞬间电感的初始电流 $i_L(0_+)$ 和电容的初始电压 $u_C(0_+)$ 。

(2)一般先根据 $t < 0$ 时的电路求出 $i_L(0_-)$ 或 $u_C(0_-)$,由式(3-1)或式(3-2)即可求得 $i_L(0_+)$ 或 $u_C(0_+)$,再结合电路其他参数确定 $t=0_+$ 时刻电路中其他电压和电流的初始值。

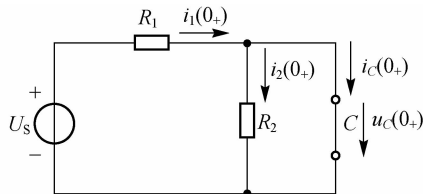
(3)对于直流激励,换路前及很长时间后的稳定状态,电容元件可视为开路,电感元件可视为短路。

(4)对于已储能的电容和电感,在换路瞬间,即 $t=0_+$ 时刻,可分别将电容电压作为电压源和将电感电流作为电流源处理。

例 3-1 在图 3-1(a)所示电路中,已知 $U_S=12\text{ V}$, $R_1=4\text{ k}\Omega$, $R_2=8\text{ k}\Omega$, $C=1\text{ }\mu\text{F}$ 。开关 S 原来处于断开状态,电容上的电压 $u_C(0_-)=0$ 。求开关 S 闭合后, $t=0_+$ 时,各电流及电容电压的数值。



(a) 电路原理图



(b) $t=0_+$ 时的等效电路

图 3-1 例 3-1 题图

解 选定有关参考方向,如图 3-1(b)所示。

(1)由已知条件可知 $u_C(0_-)=0$ 。

(2)由换路定律可知 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$ 。

(3)求其他各电流、电压的初始值。画出 $t=0_+$ 时刻的等效电路,如图 3-1(b)所示。由于 $u_C(0_+)=0$,所以在等效电路中电容相当于短路,故有

$$i_2(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_2} = \frac{0}{R_2} = 0$$

$$i_1(0_+) = \frac{U_S}{R_1} = \frac{12}{4 \times 10^3} \text{ A} = 3 \text{ mA}$$

由于 $i_2(0_+)=0$,有

$$i_C(0+) = i_1(0+) = 3 \text{ mA}$$

例 3-2 在图 3-2(a)所示电路中,已知 $U_S = 10 \text{ V}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$, 开关 S 原处于断开状态。求开关 S 闭合后 $t = 0_+$ 时,各电流及电感电压 u_L 的数值。

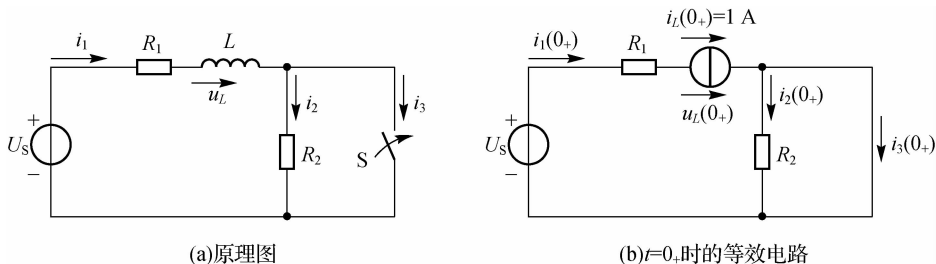


图 3-2 例 3-2 题图

解 选定有关参考方向,如图 3-2(b)所示。

(1) 求 $t = 0_-$ 时的电感电流 $i_L(0_-)$ 。

由原电路已知条件得

$$i_L(0_-) = i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = \frac{10}{6 + 4} \text{ A} = 1 \text{ A}$$

$$i_3(0_-) = 0$$

(2) 求 $t = 0_+$ 时的 $i_L(0_+)$ 。

由换路定律知

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1 \text{ A}$$

(3) 求其他各电压、电流的初始值。画出 $t = 0_+$ 时的等效电路,如图 3-2(b)所示。由于 S 闭合, R_2 被短路,则 R_2 两端电压为零,故 $i_2(0_+) = 0$ 。由 KCL 有

$$i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = i_1(0_+) = 1 \text{ A}$$

由 KVL 得

$$-U_S + i_1(0_+)R_1 + u_L(0_+) = 0$$

$$u_L(0_+) = U_S - i_1(0_+)R_1 = (10 - 1 \times 6) \text{ V} = 4 \text{ V}$$

二、一阶 RC、RL 电路过渡过程的分析

(一) 一阶 RC 电路的过渡过程分析

1. RC 电路的零输入响应

只含有一个储能元件的电路称为一阶电路。所谓 RC 电路的零输入响应,是指动态电路在没有独立电源激励时,由初始状态 $u_C(0_+)$ 产生的电路响应。

分析 RC 电路的零输入响应,实际上就是分析它的放电过程,以图 3-3 所示电路为例。换路前,开关 S 合在位置 2 上,直流电源对电容元件充电。在 $t = 0$ 时将开关 S 从位置 2 合到位置 1,使电路脱离电源,电路变为零输入。此时,电容元件已储有能量,电容电压 $u_C(0_+) = U_0$ (若换路前,电路已处于稳态,则 $U_0 = U_S$),已充电的电容元件将通过电阻放电。



动画
RC 充放电
电路

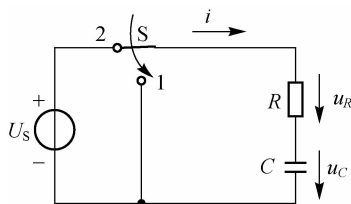


图 3-3 RC 放电电路

根据 KVL, 当 $t \geq 0$ 时, $u_R + u_C = 0$, 即

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (3-3)$$

该方程为一阶常系数线性齐次微分方程, 其通解形式为

$$u_C = Ae^{pt}$$

代入式(3-3), 得出该微分方程的特征方程为

$$RCp + 1 = 0$$

其特征根为

$$p = -\frac{1}{RC}$$

从而方程的解, 即电容电压为

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-4)$$

根据初始条件确定常数 A 。由换路定律, 在换路瞬间电容电压不能跃变, 所以换路后瞬间的电容电压为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

将此值代入式(3-4), 得

$$A = u_C(0_+) = U_0$$

于是

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-5)$$

其中, $\tau = \frac{L}{R}$, 称为 RL 电路的时间常数, 单位是秒(s)。

电容元件的放电电流

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-6)$$

式(3-5)中, $\tau = RC$, 称为 RC 电路的时间常数, τ 的数值大小反映了电路过渡过程的快慢。需要注意的是, τ 计算式中的 R 是指 $t \geq 0$ 时, 从电容两端看的等效电阻。

当 $t = \tau$ 时, 有

$$u_C(\tau) = U_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} = \frac{U_0}{e} = \frac{U_0}{2.718} = 36.8\% U_0$$

可见时间常数 τ 是电容电压降到初始值 U_0 的 36.8% 所需的时间。一般认为经历 5τ 之后过渡过程基本结束。

例 3-3 供电局向某企业供电电压为 10 kV, 在切断电源瞬间, 电网上遗留有 $10\sqrt{2}$ kV

的电压。已知送电线路长 $L=30\text{ km}$, 电网对地绝缘电阻为 $500\text{ M}\Omega$, 电网的每千米分布电容为 $C_0=0.008\text{ }\mu\text{F/km}$ 。求: (1) 拉闸后 1 min , 电网对地的残余电压为多少? (2) 拉闸后 10 min , 电网对地的残余电压为多少?

解 电网拉闸后, 储存在电网电容上的电能逐渐通过对地绝缘电阻放电, 这是一个 RC 串联电路的零输入响应问题。

由题意知, 长 30 km 的电网总电容量为

$$C=C_0 \times L=0.008 \times 30\text{ }\mu\text{F}=0.24\text{ }\mu\text{F}=2.4 \times 10^{-7}\text{ F}$$

放电电阻为

$$R=500\text{ M}\Omega=5 \times 10^8\text{ }\Omega$$

时间常数为

$$\tau=RC=5 \times 10^8 \times 2.4 \times 10^{-7}\text{ s}=120\text{ s}$$

电容上初始电压为

$$U_0=10\sqrt{2}\text{ kV}$$

在电容放电过程中, 电容电压(即电网电压)的变化规律为

$$u_C(t)=U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

故

$$u_C(60\text{ s})=10\sqrt{2} \times 10^3 e^{-\frac{60}{120}} \approx 8\,576\text{ V} \approx 8.6\text{ kV}$$

$$u_C(600\text{ s})=10\sqrt{2} \times 10^3 e^{-\frac{600}{120}} \approx 95.3\text{ V}$$

2. RC 电路的零状态响应

所谓 RC 电路的零状态, 是指换路前电容元件没有储能, 即 $u_C(0_-)=0$, 在此条件下, 由外加激励而引起的电路响应, 称为 RC 电路的零状态响应。

分析 RC 电路的零状态响应, 实际上就是分析它的充电过程。图 3-4 是 RC 充电电路, 当 $t=0$ 时, 开关 S 闭合, 电路接通直流电源, 电容元件开始充电。根据基尔霍夫电压定律, 当 $t \geq 0$ 时, 可写出电路方程 $u_R+u_C=U_S$, 即

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (3-7)$$

式(3-7)是一个一阶常系数非齐次方程, 它的特解, 即电路的稳态分量为

$$u'_C = U_S$$

而式(3-7)对应齐次方程的通解, 即电路的暂态分量与式(3-4)相同, 为

$$u''_C = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

于是, 由微分方程的结构理论, 可知方程(3-7)解的形式为

$$u_C = u'_C + u''_C = U_S + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

利用初始条件 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 可得 $A = -U_S$, 所以电容元件的电压为

$$u_C = u'_C + u''_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3-8)$$

式(3-8)中, $\tau=RC$, 称为 RC 电路的充电时间常数。

当 $t \geq 0$ 时, 充电电流为

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-9)$$

电阻元件 R 的电压为

$$u_R = iR = U_S e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-10)$$

u_C 、 u_R 及 i 随时间变化的曲线如图 3-5 所示。

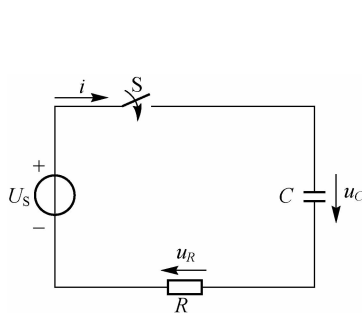


图 3-4 RC 充电电路

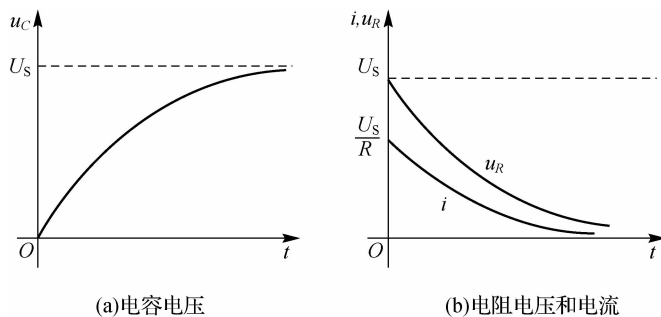


图 3-5 充电电路曲线

例 3-4 在图 3-6 所示电路中，电容原来没有储能。 $t=0$ 时开关 S 闭合，试求：

(1) 电路的时间常数；(2) 充电电流的最大值；(3) u_C 和 i ；(4) 开关闭合 60 ms 时的 u_C 和 i 。

解 (1) 时间常数 τ 为

$$\tau = RC = 0.75 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-6} \text{ s} = 15 \text{ ms}$$

(2) $t = 0_+$ 时， $i = i_{\max}$ ，所以

$$i_{\max} = \frac{U_S}{R} = \frac{9}{0.75 \times 10^3} \text{ A} = 12 \text{ mA}$$

(3) u_C 和 i 分别为

$$u_C = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 9 (1 - e^{-\frac{t}{15 \times 10^{-3}}}) \text{ V} \approx 9 (1 - e^{-66.7t}) \text{ V}$$

$$i = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{9}{0.75 \times 10^3} e^{-\frac{t}{15 \times 10^{-3}}} \text{ mA} \approx 12 e^{-66.7t} \text{ mA}$$

(4) 当 $t = 60 \text{ ms}$ 时， $t = 4\tau$ ，所以此时

$$u_C = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 9 (1 - e^{-4}) \text{ V} \approx 8.84 \text{ V}$$

$$i = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = 12 e^{-4} \text{ mA} \approx 0.22 \text{ mA}$$

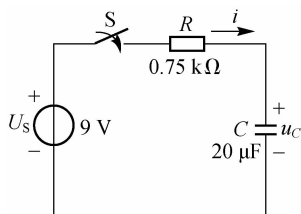


图 3-6 例 3-4 图

3. RC 电路的全响应

所谓 RC 电路的全响应，是指电源激励 U_S 和电容元件的初始状态 $u_C(0_+)$ 均不为零时电路的响应，也就是零输入响应和零状态响应的叠加。

对于图 3-4 所示的电路，如果电容元件有初始电压 $u_C(0_+) = U_0$ ，则当 $t \geq 0$ 时，电路方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (3-11)$$

其解的形式为

$$u_C = u'_C + u''_C = U_S + A e^{-\frac{t}{RC}}$$

由初始条件 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ ，代入上式得 $A = U_0 - U_S$ 。所以，电容上的电压表达式为

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-12)$$

或

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3-13)$$

电路中的电流为

$$i = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-14)$$

很明显,式(3-13)右边第一项 $U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ 是零输入响应,第二项 $U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ 是零状态响应,因此有

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

例 3-5 在图 3-7 所示电路中,开关 S 断开前电路处于稳态。已知 $U_S = 20 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ 。求开关闭合后, u_C 和 i_C 的解析式,并画出其曲线。

解 选定各电流和电压的参考方向如图 3-7 所示。

因为换路前电容上的电流 $i_C(0_-) = 0$, 故有

$$\begin{aligned} i_1(0_-) = i_2(0_-) &= \frac{U_S}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{20}{10^3 + 10^3} \\ &= 10 \times 10^{-3} \text{ A} = 10 \text{ mA} \end{aligned}$$

换路前电容上的电压为

$$u_C(0_-) = i_2(0_-)R_2 = 10 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^3 \text{ V} = 10 \text{ V}$$

即 $U_0 = 10 \text{ V}$ 。

由于 $U_0 < U_S$, 所以换路后电容将继续充电, 其充电时间常数为

$$\tau = R_1 C = 1 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6} \text{ s} = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$$

将上述数据代入式(3-13)和式(3-14), 得

$$\begin{aligned} u_C &= U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} = 20 + (10 - 20)e^{-\frac{t}{10^{-3}}} = (20 - 10e^{-1000t}) \text{ V} \\ i_C &= \frac{U_S - U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{20 - 10}{1000}e^{-\frac{t}{10^{-3}}} \text{ A} = 0.01e^{-1000t} \text{ A} = (10e^{-1000t}) \text{ mA} \end{aligned}$$

u_C 、 i_C 随时间的变化曲线如图 3-8 所示。

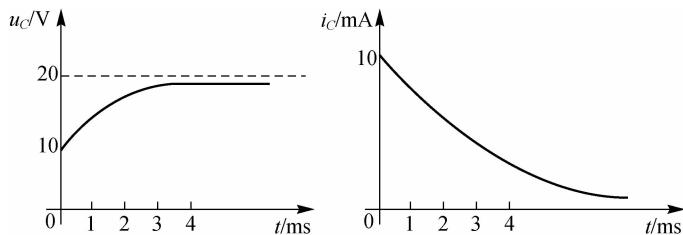


图 3-8 例 3-5 中 u_C 、 i_C 随时间变化的曲线

(二)一阶 RL 电路过渡过程的分析

1. RL 串联电路的零输入响应

图 3-9 所示为 RL 零输入响应电路。换路前,开关 S 合在位置 2 上,电路处于稳定状态,

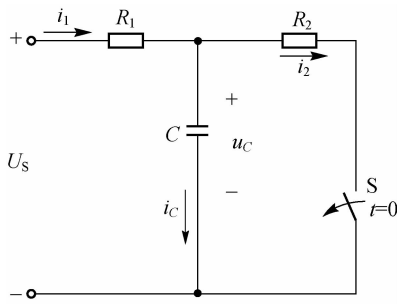


图 3-7 例 3-5 题图

$I_0 = \frac{U_S}{R}$ 。在 $t=0$ 时刻,将开关 S 从位置 2 合到位置 1 上,使电路脱离电源, RL 被短路。有一个电感能量消耗的过程。下面分析它的过渡过程。

根据基尔霍夫电压定律,当 $t \geq 0$ 时,电路方程 $u_R + u_L = 0$, 即

$$L \frac{di}{dt} + i_L R = 0 \quad (3-15)$$

其特征根为

$$p = -\frac{R}{L}$$

从而式(3-15)的解,即放电电流的形式为

$$i = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

代入初始条件并由换路定律得 $A = I_0$, 所以有

$$i_L = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-16)$$

电阻元件与电感元件的电压分别如下。

$$u_R = i_L R = I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}}$$

i 、 u_R 和 u_L 随时间变化的曲线如图 3-10 所示。

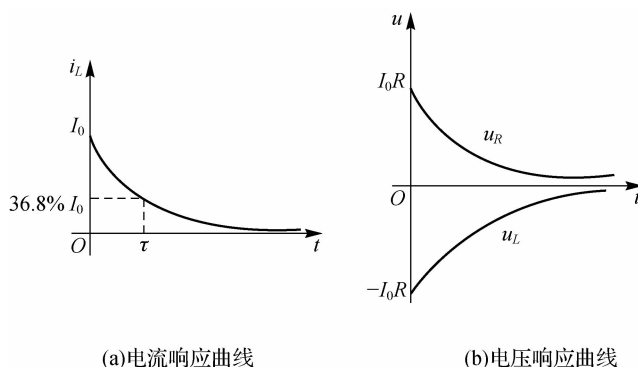


图 3-10 电路的响应曲线

实际线圈的电路模型是电感与电阻的串联电路。如果在图 3-9 中,用开关 S 将线圈从电源断开而未加以短接,则由于电流变化率很大,导致自感电动势也很大,使线圈两端产生过电压,可能使开关两触点之间的空气击穿,产生电弧而延缓电流的中断,此时不仅开关触点会被电弧烧坏,对人身也可能带来伤害。因此在具有较大电感的 RL 串联电路中,如变压器电路、电动机电路,就不能随便拉闸,而应在电源断开的同时接通一个低值泄放电阻防止电弧的产生。

例 3-6 在图 3-11 中, RL 是发电机励磁线圈的等效电路,其电感较大。 R_f 是励磁调节电阻。当电源开关断开时,为了防止电弧烧坏开关触点,接通泄放电阻 R' 。已知电源电压 $U_S = 220 \text{ V}$, $L = 5 \text{ H}$, $R = 60 \text{ } \Omega$, $R_f = 40 \text{ } \Omega$ 。

(1) 设 $R' = 1\ 000 \text{ } \Omega$, 试求当开关接通 R' 的瞬间,线圈两端的电压 u_{RL} 。

(2) 为了不使(1)中 u_{RL} 的绝对值超过 220 V, 则电阻 R' 应选多大?

(3) 写出(2)中 i 和 u_{RL} 随时间变化的表达式。

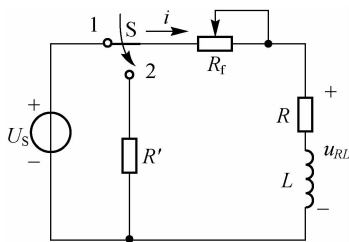


图 3-11 例 3-6 题图

解 (1) 换路前, 流过线圈的电流为

$$i(0_-) = \frac{U_s}{R_f + R} = \frac{220}{40 + 60} \text{ A} = 2.2 \text{ A}$$

当 $t=0$ 时, 开关合到位置 2, 此刻, 线圈的电流为 $i(0_+) = i(0_-) = 2.2 \text{ A}$, 而线圈两端的电压 u_{RL} 为电阻 R_f 和 R' 上的电压降之和, 即

$$u_{RL}(0_+) = -(R_f + R')i(0_+) = -(1\,000 + 40) \times 2.2 \text{ V} = -2\,288 \text{ V}$$

由此可见, u_{RL} 的值很大。

(2) 要使 u_{RL} 的值小于 220 V, 只要 $|u_{RL}(0_+)| \leq 220 \text{ V}$ 即可。

由 $(R' + 40) \times 2.2 \leq 220$, 得 $R' \leq 60 \, \Omega$ 。

(3) 若接 $R' = 60 \, \Omega$, 则

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{R + R_f + R'}{L}t} = 2.2 e^{-32t} \text{ A}$$

$$u_{RL} = -(R_f + R')i = -(40 + 60) \times 2.2 e^{-32t} \text{ V} = -220 e^{-32t} \text{ V}$$

2. RL 串联电路的零状态响应

在图 3-12 所示电路中, 换路前, 线圈没有储能, $i_L(0_-) = 0$ 。当 $t=0$ 时将开关 S 合上, 电路与一直流电源 U_s 接通。这是一个零状态响应的电路。

根据基尔霍夫电压定律, 列出 $t \geq 0$ 时的电路方程为

$$i_L R + L \frac{di_L}{dt} = U_s \quad (3-17)$$

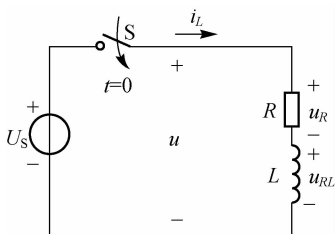


图 3-12 RL 电路的零状态响应

式(3-17)的解有两个部分: 特解 $i'_L = \frac{U_s}{R}$ (稳态分量) 和齐次方程的通解 $i''_L = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ (暂态分量), 即

$$i_L = \frac{U_S}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-18)$$

利用初始条件,可确定常数 $A = -\frac{U_S}{R}$ 。因此 $t \geq 0$ 后,电路电流的解为

$$i_L = \frac{U_S}{R} - \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

电流 i_L 随时间变化的曲线如图 3-13 所示。

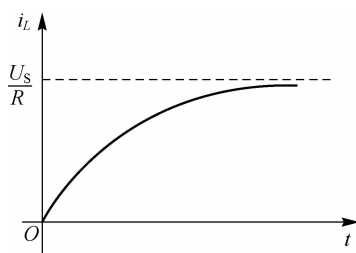


图 3-13 电流 i_L 变化的曲线

3. RL 串联电路的全响应

在图 3-12 所示电路中,电源电压为 U_S , $i_L(0_-) = I_0$,这是一个全响应电路。 $t \geq 0$ 时,电路的响应形式为

$$i_L = i'_L + i''_L = \frac{U_S}{R} - Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

利用初始条件,可得常数 $A = \frac{U_S}{R} - I_0$,所以

$$i_L = \frac{U_S}{R} + (I_0 - \frac{U_S}{R})e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-19)$$

式(3-19)等号右边第一项为稳态分量,第二项为暂态分量。改写式(3-19)得

$$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_S}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3-20)$$

式(3-20)右边第一项为零输入响应,第二项为零状态响应。

(三)一阶线性电路过渡过程分析的三要素法

只含有一个储能元件的电路或可以等效为一个储能元件的线性电路,统称为一阶线性电路。稳态值 $f(\infty)$ 、初始值 $f(0_+)$ 和时间常数 τ 三个量为一阶电路的三要素,由三要素可以直接写出一阶电路过渡过程的解,此方法即为三要素法。

由前面分析的一阶 RC 和 RL 电路,电路的全响应可写成以下一般式

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-21)$$

这里的 $f(\infty)$ 、 $f(0_+)$ 、 $f(t)$ 均指一阶电路过渡过程中同一元件(或支路)的电压或电流。利用式(3-21),只需求得 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 这三个要素,就能直接写出电路的全响应(电压或电流)。

例 3-7 在图 3-14 所示电路中,已知 $R_1 = 100 \, \Omega$, $R_2 = 400 \, \Omega$, $C = 125 \, \mu\text{F}$, $U_S = 200 \, \text{V}$,在换路前电容有电压 $u_C(0_-) = 50 \, \text{V}$ 。求 S 闭合后电容电压和电流的变化规律。

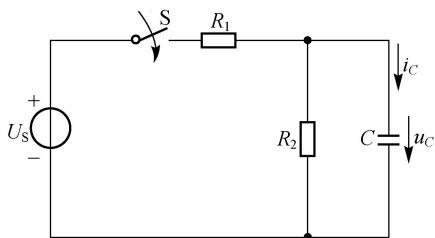


图 3-14 例 3-7 题图

解 用三要素法求解如下。

(1) 由换路定律可得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 50 \text{ V}$$

(2) 电容电压的稳态值为

$$u_C(\infty) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{200}{100 + 400} \times 400 \text{ V} = 160 \text{ V}$$

(3) 求电路的时间常数。

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \times 400}{100 + 400} = 80 \text{ } \Omega$$

$$\tau = R_0 C = 80 \times 125 \times 10^{-6} \text{ s} = 0.01 \text{ s}$$

(4) 按照三要素公式, 可求得电容电压的全响应为

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 160 + (50 - 160) e^{-\frac{t}{0.01}} = 160 - 110 e^{-100t} \text{ V} \end{aligned}$$

电容电流的变化规律为

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = 1.375 e^{-100t} \text{ A}$$



单元小结

(1) 电路由一个稳态变化到另一个稳态的过程称为过渡过程, 也称暂态。电路稳态的改变是由电源条件或电路参数的改变(换路)引起的。含有 LC 储能元件的电路, 其过渡过程是一个渐变的过程, 因为电容的端电压和电感中的电流不能跃变, 通常用换路定律 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$, $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 来表示。

(2) 在整个过渡过程中, 电路中的电流、电压仍遵循电路的基本定律, 以此为根据, 运用换路定律, 可以确定它们的初始值, 列出它们的微分方程, 解得在过渡过程期间响应的时间函数。

(3) 对于 RC 电路和 RL 电路接通直流电源的过渡过程, 可以先分别求零状态(初始状态为零)响应和零输入(激励为零)响应, 再求全响应。用的是解常系数微分方程的经典法, 方程的解由稳态分量和暂态分量组成。稳态分量是稳态下直流电路的解; 在一阶电路中, 暂态分量是一项衰减的指数函数 $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ 。其中, $\tau = RC$ 或 $\tau = \frac{L}{R}$ 为电路的时间常数, 由电路本身的参数决定, 标志过渡过程的长短。零输入响应决定于初始状态, 零状态响应决定于激励,



全响应和两者都有关系,且

$$\text{全响应} = \text{零输入响应} + \text{零状态响应}$$

(4)一阶电路也可不解微分方程,而直接用三要素法写出过渡过程的解,其一般表达式为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$



检测习题

一、填空题

1. 在含有储能元件的电路中,当电路的工作条件发生变化,如电路的接通或断开、某支路短路、元件参数突变等,这些情况的变化称为_____。
2. 为了分析问题的方便,我们认为换路是在 $t = 0$ 时刻进行的,并把换路前的最终时刻记为 $t = \underline{\hspace{2cm}}$,把换路后的最初时刻记为 $t = \underline{\hspace{2cm}}$,换路经历时间为_____到_____。
3. 动态电路发生突变后,从原来的工作状态转变为另一工作状态的过程称为_____过程。
4. 由于电容中的电场能量和电感中的磁场能量不能跃变,所以在换路瞬间电容两端的_____和电感中的_____也是不可能跃变的。
5. 换路定律:_____;
6. 对于直流激励,在换路前及很长时间后的稳定状态,电容元件可视为_____,电感元件可视为_____。
7. 零输入响应决定于_____状态,零状态响应决定于_____,全响应和两者都有关系,且全响应 = _____响应 + _____响应。

二、选择题

1. 电路如图 3-15 所示, $U_s = 12 \text{ V}$, 当 $t = 0$ 时把开关 S 闭合,若 $u_C(0_-) = 12 \text{ V}$,则在开关 S 闭合后该电路将()。
A. 产生过渡过程 B. 不产生过渡过程 C. 无法确定
2. 电路如图 3-16 所示, $C_1 = 0.2 \mu\text{F}$, $C_2 = 0.3 \mu\text{F}$, $C_3 = 0.2 \mu\text{F}$, $C_4 = 0.8 \mu\text{F}$,可求得 A、B 两点间的等效电容 $C = (\quad)$ 。
A. $1/3 \mu\text{F}$ B. $0.28 \mu\text{F}$ C. $0.24 \mu\text{F}$ D. $0.14 \mu\text{F}$

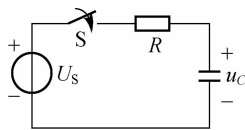


图 3-15

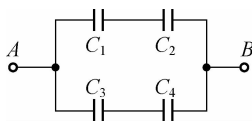


图 3-16

3. 电路如图 3-17 所示,已知电容初始电压 $u_C(0_-) = 10 \text{ V}$,电感初始电流 $i_L(0_-) = 0$, $C = 0.2 \text{ F}$, $L = 0.5 \text{ H}$, $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$ 。 $t = 0$ 时开关 S 接通,则 $i_R(0_+) = (\quad)$ 。
A. 0 A B. 0.1 A C. 0.2 A D. $1/3 \text{ A}$
4. 电路如图 3-18 所示,已知 $i_s = 2 \text{ A}$, $L = 1 \text{ H}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = R_3 = 10 \Omega$ 。开关 S 打开

之前电路稳定, $t=0$ 时 S 打开, 则 $u(0_+) = (\quad)$

A. 0

B. 20 V

C. $40/3$ V

D. 40 V

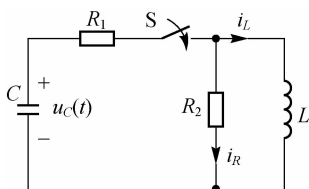


图 3-17

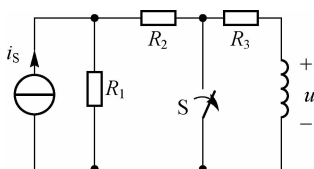
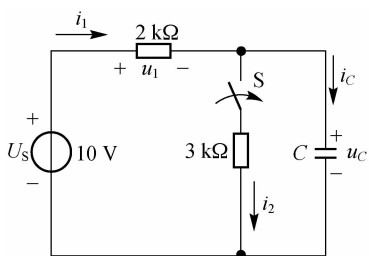


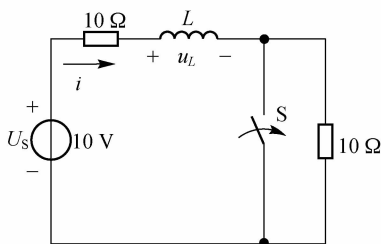
图 3-18

三、分析计算题

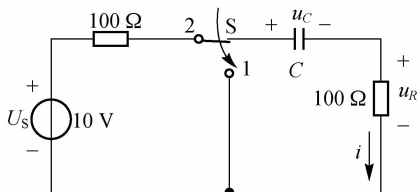
1. 求图 3-19 所示各电路换路后的电压和电流的初始值。



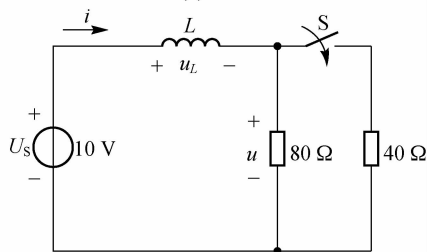
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3-19

2. 在图 3-20 所示电路中, 试确定在开关 S 断开初始瞬间的电压 u_C 和电流 i_C 、 i_1 、 i_2 的值。其中, S 断开前电路已处于稳态。

3. 在图 3-21 中, $U_s = 100$ V, $R_1 = 1$ Ω, $R_2 = 99$ Ω, $C = 10$ μF。

(1) S 闭合瞬间 ($t=0_+$), 求各支路电流及各元件电压的数值。

(2) 求 S 闭合后达到稳定状态时 (1) 中各电流和电压的数值。

(3) 当用电感元件替换电容元件后, 重新计算 (1)、(2) 两种情况下的各数值。(各电压电流取关联参考方向。)

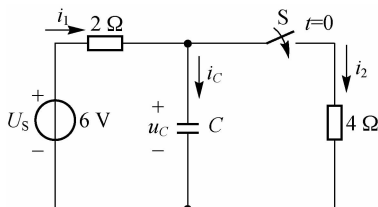


图 3-20

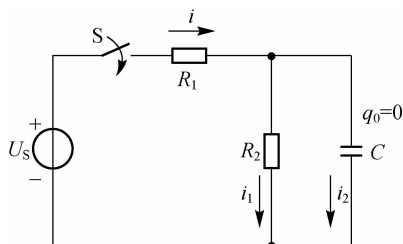


图 3-21

4. 在图 3-22 中, 已知 $R = 2\ \Omega$, 电压表内阻为 $2\ 500\ \Omega$, 电源电压 $U_s = 4\ \text{V}$, 试求开关 S 断开瞬间电压表两端的电压。其中, 换路前电路已处于稳态。

5. 电路如图 3-23 所示, 当 $t < 0$ 时, 开关 S 位于 1, 已处于稳态, 当 $t = 0$ 时, 开关 S 由 1 闭合到 2, 求初始值 $i_L(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。

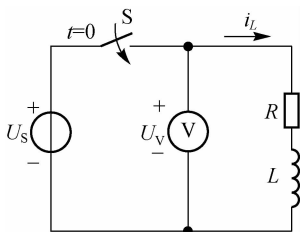


图 3-22

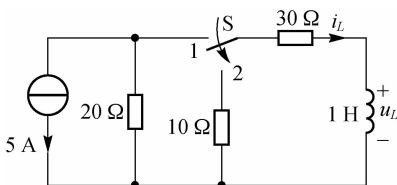


图 3-23

6. 在图 3-24 所示的 RC 充电电路中, 电源电压 $U_s = 50\ \text{V}$, $R = 1\ \text{k}\Omega$, $C = 20\ \mu\text{F}$ 。若闭合开关 S 前电容没有充电, 求闭合 S 后的 u_C 何时充电到 $u_C = U_s/2$ 。

7. 在图 3-25 所示的 RC 放电电路中, $u_C(0_-) = U_0$, $C = 20\ \mu\text{F}$, 若要求放电后 15 ms 电容电压下降到初始值的 5%, 求电阻 R、时间常数 τ , 并求出放电电流 i 的表达式。

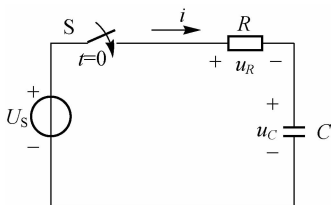


图 3-24

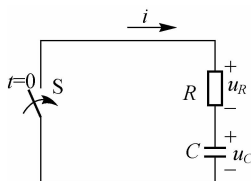


图 3-25

8. 在图 3-20 中, 若闭合开关 S 前电容已经充电 $u_C(0_-) = 20\ \text{V}$, 求闭合开关 S 后, 电容电压 u_C 和电流 i 的全响应。

9. 一个高压电容器原来已充电, 其电压为 10 kV, 从电路中断开后, 经过 15 min 它的电压降为 3.2 kV, 问:

(1) 再过 15 min 电压降为多少?

(2) 如果电容 $C = 15\ \mu\text{F}$, 那么它的绝缘电阻是多少?

(3) 需经多少时间, 可使电压降至 30 V 以下?

(4) 如果以一根电阻为 $0.2\ \Omega$ 的导线将电容接地放电, 最大放电电流是多少? 若认为在

5τ 时间内放电完毕,那么放电的平均功率是多少?

10. 在图 3-26 所示电路中,已知 $R_1=R_2=10\ \Omega$, $U_S=2\text{ V}$, $L=100\text{ mH}$, 在 $t=0$ 时刻将开关 S 闭合,求 i_L 随时间变化的规律,并画出 i_L 的变化曲线。

11. 在图 3-27 所示电路中,已知 $U_S=12\text{ V}$, $R_1=200\ \Omega$, $R_2=50\ \Omega$, $L=0.5\text{ H}$, 原电路已处于稳态,在 $t=0$ 时刻将开关 S 打开,求 i_L 随时间变化的规律,并求电阻 R_1 两端电压 u_{R_1} 的变化规律。

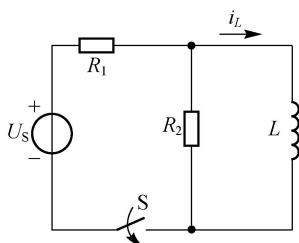


图 3-26

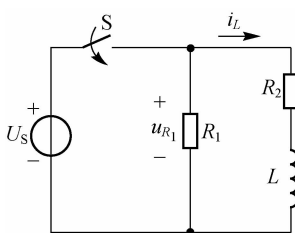


图 3-27

12. 在图 3-28 所示电路中,开关 S 闭合前电路达到稳态,已知 $U_S=36\text{ V}$, $R_1=8\ \Omega$, $R_2=12\ \Omega$, $L=0.4\text{ H}$, 求开关闭合后电感电流 i_L 及电压 u_L 的解析式。

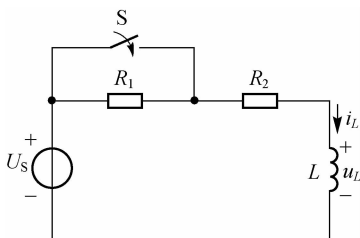


图 3-28

13. 电路如图 3-29 所示, 已知 $U_1=U_2=4\text{ V}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=R_3=2\ \Omega$, $L=2\text{ H}$, 开关 S 原在 a 位置, 电路已处于稳态; 当 $t=0$ 时, 开关由 a 拨向 b, 用三要素法求 i_L 的变化规律, 并绘出波形图。

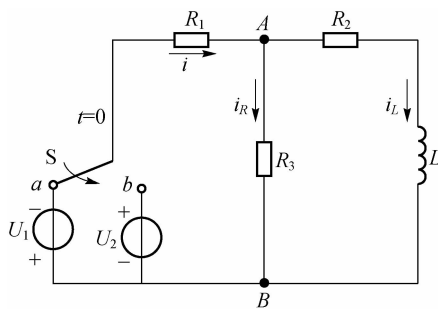


图 3-29