绪　论

运筹学又称管理科学，是运用科学的方法研究管理和工程中各种决策问题，为决策者提供科学的决策依据的学科。其主要研究方法是将实际问题定量化和模型化，运用数学、统计学、计算机科学和工程学等学科的原理和技术研究各种组织系统的管理问题与生产经营活动，以求得一个合理的运用资源的最优方案，达到系统效益的最优化。它是现代管理中重要的理论基础和不可缺少的方法之一，已广泛应用于工业、农业、国防等各个领域。

一、运筹学的产生及发展

运筹学的早期工作及其历史可以追溯到1914年，兰彻斯特(Lanchester)提出军事运筹学的战斗方程，而存储论的最优批量公式是在20世纪20年代初提出来的。列温逊在20世纪30年代已经用运筹学思想分析商业广告和顾客心理。运筹学的活动是从第二次世界大战初期的军事任务开始的，由于当时迫切需要将各种稀少的资源以有效的方式分配给各种不同的军事活动团体，所以英国和美国等军事管理当局号召科学家运用科学手段来处理战略与战术问题。在第二次世界大战期间，运筹学成功地解决了许多重要的作战问题，显示了其巨大的威力。

运筹学正式作为科学名字出现在20世纪30年代末。英国防空部门考虑如何布置防空雷达，建立有效的防空预警系统。虽然这从技术上是可行的，但实际运用时并不可行。为此，一些科学家研究如何合理运用雷达开始进行一类新问题的研究。因为它与研究技术问题不同，就称为“运用研究”(operational research)。为了进行运筹学研究，在英、美的军队中成立了一些专门小组，开展了护航舰队保护商船队的编队问题和当船队遭受德国潜艇攻击时，如何使船队损失最少的问题的研究。在研究了反潜深水炸弹的合理爆炸深度后，德国潜艇被摧毁数增加了400%。他们还研究了船只在受敌机攻击时，大船应急转向和小船应缓慢转向的逃避方法。研究结果使船只在受敌机攻击时，中弹比例由47%下降到29%。当时研究和解决的问题都是短期的和战术性的。第二次世界大战后，在英、美军队中相继成立了更为正式的运筹学研究组织，以兰德公司(RAND)为首的一些公司开始着重研究战略性问题、未来的武器系统的设计和其可能合理运用的方法。

但是，运筹学作为一门科学是在第二次世界大战后期才形成的。在战后的工业恢复时期，由于企业组织内与日俱增的复杂性和专业化所产生的问题，使运筹学进入工商企业和其他部门，并在20世纪50年代以后得到了广泛的应用。其中，系统配置、聚散、竞争、优化的运用机理得到深入的研究和应用，形成了一套较完备的理论，如规划论、排队论、存储论、决策论等。许多国家相继成立了专门的运筹学学会：1948年英国成立运筹学学会，1952年美国成立运筹学学会，1957年国际运筹学协会成立。至1986年，全世界已有38个国家和地区成立了运筹学学会或类似的组织。

运筹学的原意是“运用研究”“操作研究”“作业研究”或“作战研究”。中文译名“运筹学”出自《史记·高祖本记》中刘邦的一句话：“夫运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”，借用其中的“运筹”作为OR的中文译名十分恰当。因为运筹学不单单只有数学，还含有决策、规划等其他相关学科的内容，也表明我国早已有运筹学的萌芽。

20世纪50年代中期，钱学森、许国志等教授将运筹学由西方引入我国，并结合我国的特点在国内推广应用。在经济数学方面，特别是投入产出表的研究和应用开展较早。质量控制(后改为质量管理)的应用也很有特色。以华罗庚教授为首的一大批数学家加入运筹学的研究队伍，使运筹学的很多分支很快跟上当时的国际水平。

我国于1956年由中国科学院成立了运筹学小组，并于1980年成立了运筹学学会。运筹学的概念虽然起源于欧美国家，但在学科研究方面，我国并不落后。20世纪50年代中期，著名数学家华罗庚等老一辈科学家对此做出了突出贡献。20世纪六七十年代，华罗庚的“优选法”和“统筹方法”被各部门采用，取得很好的经济效果，受到中央领导的好评。改革开放以来，运筹学的应用更为普遍，如运用线性规划进行全国范围的粮食、钢材的合理调运和广东省内的水泥合理调运等，同时简单易行的“图上作业法”也发挥了作用。运筹学方法在企业管理中的应用取得了明显的经济效益，提高了企业的管理水平，受到企业决策层和主管部门的重视。

到20世纪60年代，除军事方面的应用研究以外，运筹学相继在工业、农业、经济和社会问题等各领域都有应用。与此同时，运筹学有了飞速的发展，并形成了运筹学的许多分支，如数学规划(线性规划、非线性规则、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等)、图论与网络、排队论(随机服务系统理论)、存储论、对策论、决策论、维修更新理论、搜索论、可靠性和质量管理等。

二、运筹学的性质和特点

运筹学是一门应用科学，至今还没有统一且确切的定义。有以下几个定义来说明运筹学的性质和特点。莫斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)对运筹学下的定义是：“为决策机构在对其控制下业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法”。定义首先强调的是科学方法，它不单是某种研究方法的分散和偶然的应用，而是可用于整个一类问题上，并能传授和有组织地活动。它强调以量化为基础，必然要用数学。但任何决策都包含定量和定性两方面，而定性方面又不能简单地用数学表示，如政治、社会等因素，只有综合多种因素的决策才是全面的。运筹学工作者的职责是为决策者提供可以量化方面的分析，指出那些定性的因素。另一定义是：“运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据”。此定义表明运筹学具有多学科交叉的特点，如综合运用经济学、心理学、物理学、化学中的一些方法。运筹学强调最优决策，在实际生活中往往用次优、满意等概念代替最优。因此，运筹学的又一定义是：“运筹学是一种给出问题坏的答案的艺术，否则问题的结果会更坏”。运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法来解决实际问题。

运筹学研究的对象是经济、军事及科学技术等活动中能用数量关系描述的有关决策、筹划与管理等方面的问题。运筹学着重以管理、经济活动方面的问题及解决这些问题的原理方法作为研究对象。

运筹学发展到今天，内容已相当丰富，分支也很多，主要包括线性规划、整数规划、目标规划、多目标规划、非线性规划、动态规划、图论、决策论、对策论、排队论、存储论、可靠性与质量管理、层次分析法等。显然，运筹学具有多学科交叉的特点，是跨学科的应用科学。

由于运筹学具有广泛的应用性，为了有效地应用运筹学，英国前运筹学会会长汤姆林森(Tomlinson)提出了以下6条原则：

(1) 合作原则：运筹学工作者要和各方面的人士尤其是企业工作者合作。

(2) 催化原则：在多学科共同解决某问题时，要引导人们改变一些常规的看法。

(3) 互相渗透原则:要求多部门彼此渗透地考虑问题,而不是只局限于本部门。

(4) 独立原则:在研究问题时,不应受某人或某部门的特殊政策所左右,应独立工作。

(5) 宽容原则:解决问题的思路要宽,方法要多,而不是局限于某种特定的方法。

(6) 平衡原则:要考虑各种矛盾的平衡和关系的平衡。

总之,应用运筹学要集思广益,取长补短,灵活运用,积极进取。

运筹学借助于模型,用定量分析的方法或定量与定性分析方法相结合,合理地解决实际问题,广泛应用于工商企业、军事部门、民政事业等研究组织内的统筹协调问题,故其应用不受行业和部门的限制。运筹学在研究问题方面具有以下特点:

(1) 运筹学研究和解决问题的基础是最优化技术,并强调系统整体最优。运筹学针对研究的实际问题,从系统的观点出发,以整体最优为目标,研究各组成部分的功能及其相互间的影响关系,解决各组成部门之间的利害冲突,求出使所研究问题达到最佳效果的解,并寻找一个最好的行动方案付诸实施。

(2) 运筹学研究和解决问题的优势是应用各学科交叉的方法,具有综合性。运筹学从一开始就是由不同学科专长、多方面专家经过共同协作集体努力而获得成果的。现在,研究对象的复杂性和多因素性,决定了运筹学内容的跨学科性、交叉渗透性和综合性。运筹学既对各种经营活动进行创造性的科学研究,又涉及组织的实际管理问题,具有很强的实践性,最终能向决策者提供建设性意见,并收到实效。

(3) 运筹学研究和解决问题的方法具有显著的系统分析特征,其各种方法的运用,几乎都需要建立数学模型和利用计算机进行求解。可以说现在及今后,没有计算机的发展就没有运筹学的发展。计算机的发展使许多运筹学方法得以实现和发展。目前,已有不少可以求解运筹学各种问题的成熟软件,如 MATLAB,QSB,Mathematica,LINDO,LINGO 等。

(4) 运筹学研究和解决问题的效果具有连续性。一方面,用运筹学获得的解或最优方案,不可能在同一时间内将所有相关的问题全部解决;另一方面,一旦发现有新的情况或问题,必须对原有模型进行修正或输入新的数据,以调整原来的解决方案。因此,只有通过连续研究才能获得新的、更好的效果。

(5) 运筹学具有强烈的实践性和应用的广泛性。运筹学的目的在于解决实际问题,它所使用的全部假设和数学模型无非都是解决实际问题的工具,有助于各种经济活动和管理问题的解决,最终能向决策者提供建设性方案并收到实效。因此,它的应用并不受行业和部门的限制,已被广泛应用于工商企业、军事部门、服务行业和经济管理部门。

三、运筹学的模型和研究方法

运筹学研究和解决问题的核心是正确建立和使用模型。通常模型可以认为是客观世界或现实系统的代表或抽象,是帮助人们认识、分析和解决实际问题的有力工具。人们在管理工作或其他工作中,为了研究某些问题的共性以有助于解决实际问题,经常使用一些文字、数字、符号、公式、图表及实物,用以描述客观事物的某些特征和内在联系,从而表示或解释某一系统的过程,这就是模型。它具有如下功能:

(1) 模型是现实问题某一主要方面的描述或抽象,比现实本身简单和概括,使人易于认识、理解和操作。

(2) 模型是由与研究实际问题有关的主要因素所构成的,并表明这些因素的相互关系,从而能够更简明地揭示问题的本质。

(3) 通过模型可以进行试验,用以分析和预测所研究事物或系统的特征及性质,尤其在研究工业系统、工程优化设计、政府或社会系统的最优管理或运行的问题时十分必要,因为这样可以避免由于真实对象的干预而导致不测的风险。

(4) 利用模型可以在相对短的时间内获得所研究问题的结果,特别对一个复杂问题的研究,利用模型,使研究者不必真的实现计划即可改变其参数,从而不必等待一段较长的时间就可以得到问题的答案。

(5) 利用模型可以根据过去和现在的信息进行预测,并可用来培训教育人才。

模型有三种基本形式:形象模型、模拟模型及符号或数学模型,目前用得最多的是符号或数学模型。数学模型是将现实系统或问题中的有关参数和因素及其相互关系归纳成一个或一组数学表达式,并可以用一定的分析和计算方法进行求解,以实现反映现实系统变化规律的主要目标。

运筹学中所使用的数学模型,一般是由决策变量、约束或限制条件及目标函数所构成的,其实质表现为在约束条件允许的范围内,寻求目标函数的最优解。其中,决策变量又称为可控变量,是模型所代表的系统中受到控制或能够控制的变量,在模型中表现为未知参数,对模型进行分析研究,最后就是通过选定的决策变量来实现其最优解;约束条件即决策变量客观上必须满足的限制条件,它反映出实际问题中不受控制的系统变量或环境变量对受控制的决策变量的限制关系;目标函数是模型所代表的性能指标或有效性的宏观度量,在模型中表现为决策变量的函数,反映了实际问题所要达到的理想目标。

数学模型的一般形式可表述为

$$\max(\min) z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant(\geqslant,=)0 & i=1,2,\cdots,m \\ h_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

式中,z 为目标函数;$x_j(j=1,2,\cdots,n)$为决策变量;$g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 0$ 和 $h_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 为约束条件。

针对实际问题所建立的运筹学模型,一般应满足两个基本要求:一是要能完整地描述所研究的系统,以便能代替现实供人们分析研究;二是要在适合研究问题的前提下,模型尽量简单,但要实现这些要求,在开始建模时,往往不容易做到,而且选择什么样的模型和确定建立模型的范围,在开始阶段也很难判断,需要有丰富的实践经验和熟练的技巧,需要多次反复修改,最后确定下来。

运用运筹学方法分析和解决问题,作为一个过程实际上是一个科学决策的过程,这个过程的核心是建立运筹学模型和对模型进行分析、求解,正确地进行这个过程一般要经过如下步骤:

(1) 提出并形成问题。要解决问题,首先需要提出问题,弄清问题的目标,明确问题的实质及关键所在,明确可能的约束,问题的可控变量及有关参数,搜集有关资料,深入地调查和分析,确定问题的界限,选准问题的目标。

(2) 建立模型。运筹学模型是一个能有效地达到一定目标(或多个目标)行为的系统,因此,目标一经认定,就要用数学语言描述问题,建立目标函数,把问题中的可控变量、参数和目标与约束之间的关系用一定的模型表示出来。

(3) 分析并求解模型。根据所建模型的性质及数学特征,选择适当的求解方法,用各种手段(主要是数学方法,也可用其他方法)将模型求解。解可以是最优解、次优解、满意解。复杂模型的求解需用计算机,解的精度要求可由决策者提出。

(4) 解的检验并评价模型。模型分析和计算得到结果后,尚需检验按照它能否解决实际问题,主要考虑达成目标的情况,选择合适的标准,检查求解步骤和程序有无错误,然后检查解是否反映现实问题。

(5) 应用或实施模型的解。经过反复检查以后,最终应用或实施模型的解,就是供给决策者一套有科学依据的并为解决问题所需要的数据、信息或方案,以辅助决策者在处理问题时做出正确的决策和行动方案。对在实施中可能产生的问题修改,以上过程应反复进行。

近几十年来,运筹学模型已广泛应用于许多领域。在军事、交通运输及国民经济各部门的资源分配与管理、工程优化设计、市场预测与分析、生产计划管理、库存管理、计算机与管理信息系统等诸

多领域都有重要的应用成果出现。

运筹学模型的应用越来越受到重视。美国的杜邦公司在 20 世纪 50 年代就非常重视运筹学在广告工作、产品评价和新产品开发方面的应用;通用电气公司还对某些市场进行了模拟研究;西电公司将库存理论与计算机的物质管理信息相结合,取得了显著的成效。

在我国,为解决粮食部门的合理运输问题,数学家万哲先提出“图上作业法”;在解决邮递员合理投递路线问题时,管梅谷教授提出了国外称之为“中国邮路问题”解法。排队论应用于矿山、港口、电信及计算机设计等方面;图论用于线路布置、计算机设计和网络流量控制问题;存储论在汽车工业等方面也获得成功。运筹学目前已趋向研究和解决规模更大、更复杂的问题,并与系统工程紧密结合。这门学科今后必将在我国的科学技术现代化和管理现代化进程中发挥巨大的作用。

四、运筹学的发展趋势

运筹学到 20 世纪 70 年代已形成一系列强有力的分支,数学描述相当完善。这一点使不少运筹学界的前辈认为,有些专家钻进运筹学的深处,而忘掉了运筹学的原有特色,忽略了多学科的横向交叉联系和解决实际问题的研究。有些人只迷恋于数学模型的精巧、复杂化,使用高深的数学工具,而不善于处理大量新的不易解决的实际问题。现代运筹学工作者面临的大量新问题是经济、技术、社会、生态和政治等因素交叉在一起的复杂系统。因此,20 世纪 70 年代末至 20 世纪 80 年代初,不少运筹学家提出:要注意研究大系统,注意与系统分析相结合。美国科学院国际开发署写了一本书,其书名就把系统分析和运筹学并列。有运筹学家提出了“要从运筹学到系统分析”的报告。由于研究新问题的时间范围很长,因此必须与未来学紧密结合。由于面临的问题大多涉及技术、经济、社会、心理等综合因素的研究,在运筹学中除常用的数学方法以外,还引入一些非数学的方法和理论。曾在 20 世纪 50 年代写过《运筹学的数学方法》的美国运筹学家萨蒂(T. L. Saaty),在 20 世纪 70 年代末提出了层次分析法(analytic hierarchy process,AHP),并认为过去过分强调细巧的数学模型,但它很难解决那些非结构性的复杂问题。而使用看起来简单和粗糙的方法,加上决策者的正确判断,却能解决实际问题。切克兰德(P. B. Checkland)把传统的运筹学方法称为硬系统思考,它适用于解决那种结构明确的系统及战术和技术性问题,而对于结构不明确的,有人参与活动的系统就不太胜任了。这时应采用软系统思考方法,相应的一些概念和方法都应有所变化。在 20 世纪 80 年代中一些重要的与运筹学有关的国际会议中,大多数学者认为决策支持系统是使运筹学发展的一个好机会。到 20 世纪 90 年代和 21 世纪初期,出现了两个很重要的趋势。一个是软运筹学的崛起,其主要发源地是英国。1989 年,英国运筹学学会开了一个会议,后来由罗森汉特(J. Rosenhead)主编了一本论文集,被称为运筹学的“圣经”。里面提到了不少新的属于软运筹学的方法,如软系统方法论(SSM:Checkland)、战略假设表面化与检验(SAST:Mason & Mitroff)、战略选择(SC:Friend)、问题结构法(PSM:Bryant & Rosenhead)、超对策(hypergame:Benett)、亚对策(Metagame:Howard)、战略选择发展与分析(SODA:Eden)、生存系统模型(VSM:Beer)、对话式计划(IP:Ackoff)、批判式系统启发(CSH:Ulrich)等。2001 年,该书出版修订版,增加了很多实例。另一个趋势是与优化有关的,即软计算。这种方法不追求严格最优,具有启发式思路,并借用来自生物学、物理学和其他学科的思想来解寻优方法。其中较著名的有遗传算法(GA:Holland)、模拟退火(SA:Metropolis)、神经网络(NN)、模糊逻辑(FL:Zadeh)、进化计算(EC)、禁忌算法(TS)、蚁群化(ACO:Dorigo)等。国际上已有世界软计算协会,2004 年召开第 9 届国际会议(都是网络会议),并且有杂志 *Applied soft computing*。此外,在一些老的分支方面也出现了新的亮点,如线性规划中的内点法,图论中的无标度网络(scale-free network)等。总之,运筹学还在不断发展中,新的思想、观点和方法不断地出现。

第一章

线性规划及单纯形法

线性规划(linear programming,LP)是运筹学的一个重要分支。最早研究这方面问题的是苏联数学家康托洛维奇,他在1939年所著的《生产组织与计划中的数学方法》一书中,首次提出了线性规划问题。此后,美国学者希区柯克(F. L. Hitchcock,1941)和柯普曼(T. C. Koopman,1947)又独立地提出了运输问题这类特殊的线性规划问题。1947年,当时正在美国空军担任数学顾问的丹捷格(G. B. Dantzig)提出了线性规划问题的一般解法——单纯形法,并于1953年提出"改进单纯形法",以解决计算机求解过程中的舍入误差问题,为线性规划的发展奠定了基础。随着计算机的发展,线性规划已广泛应用于工业、农业、商业、交通运输、经济管理和国防等各个领域,成为现代化管理的有力工具之一。

第一节 线性规划问题及其数学模型

一、问题的提出

从管理的角度来看,任何一个企业可供利用的资源(包括人力、物力和财力等)都是有限的,如何合理地利用和调配人力、物力,如何充分发挥现有资金和设备能力,不断提高生产效率,使企业获得最大的效益;或者在既定任务的条件下,如何统筹安排,尽量做到用最少的人力、物力和财力资源去完成这一任务,这些都是企业决策者和管理人员十分关心的问题。其实这是一个问题的两个方面,就是在一定资源限制的条件下,最优决策的问题,也是线性规划所要研究的问题,如资源合理利用问题、生产的组织与计划问题、合理下料问题、配料问题、选址问题、作物的合理布局问题、运输问题、人员的分配问题和投资项目的合理选择问题等。下面通过管理中的几个实例来说明这类问题,并建立它们的数学模型。

【例 1-1】(生产计划问题) 某企业利用A,B,C三种资源,在计划期内生产甲、乙两种产品,已知生产单位产品的资源消耗、单位产品利润等如表1-1所示,问如何安排生产计划可使企业利润最大?

为了建立此问题的数学模型,首先要选定决策变量,即决策人可以控制的因素,设 x_1,x_2 分别代表甲、乙两种产品的生产数量(件),z 表示企业的总利润。依题意,问题可转换成求变量 x_1,x_2 的值,使总利润最大,即

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

称 $\max z = 50x_1 + 100x_2$ 为目标函数。

表 1-1　例 1-1 产品、资源信息

资源	单位产品的资源消耗/千克		资源限制/千克
	甲	乙	
A	1	1	300
B	2	1	400
C	0	1	250
单位产品利润/(元/件)	50	100	

同时满足甲、乙两种产品所消耗的 A,B,C 三种资源的数量不能超过它们的限量,即可分别表示为

$$x_1+x_2\leqslant 300\text{(对资源 A 的限制)}$$
$$2x_1+x_2\leqslant 400\text{(对资源 B 的限制)}$$
$$x_2\leqslant 250\text{(对资源 C 的限制)}$$

称上述三式为约束条件。此外,一般实际问题都要满足非负条件,即 $x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$。这样有

$$\max z=50x_1+100x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 300\\2x_1+x_2\leqslant 400\\x_2\leqslant 250\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

该模型称为上述生产计划问题的数学模型。其中,s. t. 是 subject to 的缩写,意思为“受约束于”,这类问题通常称为资源的合理利用问题。

【例 1-2】 假定现有一批某种型号的圆钢,长 8 厘米,需要截取长 2.5 厘米的毛坯 100 根,长 1.3 厘米的毛坯 200 根,问应该怎样选择下料方式,才能既满足需要,又使总的用料最少?

根据经验可知,可先将各种可能的搭配方案列出来,如表 1-2 所示,决策变量 $x_j(j=1,2,3,4)$表示第 j 种方式所用的原材料根数,则问题的数学模型可归结为

$$\min z=x_1+x_2+x_3+x_4$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3\geqslant 100\\2x_2+4x_3+6x_4\geqslant 200\\x_j\geqslant 0(j=1,2,3,4)\end{cases}$$

该模型称为合理配料问题。

表 1-2　毛坯下料情况表

毛坯型号	方案				需要根数
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	
2.5 厘米	3	2	1	0	100
1.3 厘米	0	2	4	6	200

二、线性规划问题的数学模型

1. 建立线性规划模型的基本步骤

上面我们从经济管理领域中建立了两个实际问题,这些问题都属于一类优化问题,下面介绍建立实际问题线性规划模型的基本步骤。

(1) 确定决策变量。x_j 或 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$这些变量的取值一般为非负,这是很

关键的一步。决策变量选取得当,不仅会使线性规划的数学模型建立得容易,而且求解比较方便。

(2) 确定决策变量的约束条件,并用决策变量的线性等式或不等式来表示,从而得到约束条件。一般可用表格形式列出所有的限制数据,然后根据所列出的数据写出相应的约束条件,以避免遗漏或重复所规定的限制要求。

(3) 在满足约束条件的前提下,把实际问题所要达到的目标用决策变量的线性函数来表示,得到目标函数,并确定是求最大值还是最小值。

具备以上三个要素的问题称为线性规划问题。简单说,线性规划问题就是求一个线性目标函数在一组线性约束条件下的极值问题。线性规划问题的数学模型分为一般形式和标准形式两种,下面分别介绍,并讨论它们之间的转化。

2. 线性规划问题的一般形式

线性规划问题的一般形式为:求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$,使得

$$\max(\min)z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots c_nx_n \tag{1-1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n\geqslant(=,\leqslant)b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n\geqslant(=,\leqslant)b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n\geqslant(=,\leqslant)b_m \\ x_j\geqslant0(j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1\text{-}2) \\ \\ (1\text{-}3) \end{matrix}$$

其中,$a_{ij},b_i,c_j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为已知常数;式(1-1)称为目标函数;式(1-2)和(1-3)称为约束条件,特别称式(1-3)为非负约束条件。

以上给出的是线性规划问题的一般形式,对于不同的问题而言,目标函数可以求极大值或求极小值;约束条件可以是线性不等式组,或线性等式组,或者既有等式又有不等式;变量可以有非负限制,也可以没有。为了研究问题的方便,首先要将线性规划问题转化为标准形式。

3. 线性规划问题的标准形式

线性规划问题的标准形式为

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots c_nx_n \tag{1-4}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_m \\ x_j\geqslant0(j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1\text{-}5) \\ \\ (1\text{-}6) \end{matrix}$$

并且假设 $b_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,m)$,否则将方程两边同乘以$-1$,将右端常数化为非负数,并简称为 LP 问题,LP 问题还可以用以下几种形式来表示。

(1) 简写形式:

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$(\text{LP})\,\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i(i=1,2,\cdots,m) \\ x_j\geqslant0(j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

(2) 矩阵形式:

$$\max z=CX$$

$$(\mathrm{LP})\ \mathrm{s.t.}\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

(3) 向量形式：

$$\max z=CX$$

$$(\mathrm{LP})\ \mathrm{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}p_jx_j=b\\x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

其中，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$为行向量，也是目标函数的系数，又称价值系数，C 为价值向量；$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为决策变量，X 为决策向量；$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 为资源变量，b 为资源向量；$p_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$ 为 A 的第 j 列向量；A 为约束条件的系数矩阵，简称约束矩阵，又称技术系数，是 $m\times n$ 维系数矩阵，一般有 $m<n$。

$$A=(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

(4) 集合形式：

$$\max_{X\in R}CX;\text{其中 }R=\{X\mid AX=b,X\geqslant 0\}$$

线性规划问题的标准形式具有如下特征：

(1) 目标函数为求极大值(也可用求极小值问题作为标准形式，本书以讨论极大值问题为主)。

(2) 所有的约束条件(非负的约束条件除外)都是等式，即它们是由含有 n 个未知数(决策变量)的 m 个方程组成的线性方程组，且右端常数均为非负。

(3) 所有的决策变量均非负。

规定线性规划问题的标准形式的目的是便于理论分析和书写。任何非标准形式的线性规划问题都可以化为标准形式，具体有以下几种处理方式：

(1) 目标函数的转换。若问题的目标函数是求极小值，即 $\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$，则可将目标函数乘以 -1 而化为求极大值的问题，这样处理所得线性规划问题的最优解保持不变。

(2) 约束条件的转换。当约束条件为"$\leqslant$"时，则约束条件左式加上非负的松弛变量 x_{n+i}，将约束条件 $\sum a_{ij}x_j\leqslant b_i$ 变为等式约束，即 $\sum a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i$；当约束条件为"$\geqslant$"时，则约束条件左式减去非负的剩余变量 x_{n+i}，将约束条件 $\sum a_{ij}x_j\geqslant b_i$ 变为等式约束，即 $\sum a_{ij}x_j-x_{n+i}=b_i$。

(3) 变量的转换。若 $x_k\leqslant 0$，则 $-x_k\geqslant 0$；若 x_k 为无限制，则令 $x_k=x_k'-x_k''$，其中 $x_k',x_k''\geqslant 0$。

(4) 若 $b_i\leqslant 0$，则 $-b_i\geqslant 0$。

经过以上各种处理方式所得的线性规划问题的最优解不变。

【例 1-3】 将下列线性规划问题化为标准形式：

$$\min z=-2x_1+x_2+3x_3$$

$$\mathrm{s.t.}\begin{cases}5x_1+x_2+x_3\leqslant 7\\x_1-x_2-4x_3\geqslant 2\\-3x_1+x_2+2x_3=-5\\x_1,x_2\geqslant 0,x_3\text{ 为自由变量}\end{cases}$$

解　引入松弛变量 x_4 和剩余变量 x_5，再令自由变量 $x_3=x_3'-x_3''$，将第三个约束方程两边乘以 -1，将求极小值问题转化为求极大值问题，得标准形式：

$$\max z=2x_1-x_2-3x_3'+3x_3''$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}5x_1+x_2+x_3'-x_3''+x_4=7\\x_1-x_2-4x_3'+4x_3''-x_5=2\\3x_1-x_2-2x_3'+2x_3''=5\\x_1,x_2,x_3',x_3'',x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}
$$

第二节　线性规划问题解的基本理论

一、线性规划问题的图解法

为了给线性规划问题的基本理论提供较直观的几何说明，我们先介绍线性规划问题的图解法。

对于只有两个变量的线性规划问题，我们可以在平面上用作图的方法求解，这种方法称为图解法，图解法较简单、直观，它对于我们理解线性规划问题的实质和求解的基本原理也是有帮助的。

把满足约束条件和非负条件的一组解称为可行解，所有可行解组成的集合称为可行域。图解法的一般步骤如下：

(1) 建立平面直角坐标系。

(2) 根据线性规划问题的约束条件和非负条件画出可行域。

(3) 作出目标函数等值线 $Z=c$(c 为常数)，然后根据目标函数平移等值线至可行域边界，这时，目标函数与可行域的交点即为最优解。

【例 1-4】 某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ，Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台数及A，B两种原材料的消耗量见表 1-3。该工厂每生产一件产品Ⅰ可获利润 2 元，每生产一件产品Ⅱ可获利润 3 元，问应如何安排生产计划才能使该工厂获得的利润最大？

表 1-3　例 1-4 产品、资源信息

产品	Ⅰ	Ⅱ	资源限量
所需设备/台	1	2	8
原材料 A/千克	4	0	16
原材料 B/千克	0	4	12

解　设 x_1、x_2 分别表示在计划期内产品Ⅰ、Ⅱ的生产量，在满足资源限量的条件下，必须同时满足下列条件。它们的数学模型为

$$
\max z=2x_1+3x_2
$$

$$
\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 8\\4x_1\leqslant 16\\4x_2\leqslant 12\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}
$$

以 x_1，x_2 为坐标轴的直角坐标系中，非负条件 x_1，$x_2\geqslant 0$ 是指解值在第一象限。每个约束条件都代表一个半平面，如约束条件 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 是代表以直线 $x_1+2x_2=8$ 为边界的左下方的半平面，则它满足所有约束条件和非负条件的可行解集合即可行域，如图 1-1 所示的阴影部分。

分析目标函数 $z=2x_1+3x_2$。令 $z=c$，随着 c 的取值不同，可得到平面上的一族平行线。位于同一直线上的点具有相同的目标函数值，称此直线为等值线。当 c 值由小变大时，直线 $2x_1+3x_2=c$ 沿其法线方向向右上方移动。当移动到 Q_2 点时，z 值在可行域上实现最大化(见图 1-2)，这就得到了此题的最优解：$Q_2(4,2)$，$z=14$。这说明该厂的最优生产计划方案是：生产Ⅰ产品 4 件，生产Ⅱ产

品 2 件，可得最大利润 14 元，该线性规划问题有唯一最优解。

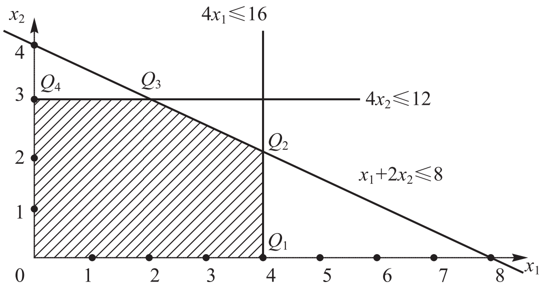


图 1-1　可行域

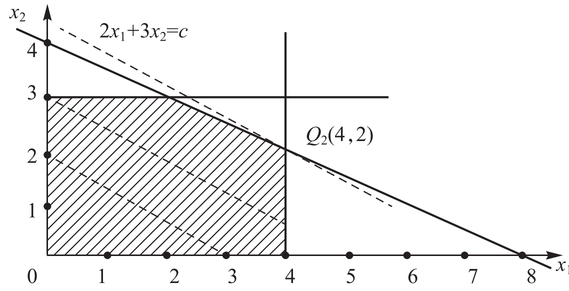


图 1-2　唯一最优解

若将上述的目标函数变为 $\max z=2x_1+4x_2$，则表示目标函数的等值线与约束条件 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 的边界线 $x_1+2x_2=8$ 平行。当 z 值由小变大时，与线段 Q_2Q_3 重合，如图 1-3 所示。线段 Q_2Q_3 上任意一点都使 z 取得相同的最大值，即这个线性规划问题有无穷多最优解。

若在例 1-4 的数学模型中增加一个约束条件：$-2x_1+x_2\geqslant 4$，则该线性规划问题的可行域为空集，即无可行解，也不存在最优解。

【例 1-5】 对下述线性规划问题，用图解法求解：

$$\max z=x_1+x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1+x_2\leqslant 4 \\ x_1-x_2\leqslant 2 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

用图解法求解结果如图 1-4 所示。从图 1-4 中可以看到，该问题可行域无界，目标函数值可以增大到无穷大。称这种情况为无界解，即不存在最优解。

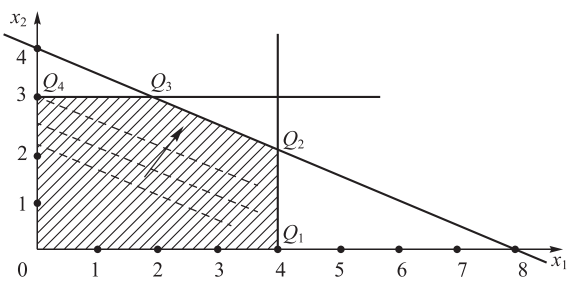


图 1-3　无穷多最优解

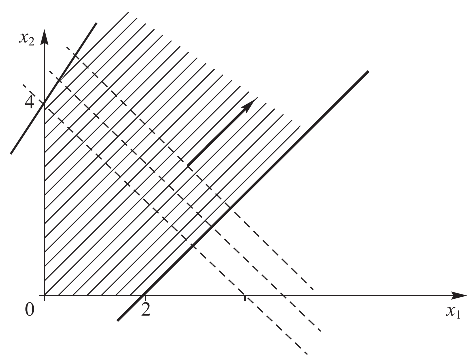


图 1-4　无界解

通过上述图解法实例看到，当线性规划问题的可行域为非空时，它是有界或无界凸多边形。若线性规划问题存在最优解，它一定可以在可行域的某个顶点得到；若在两个顶点同时得到最优解，则它们的连线上任意一点都是最优解，如图 1-3 所示，即有无穷多最优解；若可行域无界，如图 1-4 所示，则无最优解。

综上，线性规划问题的解有四种情况：唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解。

二、线性规划问题解的几何意义

在介绍图解法时，我们已直观地看到可行域和最优解的几何意义。在一个线性规划问题中，每个约束条件（包括资源约束与非负约束）实际上对应着平面坐标系的一个半平面（三维坐标系为半空

间)，而所有的这些半平面的共同部分，就构成了这个线性规划问题的可行域。如果用 s_j 表示每个半平面，用 s 表示可行域，则有 $s=s_1\cap s_2\cap\cdots\cap s_m$，其中可行域中的每个点都是可行解，能够使目标函数取得极值的可行解就是最优解。下面从理论上进一步讨论。

1. 线性规划问题的基本概念

对于标准形式的线性规划：

$$\max z=CX \quad ①$$

$$(\mathrm{LP})\ \mathrm{s.t.}\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\end{cases} \quad ②$$

有如下基本概念：

(1) 可行解。满足约束条件②的解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为该线性规划的一个可行解。其中使目标函数达到最大值的可行解称为最优解。

(2) 基、基变量、非基变量。设 A 是约束方程组的 $m\times n$ 系数矩阵，其秩为 m，B 是 A 中 $m\times m$ 非奇异子矩阵($|B|\neq 0$)，则称 B 是线性规划问题的一个基。这就是说，矩阵 B 是由 m 个线性独立的列向量组成的，且不失一般性，可设：

$$B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$$

相应的向量 $p_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为基向量，与其对应的变量 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为基变量，记为 $X_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$；其余向量 $p_j(j=m+1,m+2,\cdots,n)$ 称为非基向量，与其对应的变量 $x_j(j=m+1,m+2,\cdots,n)$ 称为非基变量，记为 $X_N=(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。

(3) 基本解。将线性规划约束方程 $AX=b$ 改写成如下形式，即

$$(B,N)(X_B,X_N)^{\mathrm{T}}=b$$

从而有
$$BX_B=b-NX_N$$
令
$$X_N=0$$
得到线性方程组
$$BX_B=b,X_B=B^{-1}b$$

由于 B 中各列向量线性无关，因而此方程组有唯一解，即 $X_B=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)^{\mathrm{T}}$。于是得到 $AX=b$ 的一个确定的解，即 $X^0=(X_B,X_N)^{\mathrm{T}}=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，称 X^0 为该线性规划对应于基 B 的一个基本解。由此可见，有一个基，就可以求出一个基本解，如图 1-1 中的点 0，Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 及延长各条线(包括 $x_1=0$，$x_2=0$)的交点都代表基本解。

(4) 基本可行解。满足非负条件的基本解称为基本可行解，简称基可行解。基可行解对应的基称为可行基。一般地，线性规划通常最多可以有 C_n^m 个基本解，如图 1-1 中的点 0，Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 代表基可行解。可见，基可行解的非零分量的数目也不大于 m，并且都是非负的。

(5) 退化的基本可行解。在线性规划的一个基可行解中，若它的所有的基变量都取正值(即非零分量恰为 m 个)，则称它为非退化的解；反之，若有的基变量也取零值，则称它为退化的解。一个基本可行解中的非零分量小于 m 个时，则该解称为退化的基本可行解，该解对应的基称为退化基，若有关的线性规划问题的所有基本可行解都是非退化解，则该问题称作非退化的线性规划问题。

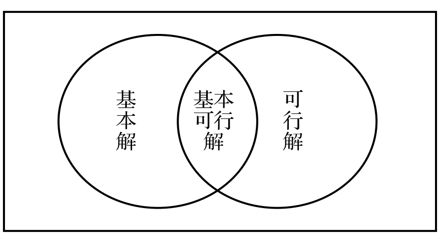


图 1-5 解之间的关系

(6) 可行基。对应于基可行解的基，称为可行基。约束方程具有基解的数目最多是 C_n^m 个。一般基可行解的数目小于基解的数目，以上提到的几种解的概念，它们之间的关系可以用图 1-5 表明。另外要说明一点，基解

中的非零分量的个数小于 m 时，该基解是退化解。在以下讨论中，假设不出现退化的情况。

以上给出了线性规划问题的解的概念和定义，它们将有助于分析线性规划问题的求解过程。

【例 1-6】 已知线性规划问题，试求其基本解、基可行解，并判别是否是退化的。

$$\max z=2x_1+x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 5\\-x_1+x_2\leqslant 0\\6x_1+2x_2\leqslant 21\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　引入松弛变量 x_3,x_4,x_5，将问题化为标准形式：

$$\max z=2x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3=5\\-x_1+x_2+x_4=0\\6x_1+2x_2+x_5=21\\x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,5)\end{cases}$$

故约束方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\-1&1&0&1&0\\6&2&0&0&1\end{bmatrix}=(P_1,P_2,\cdots,P_5)$$

取 $B_0=(P_3,P_4,P_5)=I$ 为一个基，令 $x_1=x_2=0$，得基本解 $x^{(0)}=(0,0,5,0,21)$，这也是一个基可行解，但是是一个退化的解，因为其中有一个基变量 $x_4=0$。

还可以取

$$B_1=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\6&2&0\end{bmatrix}$$

为基，令 $x_4=x_5=0$，得

$$X_{B_1}=B_1^{-1}b=\begin{bmatrix}0&\frac{-1}{4}&\frac{1}{8}\\0&\frac{3}{4}&\frac{1}{8}\\1&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\\21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{21}{8}\\\frac{21}{8}\\\frac{-1}{4}\end{bmatrix}$$

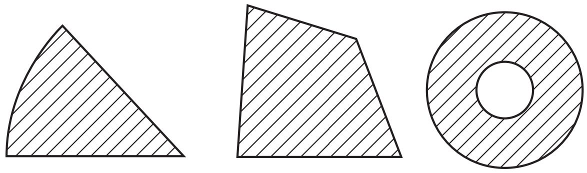
所以 $x^{(1)}=(\frac{21}{8},\frac{21}{8},-\frac{1}{4},0,0)^{\mathrm{T}}$ 是对应于基 B_1 的一个基本解，因其中有 $x_3=-\frac{1}{4}<0$，故它不是基可行解，但是是一个非退化解。类似地，也可求出其他的基本解。

2. 线性规划问题的基本定理

定义 1　设 K 是 n 维欧氏空间的一个点集，若任意两点 $X^{(1)}\in K$，$X^{(2)}\in K$ 的连线上的一切点 $aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}\in K(0\leqslant a\leqslant 1)$，则称 K 为凸集。图 1-6(a)、图 1-6(b)所示是凸集，图 1-6(c)所示不是凸集。

定义 2　设 K 是凸集，$X\in K$。若 X 能用不同的两点 $X^{(1)}\in K$，$X^{(2)}\in K$ 的线性组合表示为 $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}(0<a<1)$，则称 X 为 K 的一个顶点(或极点)。该定义说明，凸集中的顶点不是凸集中任意两点连线的内点。

定义 3　设 $X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(k)}$ 是欧氏空间中的 k 个点，若存在 k 个数 $u_1,u_2,\cdots,u_k$，满足 $0<u_k<1$，则称 $X=u_1X^{(1)}+u_2X^{(2)}+\cdots+u_kX^{(k)}$ 为 $X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(k)}$ 的凸组合。



(a) 凸集　　(b) 凸集　　(c) 非凸集

图 1-6　凸集和非凸集

定理 1　若线性规划存在可行域,则其可行域 $R=\{X\mid AX=b,X\geqslant 0\}$ 是凸集。

证明
$$\forall X^{(1)}\in R,\forall X^{(2)}\in R,\text{及 }0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

有
$$AX^{(1)}=b\text{ 且 }X^{(1)}\geqslant 0$$
$$AX^{(2)}=b\text{ 且 }X^{(2)}\geqslant 0$$

则
$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\geqslant 0$$
$$\begin{aligned}AX&=A[\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}]\\&=\alpha AX^{(1)}+(1-\alpha)AX^{(2)}\\&=\alpha b+(1-\alpha)b=b\end{aligned}$$

即
$$X\in R$$

故 R 为凸集。

定理 2　线性规划问题的可行解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解的充要条件是:X 的非零分量所对应的系数列向量是线性无关的。

定理 3　若线性规划有可行解,则一定有基可行解。

定理 4　线性规划问题的基可行解对应于可行域的顶点。

定理 5　若线性规划问题的可行域非空有界,则线性规划问题的最优解一定可以在其可行域的某个顶点上得到。

另外,若可行域为无界,则可能无最优解,如果存在最优解,也必定在某顶点上得到。根据以上讨论,可以得到以下结论:线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集,也可能为无界域,它们有有限个顶点,线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点;若线性规划问题有最优解,必定在某个顶点上得到。虽然顶点数目是有限的(它不大于 C_n^m 个),若采用"枚举法"找所有基可行解,然后一一比较,最终可能找到最优解。但是当 n,m 较大时,这种方法是行不通的,所以要继续讨论找到最优解的有效方法,这就是下面要介绍的单纯形法。

第三节　单 纯 形 法

单纯形法的基本思想是在有限的基可行解中寻找最优解。其基本做法是:首先求得一初始基可行解,并判断其是否为最优解,若是则停止计算,否则就转换到另一个基可行解,使目标函数值有所改善。如此重复进行,经过有限次迭代,直至得到线性规划问题的最优解,或判断出无最优解为止。

一、单纯形法的基本思路

下面通过一个计算实例引出单纯形法。

【例 1-7】　某企业利用 A,B,C 三种资源,在计划期内生产甲、乙两种产品,已知生产单位产品的资源消耗、单位产品利润等数据如表 1-4 所示,如何安排生产规划可使企业利润最大?

表 1-4　例 1-7 产品资源情况

资源	产品		资源限制/千克
	甲	乙	
A	1	2	8
B	4	0	16
C	0	4	12
单位产品利润/(元/件)	2	3	

解　建立线性规划模型如下，并用单纯形法求解下列线性规划：

$$\max z=2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 8 \\ 4x_1\leqslant 16 \\ 4x_2\leqslant 12 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

引入松弛变量 x_3,x_4,x_5，将问题化为标准形式：

$$\max z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ 4x_1+x_4=16 \\ 4x_2+x_5=12 \\ x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,5) \end{cases}$$

约束方程组的系数矩阵为

$$A=(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 找初始可行基。显然，x_3,x_4,x_5 的系数列向量是线性独立的，因而这些向量构成一个基：

$$B=(P_3,P_4,P_5)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对应于 B 的基变量为 x_3,x_4,x_5，从约束条件中可以得到：

$$x_3=8-x_1-2x_2$$

$$x_4=16-4x_1$$

$$x_5=12-4x_2$$

令非基变量 $x_1=x_2=0$，这时得到一个基可行解 $X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}$，此时目标函数 $z=0+2x_1+3x_2=0$，这个基可行解表示：工厂没有安排生产Ⅰ，Ⅱ产品，资源都没有被利用，所以工厂的利润 $z=0$。

现在的问题是：$X^{(0)}$ 是否是最优解呢？回答是否定的。因为非基变量 x_1,x_2 在目标函数中的系数分别为 2 和 3，均为正，因此在 $X^{(0)}$ 中，当 x_1 增大，即从零变为非零时，问题的目标函数会相应增大；同样，当 x_2 增大，即从零变为非零时，问题的目标函数也会相应增大。因此，对于某一基可行解，在用其非基变量表示目标函数以后，可用非基变量在目标函数中的系数来判别该基可行解是否为最优解，此时称目标函数中非基变量的系数为检验数。

(2) 寻找可行基，使其对应的基可行解能使目标函数值增加。

从经济意义上讲，安排生产产品Ⅰ或Ⅱ，就可以使工厂的利润指标增加，所以只要在目标函数中

还存在正系数的非基变量，这表示目标函数值还有增加的可能，就需要将非基变量与某个基变量进行对换。一般选择正系数最大的那个非基变量为换入变量，将它换入到基变量中去，同时要确定基变量中有一个要换出来成为非基变量，可按以下方法来确定换出变量。

为了使目标函数有所改善，在 $X^{(0)}$ 中必须使 x_1 或 x_2 从零变为非零，由于 x_2 的系数较大，因此首先选择 x_1 从零变为非零，即选择：$x_1>0, x_2=0$，则有 $X^{(1)}=(x_1, 0, x_3, x_4, x_5)$。要使 $X^{(1)}$ 为基可行解，x_3, x_4, x_5 中必有一个为零，而另两个大于或等于零。

当将 x_2 定为换入变量后，必须从 x_3, x_4, x_5 中换出一个，并保证其余的都是非负，即 $x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$。当 $x_2=0$ 时，可得到

$$x_3=8-x_1-2x_2$$
$$x_4=16-4x_1$$
$$x_5=12-4x_2$$

从上式可以看出，只有选择 $x_2=\min(8/2, —, 12/4)=3$ 时，才能使其成立。因为当 $x_2=3$ 时，基变量 $x_5=0$，所以可用 x_2 去替代 x_5。

说明了每生产一件产品Ⅱ，需要用掉的各种资源数为(2,0,4)。这些资源中的薄弱环节确定了产品Ⅱ的产量。原材料B的数量决定产品Ⅱ的产量只能是 $x_2=12/4=3$ 件。

这样可以得到 $X^{(1)}=(0,3,2,16,0)^{\mathrm{T}}$，显然，$X^{(1)}$ 中的非零分量对应的系数列向量 P_2, P_3, P_4 线性无关；$B=(P_2, P_3, P_4)$ 为一个基，因而 $X^{(1)}$ 为线性规划对应于 B 的基可行解。在从 $X^{(0)}$ 到 $X^{(1)}$ 的变换过程中，x_2 从零变为非零，称为进基变量(换入变量)；x_5 从非零变为零，称为出基变量(换出变量)。

从目标函数的表达式中可以看到，非基变量 x_1 的系数是正的，说明目标函数的值还可以增大，还不是最优解。于是用上述方法，确定换入、换出变量，继续迭代，再得到另外一个基可行解 $X^{(2)}=(2,3,0,8,0)^{\mathrm{T}}$。再经过一次迭代，得到一个基可行解 $X^{(3)}=(4,2,0,0,4)^{\mathrm{T}}$。而这时得到的目标函数的表达式为

$$z=14-1.5x_3-0.125x_4$$

分析目标函数，可知所有非基变量 x_3, x_4 的系数都是负数。这说明若要用剩余资源 x_3, x_4，就必须支付附加费用。所以当 $x_3, x_4=0$，即不再利用这些资源时，目标函数达到最大值，那么 $X^{(4)}$ 是最优解。这说明当产品Ⅰ生产 4 件，产品Ⅱ生产 2 件时，工厂才能得到最大利润。

通过上例，可以了解利用单纯形法求解线性规划问题的思路。现将每步迭代得到的结果与图解法做对比，其几何意义就很清楚了。

线性规划问题是二维的，即有两个变量。当加入松弛变量 x_3, x_4, x_5 后，变换为高维的。这时可以想象，满足所有约束条件的可行域是高维空间的凸多面体(凸集)，此凸多面体上的顶点就是基可行解。初始基可行解 $X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}$ 就相当于图 1-1 中的原点(0,0)，$X^{(1)}=(0,3,2,16,0)$ 相当于图 1-1 中的 Q_4 点(0,3)；$X^{(2)}=(2,3,0,8,0)^{\mathrm{T}}$ 相当于图 1-1 中的 Q_3 点(2,3)；最优解 $X^{(3)}=(4,2,0,0,4)^{\mathrm{T}}$ 相当于图 1-1 中的 Q_2 点(4,2)。从初始基可行解 $X^{(0)}$ 开始迭代，依次得到 $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$。这相当于图 1-1 中的目标函数平移时，从 0 点开始，首先移到 Q_4，然后移到 Q_3，最后到达 Q_2。

二、单纯形法的一般描述和求解步骤

一般的线性规划问题的求解有以下几个步骤：

(1) 确定初始基可行解。为了确定初始基可行解，首先要找出初始可行基。设一线性规划问题为

$$\max z = CX$$

$$(\mathrm{LP})\ \mathrm{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ x_j \geqslant 0 \ (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

可分两种情况讨论：

① 若 $P_j(j=1,2,\cdots,n)$中存在一个单位基，则将其作为初始可行基：

$$B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

② 若 $P_j(j=1,2,\cdots,n)$中不存在一个单位基，则人为地构造一个单位初始基。

(2) 求解检验数与最优性检验。

① 检验数的求解。对于线性规划的一个基可行解，若用非基变量表示目标函数，非基变量在目标函数中的系数称为检验数。为了描述检验数的一般性，这里给出其具体的表达式。

设标准形式的线性规划问题

$$\max z=CX;AX=b,X\geqslant 0$$

现假定其约束方程的系数矩阵 A 中存在一可行基 B，不失一般性，又设 $B=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，B 为单位矩阵，这样线性规划的约束方程 $AX=b$ 可以描述成如下形式(也就是用非基变量表示基变量)，即

$$\begin{cases}x_1 \qquad +a_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \quad x_2 \qquad +a_{2,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\quad x_m \quad +a_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

亦即
$$x_i=b_i-\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}x_j \quad i=1,2,\cdots,m$$

从上述约束方程中可以得到对应于基 B 的基可行解。

$$X=(b_1,b_2,\cdots,b_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

由非基变量表示目标函数有

$$\begin{aligned}z&=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=\sum_{i=1}^{m}c_ix_i+\sum_{j=m+1}^{n}c_jx_j\\&=\sum_{i=1}^{m}c_i(b_i-\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}x_j)+\sum_{j=m+1}^{n}c_jx_j\\&=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i+\sum_{j=m+1}^{n}(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij})x_j\end{aligned}$$

令
$$z_0=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i$$

$$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij} \quad j=1,2,\cdots,n$$

有
$$z=z_0+\sum_{j=m+1}^{n}\sigma_jx_j$$

式中，$\sigma_j(j=1,2,\cdots,n)$即为基可行解 X 的检验数。

更一般性的形式为

$$z_0=\sum_{i\in I}c_ib_i$$

$$\sigma_j=c_j-\sum_{i\in I}c_ia_{ij} \quad j\in J$$

$$z=z_0+\sum_{j\in J}\sigma_jx_j$$

式中，I 为基变量的下标集；J 为非基变量的下标集。

② 最优性检验。对于有基可行解的线性规划问题 $\max z=CX;AX=b,X\geqslant 0$，可用如下三个判

别定理来判别线性规划问题是否已获得最优解或无界解，三个定理的证明从略。

判别定理 1　设 X 为线性规划的一个基可行解，且对于一切 $j\in J$（J 为非基变量的下标集）有 $\sigma_j\leqslant 0$，则 X 为线性规划问题的最优解。

判别定理 2　设 X 为线性规划的一个基可行解，且对于一切 $j\in J$（J 为非基变量的下标集）有 $\sigma_j\leqslant 0$，同时有某个非基变量的检验数 $\sigma_k=0(k\in J)$，则该线性规划有无穷多最优解。

判别定理 3　设 X 为线性规划的一个基可行解，若有 $\sigma_k>0(k\in J)$，且 $p_k\leqslant 0$，即 $a_{ik}\leqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，则该线性规划问题具有无界解（无最优解）。

当求目标函数极小化时，一种情况如前所述，将其化为标准型。若不化为标准型，则最优解检验的三个判别定理表述应做相应调整。

（3）进行基变换。若初始基可行解不是最优解，又不能判别无界，需要找一个新的基可行解。由目标函数的约束条件可看到，当某些非基变量增加则目标函数值还可能增加，这时就要将其中某个非基变量换到基变量中去（称为换入变量）；同时，某个基变量要换成非基变量（称为换出变量），随之会得到一个新的基可行解。从一个基可行解到另一个基可行解的变换，就是进行一次基变换。从几何意义上讲，就是从可行域的一个顶点转向另一个顶点。

确定换入变量的原则是：为了使目标函数值尽快地增加，通常选 $\sigma_j>0$ 中的最大者，即 $\max\limits_{j}(\sigma_j>0)=\sigma_k$；然后选对应的变量 x_k 为换入变量。但也可以任选或按最小下标选。

按照检验数的意义，任何具有正检验数的非基变量均可入基，都能使目标函数值上升；选择具有最大正检验数的变量入基，目的是使目标函数尽快上升。

确定换出变量的原则是：保持解的可行性，就是要使原基可行解的某一个正分量变成 0；同时要保持其余分量均为非负，这时可按“最小比值原则”选择换出变量。当进基变量选定之后，可令

$$x_k=\theta>0,x_j=0(j=m+1,\cdots,n,\text{但 }j\neq k)$$

于是约束方程

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +a_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad +a_{2,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad x_m \ +a_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

变为

$$x_i=b_i-a_{ik}\theta \quad i=1,2,\cdots,m$$

按如下规则选择出基变量，即

$$\theta=\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\middle| a_{ik}>0,i=1,\cdots,m\right\}=\frac{b_i}{a_{ik}}$$

即用右端常数项各元素分别除以所选进基变量所在列对应的各元素之后，取最小值所在行所对应的变量 x_l 为出基变量。这样处理的结果是

$$x'_k=\frac{b_l}{a_{lk}}>0 \quad x'_l=b_l-a_{lk}\frac{b_l}{a_{ik}}=0$$

$$x'_i=b_i-a_{ik}\frac{b_l}{a_{lk}}\geqslant 0 \quad (i=1,\cdots,m,\text{但 }i\neq l)$$

这样，希望 $\bar{B}=(p_1,p_2,\cdots,p_{l-1},p_{l+1},\cdots,p_m)$ 为新的可行基，或者说希望 $\bar{X}=(x'_1,\cdots,x'_{l-1},0,x'_{l+1},\cdots,x'_m,0,\cdots,0,x'_k,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 为新的基可行解。

（4）进行迭代计算。对于改进的基可行解 $\bar{X}$：

$$\text{基变量 }\bar{X}_B=(x_1,\cdots,x_{l-1},x_k,x'_{l+1},x_{l+1},\cdots x_m)^{\mathrm{T}}$$

$$\text{非基变量 }\bar{X}_N=(x_{m+1},\cdots,x_{k-1},x_l,x_k,x_{k+1},\cdots x_n)^{\mathrm{T}}$$

为了判定 $\bar{X}$ 是否为最优解，首先要用非基变量来表示基变量，这一过程是以 a_{lk} 为主元素用高斯

消去法来实现的，即通过高斯消去法将线性规划约束方程组的增广矩阵(A,b)的第k列p_k变为一单位向量，得到新的约束方程组。新的增广矩阵各元素计算如下：

$$a'_{ij}=\begin{cases}\dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} & i=l\\ ai_j-a_{ik}\dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} & i\neq l\end{cases}\quad j=1,\cdots,n\qquad b'_i=\begin{cases}\dfrac{b_l}{a_{lk}} & i=l\\ b_i-\dfrac{a_{ik}}{a_{lk}}b_i & i\neq l\end{cases}$$

这样，约束方程就变换成如下形式：

$$\begin{cases}x_1+a'_{1l}x_l+a'_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+a'_{1,k-1}x_{k-1}+a'_{1,k+1}x_{k+1}+\cdots+a'_{1n}x_n=b'_1\\ \cdots\cdots\\ x_l+a'_{ll}x_l+a'_{l,m+1}x_{m+1}+\cdots+a'_{l,k-1}x_{k-1}+a'_{l,k+1}x_{k+1}+\cdots+a'_{ln}x_n=b'_l\\ \cdots\cdots\\ x_m+a'_{ml}x_m+a'_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+a'_{m,k-1}x_{k-1}+a'_{m,k+1}x_{k+1}+\cdots+a'_{mn}x_n=b'_m\end{cases}$$

令非基变量等于零，可以立即得到线性规划的一个改进的基可行解：$\overline{X}=(b'_1,\cdots,b'_{l-1},b'_k,b'_{l+1},b'_{l+1},\cdots,b'_m,0,\cdots0)^{\mathrm{T}}$。用检验数来判别此基可行解是否为最优解或线性规划问题无最优解。

(5) 填写单纯形表。为了便于理解计算关系，现设计一种计算表，称为单纯形表，其功能与增广矩阵相似，下面来建立单纯形表。

对于线性规划

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+x_nx_n$$

$$\begin{cases}x_1 \qquad +a_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \quad x_2 \qquad +a_{2,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad \cdots \quad \cdots\cdots\\ \qquad x_m \quad +a_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$$

显然初始可行基为$B=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，对应的基变量为$\overline{X}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，非基变量为$\overline{X}_N=(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则建立的对应的单纯形表如表 1-5 所示。

表 1-5 单纯形表

c_j		c_1	$\cdots$	c_l	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n	b
C_B	X_B	x_1	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1k}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
c_l	x_l	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$a_{l,m+1}$	$\cdots$	a_{lk}	$\cdots$	a_{ln}	b_l
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
c_m	x_m	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mk}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
c_j-z_j		0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$c_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{i,m+1}$	$\cdots$	$c_k-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ik}$	$\cdots$	$c_n-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{in}$	

对于上述单纯形表：X_B列中填入基变量，这里是$x_1,x_2,\cdots,x_m$；C_B列中填入基变量的价值系数，这里是$c_1,c_2,\cdots,c_m$，它们是与基变量相对应的；b列中填入约束方程组右端的常数$b_1,b_2,\cdots,b_m$；c_j行中填入基变量的价值系数$c_1,c_2,\cdots,c_n$；最后一行称为检验数行，对应各变量x_j的检验数是

$$c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}\quad j=1,2,\cdots,n$$

表 1-5 称为初始单纯形表，每迭代一步构造一个新单纯形表。一个完整的单纯形表，就给出了一个基可行解。

【例 1-8】 用单纯形表计算下列线性规划问题：

$$\max z=2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 8 \\ 4x_1\leqslant 16 \\ 4x_2\leqslant 12 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解 首先对线性规划问题进行标准化处理，加入松弛变量 x_3,x_4,x_5 为基变量，以它们对应的系数矩阵(单位矩阵)为基，就得到初始基可行解。标准形式如下：

$$\max z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ 4x_1+x_4=16 \\ 4x_2+x_5=12 \\ x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,5) \end{cases}$$

将有关数字填入表中，得到初始单纯形表，见表 1-6。

表 1-6 例 1-8 初始单纯形表

c_j		2	3	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	1	2	1	0	0	8
0	x_4	4	0	0	1	0	16
0	x_5	0	[4]	0	0	1	12
c_j-z_j		2	3	0	0	0	

从表 1-6 可以看出，取松弛变量 x_3,x_4,x_5 为基变量，它对应的单位矩阵为基，就可以得到初始基可行解 $X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}$，相应目标值为 0。在表中的左上角，$c_j$ 是表示目标函数中变量的价值系数，在 C_B 列填入初始基变量的价值系数，它们都为零，各非基变量的检验数为

$$\sigma_1=c_1-C_BP_1=2-(0\times 1+0\times 4+0\times 0)=2>0$$

$$\sigma_2=c_2-C_BP_2=3-(0\times 2+0\times 0+0\times 4)=3>0$$

因检验数都大于零，且 P_1,P_2 有正分量存在，显然，$X^{(0)}$ 不是最优解，同时也不能判断出该线性规划问题无最优解。因此，根据 $\max\{\sigma_j\mid\sigma_j>0\}=\sigma_j$，确定 x_2 为换入变量；按 θ 规则确定换出变量，即 $\theta=\min\{b_i/a_{ik}\mid a_{ik}>0\}=\min\{8/2,-,12/4\}$，对应的 x_5 为换出变量；x_2 所在列和 x_5 所在行的交叉处的元素[4]称为主元素，以[4]为主元素进行旋转运算，即初等变换，使 P_2 变换为 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$；在 X_B 列中用 x_2 替换 x_5，于是得到新的单纯形表，如表 1-7 所示。

表 1-7 第一次迭代得到的单纯形表

c_j		2	3	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	[1]	0	1	0	$-1/2$	2
0	x_4	4	0	0	1	0	16
3	x_2	0	1	0	0	$1/4$	3
c_j-z_j		2	0	0	0	$-3/4$	

从表 1-7 中可知：$X^{(1)}=(0,3,2,16,0)^{\mathrm{T}}$ 为对应的基可行解，相应目标值为 9，因此是改进的基可行解。检查表 1-7 的检验数，这时 $\sigma_1=2$，说明 x_1 应为换入变量。重复计算结果如表 1-8 所示。

表 1-8　多次迭代得到的单纯形表

c_j		2	3	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	1	0	$-1/2$	2
0	x_4	0	0	-4	1	[2]	3
3	x_2	0	1	0	0	$1/4$	8
c_j-z_j		0	0	-2	0	$1/4$	
2	x_1	1	0	0	$1/4$	0	4
0	x_5	0	0	-2	$1/2$	1	4
3	x_2	0	1	$1/2$	$-1/8$	0	2
c_j-z_j		0	0	$-3/2$	$-1/8$	0	

表 1-8 最后一行的所有检验数都已为负或零，这表示目标函数值已不可能再增大，于是得到最优解：$X^*=(4,2,0,0,4)^{\mathrm{T}}$；目标函数值为 $z^*=14$。

【例 1-9】　用单纯形表计算下列线性规划问题。

$$\max z=2x_1+x_2$$
$$\begin{cases}-x_1+x_2\leqslant 5\\ 2x_1-5x_2\leqslant 10\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　用单纯形表实现如表 1-9 所示。

表 1-9　单纯形表计算过程

c_j		2	1	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	-1	1	1	0	5
0	x_4	[2]	-5	0	1	10
c_j-z_j		2	$-3/2$	0	0	
0	x_3	0	$-5/2$	1	$1/2$	10
2	x_1	1	1	0	$1/2$	5
c_j-z_j		0	6	0	-1	

由于 $\sigma_2=6>0$ 且 $P_2\leqslant 0$，故该线性规划有无界解（无最优解）。

（6）单纯形法的计算步骤。综上所述，对于非退化的线性规划，其单纯形法的求解可按下列步骤进行：

① 找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯形表。

② 检验各非基变量的检验数，若对于一切 $j\in J$ 有 $\sigma_j\leqslant 0$，则已得到线性规划的最优解，可停止计算，否则转入下一步。

③ 若有 $a_k>0(k\in J)$ 且 $P_k\leqslant 0$，则该线性规划问题具有无界解（无最优解），停止计算，否则转入下一步。

④ 根据 $\max\{\sigma_j\mid\sigma_j>0\}=\sigma_k$ 确定 x_k 为换入变量，按 θ 规则确定换出变量，即 $\min\{b_i/a_{ik}\mid a_{ik}>0\}=b_l/a_{lk}$，对应的 x_l 为换出变量，转入下一步。

⑤ 以 a_{ik} 为主元素进行迭代，得到新的单纯形表，转入步骤②。

第四节 单纯形法的进一步讨论

一、人工变量法

上述单纯形法的基础是线性规划问题有初始可行解，有些线性规划问题化为标准形式以后，就存在初始可行基，如约束条件全部为“$\leqslant$”的线性规划问题。对于标准形式的线性规划问题，若约束方程系数矩阵中不存在现成的初始可行基，则不能简单地用单纯形法，而通常采用所谓的人工变量法。人工变量法一般有大 M 法和两阶段法。

1. 大 M 法

对于标准形式的线性规划问题(问题 A)

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

若其约束方程的系数矩阵中不存在现成的初始可行基，则引入所谓的人工变量 $x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$，构造如下形式的线性规划问题(问题 B)：

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n-Mx_{n+1}-\cdots-Mx_{n+m}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+m}\geqslant 0\end{cases}$$

问题 B 中 M 为任意大的正数，显然问题 B 存在现成的单位基，且初始基可行解中，以人工变量为基变量。

关于问题 B 的几点结论如下：

(1) 问题 B 要实现极大化，必须将人工变量从基变量中换出，否则目标函数不可能实现极大化。

(2) 若在求解问题 B 的过程中，已将人工变量从基变量中换出，则已得到问题 A 的一个基可行解，可继续求解，以获得问题 A 的最优解或判别问题 A 无最优解。

(3) 若求解问题 B 已得到最优解，且最优解的基变量中不含有人工变量，则问题 B 的最优解就是问题 A 的最优解。

【例 1-10】 用单纯形法(大 M 法)计算下列线性规划问题。

$$\max z=3x_1-x_2-x_3$$

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3\leqslant 11\\-4x_1+x_2+2x_3\geqslant 3\\-2x_1+x_3=1\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

解 在约束条件中分别加入松弛变量 x_4、剩余变量 x_5 和人工变量 x_6，x_7，整理得到：

$$\max z=3x_1-x_2-x_3+0x_4+0x_5-Mx_6-Mx_7$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6\geqslant 3 \\ -2x_1+x_3+x_7=1 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法进行计算，计算过程如表 1-10 所示。

表 1-10　单纯形法计算过程

c_j		3	-1	-1	0	0	$-M$	$-M$	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	1	-2	1	1	0	0	0	11
$-M$	x_6	-4	1	2	0	-1	1	0	3
$-M$	x_7	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
c_j-z_j		$3-6M$	$-1+M$	$-1+3M$	0	$-M$	0	0	
0	x_4	3	-2	0	1	0	0	-1	10
$-M$	x_6	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
-1	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1
c_j-z_j		1	$-1+M$	0	0	$-M$	0	$-3M+1$	
0	x_4	[3]	0	0	1	-2	2	-5	12
-1	x_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1
-1	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1
c_j-z_j		1	0	0	0	-2	$-M+1$	$-M-3$	
3	x_1	1	0	0	1/3	$-2/3$	2/3	$-5/3$	4
-1	x_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1
-1	x_3	0	0	1	2/3	$-4/3$	4/3	$-7/3$	9
c_j-z_j		0	0	0	$-1/3$	$-1/3$	$-M+1/3$	$-M+2/3$	

由于 $\sigma_j\leqslant 0(j=1,\cdots,7)$，且基变量中不含人工变量，故 $X^*=(4,1,9)^{\mathrm{T}}$，$z^*=2$。

【例 1-11】　用单纯形法(大 M 法)计算下列线性规划问题。

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\leqslant 2 \\ 3x_1+4x_2\geqslant 12 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解　化为标准形式后引入人工变量 x_5，得到

$$\max z=3x_1+2x_2-Mx_5$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ 3x_1+4x_2-x_4+x_5=12 \\ x_1,\cdots,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法计算，其过程如表 1-11 所示。

表 1-11　单纯形法求解过程

c_j		3	2	0	0	$-M$	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	1	1	0	0	2
$-M$	x_5	3	[4]	0	-1	1	12
c_j-z_j		$3+3M$	$2+4M$	0	$-M$	0	
2	x_2	2	1	1	0	0	2
$-M$	x_5	-5	0	-4	-1	1	4
c_j-z_j		$-1-5M$	0	$-2-4M$	$-M$	0	

从表 1-11 中可以看出，虽然检验数均小于或等于零，但基变量中含有非零的人工变量 $x_5=4$，所以原问题无可行解。

2. 两阶段法

对于标准形式的线性规划问题(问题 A)：

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

其约束方程的系数矩阵中不存在现成的初始可行基，则引入所谓的人工变量 $x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$，构造如下形式的线性规划问题(问题 C)：

$$\min w=x_{n+1}+\cdots+x_{n+m}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+m}\geqslant 0\end{cases}$$

关于问题 C 的几点结论如下：

(1) 由于问题 C 为极小化问题，且目标函数有下界，因此问题 C 肯定有最优解。

(2) 求解问题 C 已得到其最优解，若问题 C 最优解所对应的目标函数值 $w>0$，则原问题 A 无可行解；若问题 C 所对应的目标函数值 $w=0$，则已得到原问题 A 的一个基可行解。

因此，此问题的求解有如下两阶段：

(1) 用单纯形法求解辅助线性规划问题 C，若问题 C 最优解所对应的目标函数值 $w=0$，则得到原线性规划问题的基可行解，于是转向第二阶段；若问题 C 的目标函数值 $w>0$，则原线性规划问题无可行解，计算停止。

(2) 把第一阶段的辅助线性规划问题的最优解作为原问题 C 的初始基可行解，用单纯形法继续求解。

【例 1-12】 用两阶段法计算下列线性规划问题。

$$\max z=3x_1-x_2-x_3$$

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3\leqslant 11\\-4x_1+x_2+2x_3\geqslant 3\\-2x_1+x_3=1\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

解　构造辅助线性规划问题，整理得到：

$$\min w=x_6+x_7$$

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=11\\-4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6\geqslant 3\\-2x_1+x_3+x_7=1\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0\end{cases}$$

利用单纯形法求解该线性规划问题(极小化为标准形式)，如表 1-12 所示。

表 1-12 第一阶段单纯形法求解过程

c_j		0	0	0	0	0	1	1	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	1	−2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	−4	1	2	0	−1	1	0	3
1	x_7	−2	0	[1]	0	0	0	1	1
$-w$		6	−1	−3	0	1	0	0	
0	x_4	3	−2	0	1	0	0	−1	10
1	x_6	0	[1]	0	0	−1	1	−2	1
0	x_3	−2	0	1	0	0	0	1	1
$-w$		0	−1	0	0	1	0	3	
0	x_4	3	0	0	1	−2	2	−5	12
0	x_2	0	1	0	0	−1	1	−2	1
0	x_3	−2	0	1	0	0	0	1	1
$-w$		0	0	0	0	0	1	1	

在上述最优单纯形表中，基变量中已无人工变量，且 $w^*=0$。消去第一阶段最优单纯形表中人工变量所在列，并将目标函数系数换成原线性规划问题相应的系数，进行第二阶段的单纯形迭代，其计算过程如表 1-13 所示。

表 1-13 第二阶段单纯形法求解过程

c_j		3	−1	−1	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_1	[3]	0	0	1	−2	12
1	x_2	0	1	0	0	−1	1
1	x_3	−2	0	1	0	0	1
c_j-z_j		1	0	0	0	−1	
3	x_1	1	0	0	1/3	−2/3	4
−1	x_2	0	1	0	0	−1	1
−1	x_3	0	0	1	2/3	−4/3	9
c_j-z_j		0	0	0	−1/3	−1/3	

由于 $\sigma_j\leqslant 0(j=1,\cdots,5)$，故 $X^*=(4,1,9)^{\mathrm{T}}$，$z^*=2$。

3. 退化与循环

单纯形法计算中在用 θ 规则确定换出变量时，有时存在两个以上相同的最小比值，这样在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于零，这就出现退化解。这时抽象出变量 $x_l=0$，迭代后目标函数值不变。不同基表示为同一顶点。当出现退化时，进行多次迭代，而基从 B_1，B_2，…，又返回到 B_1，即出现计算过程的循环，便永远达不到最优解。

尽管计算过程的循环现象很少出现，但还是有可能的。如何解决这个问题？先后有人提出了“摄动法”和“字典序法”。1974 年由勃兰特(Bland)提出一种简便的规划，简称“勃兰特规则”，表述如下：

(1) 选取 $\sigma_j>0$ 中下标最小的非基变量 x_k 为换入变量，即 $k=\min\{j\mid\sigma_j>0\}$。

(2) 当按 θ 规则计算存在两个或两个以上最小比值时，选取下标最小的基变量为出基变量。

可以证明，按勃兰特规则计算时，一定能避免出现循环。大量计算实践表明，退化是常见的，而

循环则极少出现。

二、单纯形法的矩阵描述

现在用矩阵描述单纯形法的计算过程。它有助于对单纯形法的理解，以及后面相关理论的学习。

设线性规划问题：

$$\max z = CX$$

$$(\mathrm{LP})\ \mathrm{s.t.}\begin{cases} AX \leqslant b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

加上松弛变量 $X_S=(x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{n+m})^{\mathrm{T}}$，将其标准化为标准形式：

$$\max z = CX + 0X_S$$

$$(\mathrm{LP})\ \mathrm{s.t.}\begin{cases} AX + IX_S = b \\ X \geqslant 0, X_S \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 I 为 m 阶单位矩阵。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[P_1,P_2,\cdots,P_n]=[B,N]$$

不失一般性，设 $B=[P_1,P_2,\cdots,P_m]$ 为基；$N=[P_{m+1},P_{m+2},\cdots,P_n]$ 为非基变量系数构成的矩阵；$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=(X_B,X_N)^{\mathrm{T}}$，其中 $X_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$ 为基变量构成的向量，$X_N=(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为非基变量构成的向量。

$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(C_B,C_N)$，其中 $C_B=(c_1,c_2,\cdots,c_m)$，$C_N=(c_{m+1},c_{m+2},\cdots,c_n)$，这样

$$(A,I)\begin{pmatrix} X \\ X_S \end{pmatrix}=(B,N,I)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \\ X_S \end{pmatrix}=BX_B+NX_N+IX_S$$

因而有 $$BX_B+NX_N+IX_S=b$$

即 $$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N-B^{-1}X_S$$

用非基变量 X_N 表示目标函数，有

$$\begin{aligned} z &= CX+0X_S=(C_B,C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}+0X_S \\ &= C_BX_B+C_NX_N+0X_S \end{aligned}$$

将 $X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N-B^{-1}X_S$ 代入目标函数中，可得

$$\begin{aligned} z &= C_B(B^{-1}b-B^{-1}NX_N-B^{-1}X_S)+C_NX_N+0X_S \\ &= C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N-C_BB^{-1}X_S \end{aligned}$$

令 $$X_N=0, X_S=0$$

得到对应于基 B 的基可行解为

$$X=(X_B,X_N,X_S)^{\mathrm{T}}=(B^{-1}b,0,0)^{\mathrm{T}}$$

目标值为 $$z=C_BB^{-1}b$$

相应的非基变量的检验数为

$$\sigma_N=(C_N-C_BB^{-1}N,-C_BB^{-1})$$

将基变量一起考虑有：

$$\sigma=(0,C_N-C_BB^{-1}N,-C_BB^{-1})=(C-C_B^{-1}A,-C_BB^{-1})$$

此外，从上式中可推出计算某一具体变量 x_j 的检验数计算公式，即

$$\sigma_j=c_j-C_BB^{-1}p_j$$

上述过程可用单纯形表描述，如表 1-14 所示。

表 1-14　单纯形表的矩阵表示

C		C_B	C_N	0	b
C_B	X_B	X_B	X_N	X_S	
C_B	X_B	I	$B^{-1}N$	B^{-1}	$B^{-1}b$
c_j-z_j		0	$C_N-C_BB^{-1}N$	$-C_BB^{-1}$	$-C_BB^{-1}b$

由最优性判别定理可知，当 $\sigma=(C-C_B^{-1}A,-C_BB^{-1})\leqslant 0$ 时，$X=(X_B,X_N,X_S)^{\mathrm{T}}=(B^{-1}b,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为线性规划的最优解；若存在 $\sigma_j=c_j-C_BB^{-1}p_j>0(j\in J)$，有 $-B^{-1}p_j\leqslant 0$，则线性规划问题有无界解。

第五节　线性规划应用举例

一、生产计划问题

生产计划问题的一般提法是：用若干种资源 $B_1,B_2,\cdots,B_m$，生产若干产品 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，资源供应有一定限制，要求制定一个产品生产计划，使其在资源限制条件下，得到最大效益。这个问题如表 1-15 所示。

表 1-15　产品资源限制条件

资源	产品	资源限制
	$A_1,A_2,\cdots,A_m$	
B_1	$a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$	b_1
B_2	$a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}$	b_2
…	……	…
B_m	$a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn}$	b_m
单件利润	$c_1,c_2,\cdots,c_m$	

解　设 x_j 表示生产 A_j 种产品的计划数，$j=1,2,\cdots,n$，则有

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\\ x_j\geqslant 0\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

【例 1-13】　某厂计划生产甲、乙两种产品，要消耗 B_1,B_2,B_3 三种资源，已知每件产品对这三种资源的消耗，这三种资源的现有数和每件产品可获得的利润如表 1-16 所示，问如何安排生产计划，既能充分利用现有资源，又使总利润最大？

表 1-16 资源约束和限制

资源	产品		资源限制
	甲	乙	
B_1	5	2	170
B_2	2	3	100
B_3	1	5	150
单件利润	10	18	

解 为了建立此问题的数学模型，首先要选定决策变量，即决策人可控制的因素。可令 x_1, x_2 分别表示生产产品甲和乙的产量，根据决策变量的限制条件，可建立如下线性规划模型：

$$\max z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leqslant 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 100 \\ x_1 + 5x_2 \leqslant 150 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

求解得到 $x_1 = 50/7$；$x_2 = 200/7$；$z = 4\ 100/7$。

二、人力资源配置问题

人力资源配置问题的一般提法是：一项工作根据其特点在不同的时间段，采用不同的工作人员，问如何安排工作人员的作息，既满足工作需要，又使配备人员的数量最小。

【例 1-14】 某大都市有昼夜服务的公交线路，经长时间统计观察，每天各时段所需要的司乘人员数见表 1-17。设司乘人员分别在每时段准时上班，并连续工作 8 h，问公交公司应如何安排这条公交线路的司乘人员，才能既满足工作需要，又使配备的司乘人员最少？

表 1-17 司乘人员需求信息

班次	时间区间	所需人数
1	6:00～10:00	60
2	10:00～14:00	70
3	14:00～18:00	60
4	18:00～22:00	50
5	22:00～2:00	20
6	2:00～6:00	30

解 设用 x_i 表示第 i 班开始上班的司乘人员数，由于每班实际上班的人数中必包括前一班的人数，于是可建立如下线性规划模型：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_6 \geqslant 60 \\ x_1 + x_2 \geqslant 70 \\ x_2 + x_3 \geqslant 60 \\ x_3 + x_4 \geqslant 50 \\ x_4 + x_5 \geqslant 20 \\ x_5 + x_6 \geqslant 30 \\ x_j \geqslant 0 (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

求解得到 $x_1 = 50$；$x_2 = 20$；$x_3 = 50$；$x_4 = 0$；$x_5 = 20$；$x_6 = 10$；$z = 150$。

三、合理配料问题

合理配料问题的提法是：某饲料场用 n 种饲料 $B_1,B_2,\cdots B_n$，配制成含有 m 种营养成分 $A_1,A_2,\cdots A_m$ 的混合配料，各种饲料所含营养成分、混合饲料对各种成分的最低需求及各种饲料的单价，应该如何配料，才能既满足需求，又使混合饲料总成本最低。

【例 1-15】 某食品公司考虑用西红柿、菠菜、梨、洋葱、马铃薯、黄豆、小萝卜、胡萝卜等食品来配餐，要求配制后的食品满足一定的维生素含量（这里只考虑维生素 A、维生素 B 和维生素 C 三种维生素）。配餐中的各种食品的维生素含量及单位成本等数据如表 1-18 所示，公司管理层希望以最小的成本配制满足维生素需要量的食品。

表 1-18　各种食品的维生素含量及单位成本

营养物	西红柿	菠菜	梨	洋葱	马铃薯	黄豆	小萝卜	胡萝卜	需要量
维生素 A	8	8	6	4	7	4	5	2	70
维生素 B	2	5	4	5	1	1	2	1	60
维生素 C	1	2	1	3	3	2	1	4	30
价格	7	5	4	5	5	6	8	5	

解　用 x_j 分别代表各种营养物在配餐食品中的数量，于是建立如下线性规划模型：

$$\min z=7x_1+5x_2+4x_3+5x_4+5x_5+6x_6+8x_7+5x_8$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}8x_1+8x_2+6x_3+4x_4+7x_5+4x_6+5x_7+2x_8=70\\2x_1+5x_2+4x_3+5x_4+x_5+x_6+2x_7+x_8=60\\x_1+2x_2+x_3+3x_4+3x_5+2x_6+x_7+4x_8=30\\x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,8)\end{cases}$$

求解得到的结果为 $X^*=(0,5,0.714\,3,6.428\,6,0,0,0,0)$；$z=60$。

四、套裁下料问题

套裁下料问题的一般提法是：在加工业中，需要将某类规格的棒材或板材裁成不同规格的毛坯，对裁出毛坯有一定的数量要求。问如何裁取，既满足对裁出毛坯的数量要求，又使所使用的原材料最少。

【例 1-16】 现要做 100 套钢架，每套长 2.9 米、2.1 米和 1.5 米的圆钢各一根，已知原料长 7.4 米，问应如何下料，使所用的原材料最省。

简单的下料方法是：每根圆钢截取 2.9 米、2.1 米和 1.5 米的长度各一根，组成一套，这样每根圆钢剩下料头 0.9 米。完成任务后，共消耗圆钢 100 根，余下的料头共 90 米。若改成套裁方法，即可先设计出几个较好的下料方案。所谓较好即第一要求是每个方案下料后的料头较短，第二要求是所有的方案配合起来能满足完成任务的需要。为此，可设计 5 种方案供参考使用，见表 1-19。

表 1-19　套裁方案

长度/米	下料根数				
	方案Ⅰ	方案Ⅱ	方案Ⅲ	方案Ⅳ	方案Ⅴ
2.9	1	2	0	1	0
2.1	0	0	2	2	1
1.5	3	1	2	0	3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

为了得到100套钢架，需要混合使用各种下料方案。设按方案Ⅰ下料的原材料根数为x_1，方案Ⅱ为x_2，方案Ⅲ为x_3，方案Ⅳ为x_4，方案Ⅴ为x_5，可列出以下数学模型：

$$\min z=0x_1+0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_4=100 \\ 2x_3+2x_4+x_5=100 \\ 3x_1+x_2+2x_3+3x_5=100 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

计算得出最优下料方案是：按方案Ⅰ为30根，按方案Ⅱ为10根，按方案Ⅳ为50根，即需90根原材料，可以制造100套钢架。

思考与练习

1. 将下列线性规划模型转化为标准型。

(1) $$\max z=3x_1+2x_2+4x_3-8x_4$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3+6x_4\geqslant 8 \\ -2x_1+5x_2+3x_3-5x_4\leqslant 3 \\ 2x_1+4x_2+4x_3-5x_4=18 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0,x_4\text{ 无约束} \end{cases}$$

(2) $$\min z=-3x_1+4x_2-2x_3+5x_4$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3-x_4=-2 \\ x_1+x_2+3x_3-x_4\leqslant 14 \\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4\geqslant 2 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0,x_4\text{ 无约束} \end{cases}$$

2. 用图解法求解下列线性规划问题。

(1) $$\min z=2x_1+3x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1+3x_2\geqslant 3 \\ x_1+x_2\geqslant 2 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $$\min z=2x_1-10x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1-x_2\geqslant 2 \\ 3x_1-x_2\geqslant -5 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

3. 分别用大M法和两阶段法求解下列线性规划问题。

(1) $$\max z=2x_1-2x_2+x_3$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3\leqslant 60 \\ x_1-x_2+2x_3\leqslant 10 \\ x_1+x_2-x_3\leqslant 20 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $$\max z=2x_1+x_2+x_3$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} 4x_1+2x_2+2x_3\geqslant 4 \\ 2x_1+4x_2\leqslant 20 \\ 4x_1+8x_2+2x_3\leqslant 16 \\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(3) $$\max z=5x_1-2x_2+x_3$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1+4x_2+x_3\leqslant 6 \\ 2x_1+x_2+3x_3\geqslant 2 \\ x_1,x_2\geqslant 0;x_3\text{ 符号不限} \end{cases}$$

(4) $$\max z=5x_1+3x_2+6x_3$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\leqslant 18 \\ 2x_1+x_2+3x_3\leqslant 16 \\ x_1+x_2+x_3=10 \\ x_1,x_2\geqslant 0;x_3\text{ 符号不限} \end{cases}$$

4. 某公司在三年的计划期内，有四个建设项目可以投资：项目Ⅰ从第一年到第三年年初都可以投资。预计每年年初投资，年末可收回本利120%，每年又可以重新将所获本利纳入投资计划；项目Ⅱ需要在第一年年初投资，经过两年可收回本利150%，又可以重新将所获本利纳入投资计划，但用于该项目的最大投资额不得超过20万元；项目Ⅲ需要在第二年年初投资，经过两年可收回本利160%，但用于该项目的最大投资额不得超过15万元；项目Ⅳ需要在第三年年初投资，年末可收回本利140%，但用于该项目的最大投资额不得超过10万元。在这个计划期内，该公司第一年可供投资的资金有30万元。问怎样的投资方案，才能使该公司在这个计划期获得最大利润？

5. 表1-20中给出求极大化问题的单纯形表，问表中a_1,a_2,c_1,c_2,d为何值及表中变量属于哪一种类型时有：

(1) 表中解为唯一最优解；
(2)表中解为无穷多最优解之一；
(3) 表中解为退化的可行解；
(4)下一步迭代将以 x_1 代替基变量 x_5；
(5) 该线性规划问题具有无界解；
(6)该线性规划问题无可行解。

表 1-20　单纯形表

基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	d	4	a_1	1	0	0
x_1	2	-1	-5	0	1	0
x_1	3	a_2	-3	0	0	1
c_j-z_j		c_1	c_2	0	0	0

6. 某石油公司有两个冶炼厂。甲厂每天可分别生产高级、中级和低级的石油 200 桶、300 桶和 200 桶，乙厂每天可分别生产高级、中级和低级的石油 100 桶、200 桶和 100 桶。公司需要三种油的数量分别为 14 000 桶、24 000 桶和 14 000 桶。甲厂每天的运行费是 5 000 元，乙厂是 4 000 元。问：
(1) 公司应安排这两个冶炼厂各生产多少天最经济？
(2) 如果甲厂的运行费是 2 000 元，乙厂是 5 000 元，公司又应如何安排两个厂的生产？
列出线性规划模型并求解。

7. 某糖果厂用原料 A,B,C 加工成三种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中 A,B,C 的含量，原料成本，各种原料的每月限制用量，三种牌号糖果的单位加工费及售价如表 1-21 所示，问该厂每月应生产这三种牌号糖果各多少千克，使该厂获利最大？试建立这个问题的线性规划模型并求解。

表 1-21　原料情况表

原料	甲	乙	丙	原料成本 /(元/千克)	每月限制用量 /千克
A	⩾60%	⩾15%		2.00	2 000
B				1.50	2 500
C	⩽20%	⩽60%	⩽50%	1.00	1 200
加工费/(元/千克)	0.50	0.40	0.30		
售价	3.40	2.85	2.25		

8. 某旅馆每日至少需要下列数量的服务员(见表 1-22)，每班服务员从开始上班到下班连续工作 8 小时，为满足每班所需要的最少服务员数，这个旅馆至少需要多少服务员？

表 1-22　服务员需要信息表

班次	时间(日夜服务)	最少服务员人数
1	上午 6 点～上午 10 点	80
2	上午 10 点～下午 2 点	90
3	下午 2 点～下午 6 点	80
4	下午 6 点～夜间 10 点	70
5	夜间 10 点～夜间 2 点	40
6	夜间 2 点～上午 6 点	30

9. 某工厂生产Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ四种产品，产品Ⅰ需依次经过 A,B 两种机器加工，产品Ⅱ需依次经过 A,C 两种机器加工，产品Ⅲ需依次经过 B,C 两种机器加工，产品Ⅳ需依次经过 A,B 两种机器加工。有关数据如表 1-23 所示，请为该厂制定一个最优生产计划。

表 1-23 资源、成本费用表

产品	机器生产率/(件/小时)			原料成本/元	产品价格/元
	A	B	C		
Ⅰ	10	20		16	65
Ⅱ	20		10	25	80
Ⅲ		10	15	12	50
Ⅳ	20	10		18	70
机器成本/(元/小时)	200	150	225		
每周可用小时数	150	120	70		

10. 某制衣厂生产 4 种规格的出口服装，有 A,B,C 三种制衣机可以加工这 4 种服装，它们的生产效率(每天制作的服装件数)等有关数据如表 1-24 所示，试确定各种服装的生产数量，使总的加工费用最少。

表 1-24 生产情况表

衣服规格	制衣机			需要生产数量/件
	A	B	C	
Ⅰ	300	600	800	10 000
Ⅱ	280	450	700	9 000
Ⅲ	200	350	680	7 000
Ⅳ	150	410	450	8 000
每天加工费/元	80	100	150	

第二章

对偶理论与灵敏度分析

本章内容分为两大部分:对偶规划与灵敏度分析。对偶规划是对线性规划问题从另一个角度进行的研究,是线性规划理论的进一步深化,也是线性规划理论整体的一个不可分割的组成部分。灵敏度分析是对线性规划结果的再发掘,是对线性规划理论的充分利用。通过本章的学习,要求能够写出任意一个线性规划问题的对偶问题,并能应用对偶单纯形法解决相应的线性规划问题,同时能对线性规划的求解结果进行多种情况的灵敏度分析。

第一节　线性规划的对偶问题及其数学模型

一、对偶问题的提出

在例 1-1 的生产计划问题中,从安排生产使企业利润最大化的角度考虑,若用 x_1,x_2 分别代表甲、乙两种产品的生产数量,则该问题的线性规划数学模型为:

问题 A

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 300 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 400 \\ x_2 \leqslant 250 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

现从另一个角度考虑,即企业不安排生产,而是转让三种资源,应如何给三种资源定价?

设 y_1,y_2,y_3 分别代表 A,B,C 三种资源的价格,即转让单位数量资源所获的收益。对于决策者,首先当然会考虑如下两个条件:

约束条件 1:生产一件产品甲所耗资源数量的转让所得的总收益不能低于生产一件产品甲所获的利润,即:$1y_1 + 2y_2 \geqslant 50$。

约束条件 2:生产一件产品乙所耗资源数量的转让所得的总收益不能低于生产一件产品乙所获的利润,即:$1y_1 + 1y_2 + 1y_3 \geqslant 100$。

而企业将现有三种资源全部转让所得的总收益,即目标函数为

$$w = 300y_1 + 400y_2 + 250y_3$$

从数学的角度分析,若目标函数极大化,则问题为无界解,即问题无意义,故目标函数只能极小

化。从经济的角度看，A,B,C 三种资源的转让是与企业利用这三种资源进行最优生产来进行比较的。因此，企业的决策者可以从这种比较中了解在不低于企业最优生产所获利润的条件下各资源的最低转让价格。从工厂决策者的角度来看，当然是 w 值越大越好，但从接受方的角度来看，则是支付越少越好。所以，工厂的决策者只能在满足将资源出租的所有收入不低于自己组织生产该产品所获得的利润的条件下，使其总收入尽可能小，这样才能使接受方接受，工厂才能实现其意愿，这样问题的目标函数也是要求为极小化，因此问题的数学模型为：

问题 B

$$w=300y_1+400y_2+250y_3$$
$$\begin{cases}1y_1+2y_2\geqslant 50\\1y_1+1y_2+1y_3\geqslant 100\\y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}$$

问题 B 为问题 A 的对偶问题，问题 A 为原问题。

二、对偶问题的数学模型

线性规划单纯形法的矩阵描述有定义单纯形乘子 $Y=CB^{-1}$，对线性规划原问题 P：

$$\max z=CX$$
$$\begin{cases}AX\leqslant b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

最优解标准为所有变量的检验数 $\sigma\leqslant 0$，即 $C_B-C_BB^{-1}A\leqslant 0$，有 $C-YA\leqslant 0$，得

$$YA\geqslant 0$$
$$\sigma=C_B-C_BB^{-1}A\leqslant 0$$

得
$$C_BB^{-1}\geqslant 0$$

即有
$$Y\geqslant 0$$

$Y=C_BB^{-1}$两边右乘 b，得

$$Yb=C_BB^{-1}b=Z$$

因为 $Y\geqslant 0$，要使 Z 有最大值，Yb 只能存在最小值，即有

$$\min\omega=Yb$$

式(2-1)、式(2-2)、式(2-3)构成线性规划原问题 P 的对偶问题 D 的数学模型：

$$\min w=Yb \tag{2-1}$$
$$YA\geqslant C \tag{2-2}$$
$$Y\geqslant 0 \tag{2-3}$$

同理，线性规划原问题为

$$\min z=CX$$
$$\begin{cases}YX\leqslant b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

其对偶问题为

$$\min w=Yb$$
$$\begin{cases}YA\geqslant C\\Y\geqslant 0\end{cases}$$

上述两种对偶模型称为对称型模型。另外，还有一种原问题约束为等式或变量为无约束变量的对偶模型，称为非对称型模型，线性规划原问题为

$$\min z=CX$$
$$\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

这种非对称型模型对偶关系的处理步骤如下：

(1) 先将等式约束条件分解为两个不等式约束条件，则可表示为

$$\max z=CX \qquad\qquad \max z=CX$$
$$\begin{cases}AX\leqslant b\\ AX\geqslant b\\ X\geqslant 0\end{cases} \quad 即有 \quad \begin{cases}AX\leqslant b & ①\\ -AX\leqslant -b & ②\\ X\geqslant 0\end{cases}$$

$Y'=(y_1',y_2',\cdots,y_m')$是对应约束条件①的对偶变量。

$Y''=(y_1'',y_2'',\cdots,y_m'')$是对应约束条件②的对偶变量。

(2) 按对称型变换关系可写出它的对偶问题，有

$$\min w=Y'b+(-Y''b)$$
$$\begin{cases}Y'A+(-Y''A)\geqslant C\\ Y',Y''\geqslant 0\end{cases}$$

令 $Y=Y'-Y''$，$Y',Y''\geqslant 0$，由此可知 Y 不受正、负限制。用 Y 代替后，原问题的对偶问题得

$$\begin{cases}YA\geqslant C\\ Y\ 无约束\end{cases}$$

线性规划问题为

$$\min z=CX$$
$$\begin{cases}YX\leqslant b\\ X\geqslant 0\end{cases}$$

其对偶问题为

$$\min w=Yb$$
$$\begin{cases}YA\geqslant C\\ Y\geqslant 0\end{cases}$$

且前者称为原问题，后者称为对偶问题。具体的数量对应关系为：

原问题
$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant(=,\leqslant)b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant(=,\leqslant)b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant(=,\leqslant)b_m\\ x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

对偶问题
$$\min w=b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m\geqslant c_1\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m\geqslant c_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m\geqslant c_n\\ y_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,m)\end{cases}$$

根据对偶问题的定义不难推出，对于线性规划问题：$\min w=Yb$；$YA\geqslant C$；$Y\geqslant 0$，其对偶问题为：$\max z=CX$；$AX\leqslant b$；$X\geqslant 0$；即两线性规划问题互为对偶。事实上，任何一个线性规划问题都有一个固定的线性规划问题与之对偶，且二者互为对偶关系，线性规划的这种性质称为对称性。更进一步地，对于线性规划问题：$\max z=CX$；$AX=b$；$X\geqslant 0$；其对偶问题为

$$\min w=Yb;YA\geqslant C;Y\ 无限制$$

根据以上分析，线性规划原问题与对偶问题的数量关系可用表 2-1 描述。

表 2-1　线性规划原问题与对偶问题的数量关系

<table>
<tr><th colspan="2">原问题(或对偶问题)</th><th colspan="2">对偶问题(或原问题)</th></tr>
<tr><td>目标函数</td><td>$\max z$</td><td>$\min w$</td><td>目标函数</td></tr>
<tr><td rowspan="4">变量</td><td>n 个</td><td>n 个</td><td rowspan="4">约束条件</td></tr>
<tr><td>$\geqslant 0$</td><td>$\geqslant$</td></tr>
<tr><td>$\leqslant 0$</td><td>$\leqslant$</td></tr>
<tr><td>无约束</td><td>$=$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">约束条件</td><td>m 个</td><td>m 个</td><td rowspan="4">变量</td></tr>
<tr><td>$\leqslant$</td><td>$\geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>$\geqslant$</td><td>$\leqslant 0$</td></tr>
<tr><td>$=$</td><td>无约束</td></tr>
<tr><td colspan="2">约束条件右端常数项
目标函数变量系数</td><td colspan="2">目标函数变量系数
约束条件右端常数项</td></tr>
</table>

【例 2-1】 写出下列线性规划问题的对偶问题。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geqslant 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_4 \leqslant 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leqslant 0, x_2, x_3 \geqslant 0, x_4 \text{ 无限制} \end{cases}$$

解　根据对偶规则，可直接写出上述问题的对偶问题：

$$\min w = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leqslant 2 \\ y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geqslant 3 \\ -3y_1 + 4y_3 \geqslant -5 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \leqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \text{ 无限制} \end{cases}$$

第二节　线性规划的对偶理论

线性规划的对偶理论包括以下几个主要的基本定理：

定理 1(弱对偶定理)　设 X 和 Y 分别是原问题($\max z = CX$; $AX \leqslant b$; $X \geqslant 0$)和对偶问题($\min w = Yb$; $YA \geqslant C$; $Y \geqslant 0$)的可行解，则必有 $CX \leqslant Yb$。

证　由原问题和对偶问题的约束条件($AX \leqslant b$, $YA \geqslant C$ 及 $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$)不难得到

$$YAX \leqslant Yb, YAX \geqslant CX$$

则有
$$CX \leqslant YAX \leqslant Yb$$

即
$$CX \leqslant Yb$$

弱对偶定理说明，原问题的最大目标函数值肯定不大于对偶问题的最小目标函数值。这就给出了线性规划原问题与对偶问题之间界的关系：若原问题可行，其任意可行解 X 对应的目标函数值 CX 就提供了相应对偶问题的目标函数值的一个下界；反之，若对偶问题可行，它的任意可行解 Y 对应的目标函数值 Yb 则提供了其对应原问题的目标函数值的一个上界。弱对偶定理同时也说明，若原问题是极大化问题，则它的任一可行解对应的目标函数值不大于其对偶问题(最小化问题)的任一

可行解对应的目标函数值。

定理 2（对称性定理）　对偶问题的对偶是原问题。这一定理的内涵显而易见，证明从略。

定理 3（最优性定理）　设 X 和 Y 分别是原问题（$\max z=CX$；$AX\leqslant b$；$X\geqslant 0$）和对偶问题（$\min w=Yb$；$YA\geqslant C$；$Y\geqslant 0$）的可行解，若 $CX=Yb$，则 X,Y 分别是它们的最优解。

证　设 $\bar{X}$ 是原问题的任一可行解，由弱对偶定理可知 $C\bar{X}\leqslant Yb=CX$。故 X 为原问题的最优解，同理可证 Y 为对偶问题的最优解。证毕。

定理 4（对偶原理）　原问题 $\max z=CX$；$AX\leqslant b$；$X\geqslant 0$ 有最优解，则其对偶问题 $\min w=Yb$；$YA\geqslant C$；$Y\geqslant 0$ 一定有最优解，且二者的目标函数值相等。两者之间存在如下对应关系：

（1）原问题有最优解的充要条件是对偶问题有最优解。

（2）若原问题无界，则对偶问题不可行；若对偶问题无界，则原问题不可行。

（3）若 X^* 和 Y^* 分别是原问题和对偶问题的可行解，则它们分别为原问题和对偶问题的最优解的充要条件是 $CX^*=Y^*b$。

证　对应关系(1)先证必要性。由 $YA\geqslant C$ 得 $Y(B,N)\geqslant(C_B,C_N)$

即
$$(YB,YN)\geqslant(C_B,C_N)$$
有 $YB\geqslant C_B$。两边右乘 B^{-1}，得
$$Y\geqslant C_BB^{-1}$$

由于对偶问题属最小化问题，所以 $Y\geqslant C_BB^{-1}$ 必为对偶问题的最优解（这一结论也称为单纯形乘子的对偶定理）。

设 X^* 是原问题的最优解，B 是最优基，则由原问题的最优解条件 $C_B-C_BB^{-1}A\leqslant 0$ 和 $C_BB^{-1}\geqslant 0$，令 $Y=C_BB^{-1}$，得 $YA\geqslant C, Y\geqslant 0$。显然 Y 是对偶问题的一个可行解。再根据弱对偶定理，有 $CX^*\leqslant Yb$，即最小化问题对偶问题必存在一个下界，即 $\min Yb$ 必存在最优解。充分性的证明由对称性定理即可得到。

对应关系(2)用反证法证明。假定原问题无界但一定有可行解，根据弱对偶定理，对于原问题的一切可行解均有 $CX\leqslant Yb$，这表明原问题有上界，这与原问题无界的假设相矛盾。同时，根据弱对偶定理，若原问题无界，则对偶问题必无下界，因对偶问题属最小化问题，故必无可行解。

对应关系(3)的证明如下：

① 必要性。设 X^* 是原问题的最优解，B 是最优基，由弱对偶定理知：若 $Y=C_BB^{-1}$ 是对偶问题的可行解，则有 $CX^*\leqslant Yb$，由此不等式知若 Yb 存在最小值，其最小值为 CX^*；又根据定理 2-4(1)相应对偶问题有最优解 Y^*，即 YB 必存在最小值 $\min Yb=Y^*b$，所以 $CX^*=Y^*b$。

② 充分性。设 X^* 和 Y^* 分别是原问题和对偶问题的可行解，且满足 $CX^*=Y^*b$，于是根据弱对偶定理，对于原问题的任何可行解 X，存在 $CX\leqslant Y^*b=CX^*$。由于原问题属最大化问题，故 CX^* 必为最优值，即 X^* 为最优解。同理可证，Y^* 亦是对偶问题的最优解。原问题与对偶问题解的对应关系见表 2-2。

表 2-2　原问题与对偶问题解的对应关系

对应关系		对偶问题		
		有最优解	无界	无可行解
原问题	有最优解	一定	不可能	不可能
	无界	不可能	不可能	一定
	无可行解	不可能	一定	可能

定理 5（互补松弛定理）　如果 X 和 Y 分别为原问题和对偶问题的可行解，它们分别为原问题 $\max z=CX$；$AX\leqslant b$；$X\geqslant 0$ 及其对偶问题 $\min w=Yb$；$YA\geqslant C$；$Y\geqslant 0$ 最优解的充要条件是 $(C-YA)X=0$ 和 $Y(b-AX)=0$，即 $YX_S=0$；$Y_SX=0$（X_S 和 Y_S 为松弛变量）。

证 ① 必要性。对于对称型对偶问题，引入松弛变量 $X_S \geqslant 0$ 和 $Y_S \geqslant 0$ 后，原问题和对偶问题的约束方程变为

$$AX + X_S = b, YA - Y_S = C$$

即有

$$X_S = b - AX, Y_S = -(C - YA)$$

经变换得

$$YX_S = Y(b - AX), Y_S X = -(C - YA)X$$

若 X, Y 为最优解，由对偶定理得 $CX = Yb$，则有 $(YA - Y_S)X = Y(AX + X_S)$，即 $YX_S + Y_S X = 0$，也就是 $YX_S = 0, Y_S X = 0$。所以有 $(C - YA)X = 0, Y(b - AX) = 0$。

② 充分性。设 X 和 Y 分别为原问题和对偶问题的可行解，且满足 $(C - YA)X = 0$ 和 $Y(AX - b) = 0$，即得 $CX = YAX = Yb$。

由对偶原理可知，X 和 Y 必是原问题和对偶问题的最优解。互补松弛定理也称松紧定理，它描述了线性规划问题达到最优时，原问题(或对偶问题)的变量取值和对偶问题(或原问题)约束的松紧性之间的对应关系。我们知道，在一对互为对偶的线性规划问题中，原问题的变量和对偶问题的约束是一一对应的，原问题的约束和对偶问题的变量也是一一对应的。当线性规划问题达到最优时，不仅可以同时得到原问题与对偶问题的最优解，而且可以得到变量与约束之间的一种对应关系。互补松弛定理即揭示了这一点。

于是当线性规划达到最优时，有下列关系：

(1) 若原问题的某一约束为紧约束(松弛变量为零)，该约束对应的对偶变量应大于或等于零。

(2) 若原问题的某一约束为松约束(松弛变量大于零)，则对应的对偶变量必为零。

(3) 如果原问题的某一变量大于零，该变量对应的对偶约束为紧约束。

(4) 如果原问题的某一变量等于零，该变量对应的对偶约束可能是紧约束，也可能是松约束。

【例 2-2】 已知线性规划问题

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \leqslant 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 3 \\ x_j \geqslant 0 (j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

又已知其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5, Z = 5$。试用对偶理论解原问题。

解 其对偶问题为

$$\max w = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geqslant 2 & ① \\ y_1 - y_2 \geqslant 3 & ② \\ 2y_1 + 3y_2 \geqslant 5 & ③ \\ y_1 + y_2 \geqslant 2 & ④ \\ 3y_1 + y_2 \geqslant 3 & ⑤ \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

将 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$ 代入约束条件，得②③④为严格不等式，其对应的对偶松弛变量 $y_{s2}, y_{s3}, y_{s4} \neq 0$，由互补松弛定理得 $x_2 = x_3 = x_4 = 0$；又因为 $y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5 \neq 0$，由互补松弛定理得 $x_{s1} = x_{s2} = 0$，即原问题约束条件为严格等式，也就是 $x_1 + 3x_5 = 4; 2x_1 + x_5 = 3$，解得 $x_1^* = 1, x_5^* = 1$，故原问题的最优解为 $x^* = (1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$。

定理 6 原问题单纯形表的检验数行对应对偶问题的一个基本解。

该定理的进一步解释如下：

若原问题存在最优解，则原问题最优单纯形表的检验数行中，松弛变量或剩余变量的检验数对应对偶问题的最优解。

若原问题为 $\max z=CX;AX\leqslant b;X\geqslant 0$，且存在最优解，则其最优单纯形表可用表 2-3 描述，表中松弛变量对应的检验数为 $-C_BB^{-1}$。由对偶定理可知，该检验数就是其对偶问题的最优解。

若原问题为 $\min z=CX;AX\geqslant b;X\geqslant 0$，则其对偶问题 $\min w=Yb;YA\leqslant C;Y\geqslant 0$。若原问题存在最优解，用大 M 法(极小化为标准型)可得到如表 2-3 所示最优单纯形表。

表 2-3　最优单纯形表的一般形式

C		C_B	C_N	0	M	b
C_B	X_B	X_B	X_N	X_S	X_R	
C_B	X_B	I	$B^{-1}N$	$-B^{-1}$	B^{-1}	$B^{-1}b$
	$-z$	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	C_BB^{-1}	$-C_BB^{-1}+M$	$-C_BB^{-1}b$

表中，剩余变量的检验数为 C_BB^{-1}，人工变量的检验数为 $-C_BB^{-1}+M$。

设 $Y^*=C_BB^{-1}$，由于 $C-C_BB^{-1}\geqslant 0$，$C_BB^{-1}\geqslant 0$，所以 $Y^*\geqslant 0$，且 $Y^*A\leqslant C$，即 Y^* 为对偶问题的可行解。这样 $W^*=Y^*b=C_BB^{-1}b=z^*$。因此，C_BB^{-1} 为对偶问题的最优解。

【例 2-3】　对于下列线性规划问题的单纯形表，从表中找出对应对偶问题的最优解。

对于原问题：

$$\max z=50x_1+100x_2$$

$$\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 300\\2x_1+x_2\leqslant 400\\x_2\leqslant 250\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

其对偶问题为

$$\min w=300y_1+400y_2+250y_3$$

$$\begin{cases}y_1+2y_2\geqslant 50\\y_1+y_2+y_3\geqslant 100\\y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}$$

原问题的最优单纯形表如表 2-4 所示。

表 2-4　最优单纯形表

c_j		50	100	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
50	x_1	1	0	1	0	-1	50
0	x_4	0	0	-2	1	1	50
100	x_2	0	1	0	0	1	250
	$-z$	0	0	-50	0	-50	$-27\ 500$
对偶问题最优解				$-y_1^*$	$-y_2^*$	$-y_3^*$	

对应的对偶问题最优解列于表 2-4 中最后一行，表中 x_3,x_4,x_5 为松弛变量，原问题最优解为 $X^*=(50,250)^{\mathrm{T}}$，$z^*=27\ 500$。对偶问题的最优解为 $Y^*=(50,0,50)$，$w^*=27\ 500$。

【例 2-4】　对于下列线性规划问题的单纯形表，从表中找出对应对偶问题的最优解。

对于原问题：

$$\min z=2x_1+3x_2$$

$$\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 350\\x_1\geqslant 125\\2x_1+x_2\leqslant 600\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

其对偶问题为

$$\max w=350y_1+125y_2+600y_3$$

$$\begin{cases}y_1+y_2+2y_3\leqslant 2\\y_1+y_3\leqslant 3\\y_1,y_2\geqslant 0,y_3\leqslant 0\end{cases}$$

解　用以极小化为标准形式的单纯形法求得原问题的最优单纯形表如表 2-5 所示，对应的对偶问题最优解列于表中最后一行。

表 2-5 极小化形式的最优单纯形表

c_j		2	3	0	0	0	M	M	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3	x_2	0	1	-2	0	-1	2	0	100
2	x_1	1	0	1	0	1	-1	0	250
0	x_4	0	0	1	1	1	-1	-1	125
	$-z$	0	0	4	0	1	$-4+M$	M	-800
对偶问题最优解				y_1^*	y_2^*	$-y_3^*$	$-y_1^*+M$	$-y_2^*+M$	

表中 x_3,x_4 为剩余变量,x_5 为松弛变量。原问题最优解为 $X^*=(250,100)^{\mathrm{T}}$,$z^*=800$,对偶问题的最优解为 $Y^*=(4,0,-1)$,$w^*=800$。

从上述两个例子可以看出:对偶问题的最优解对应于原问题的最优单纯形表中松弛变量检验数的相反数或剩余变量的检验数。

第三节 对偶单纯形法

一、对偶单纯形法的基本思想

对偶单纯形法是用对偶原理求解原问题解的一种方法,而不是求解对偶问题解的单纯形法。与对偶单纯形法相对应,已有的单纯形法称为原始单纯形法。两种求解原问题的方法的主要区别在于:原始单纯形法在整个迭代过程中,始终保持原问题的可行性,即 $X=B^{-1}b\geqslant0$,达到最优解时检验数 $C-CB^{-1}A\leqslant0$ 为止,而 $C-CB^{-1}A\leqslant0$ 也就是 $C-YA\leqslant0$,即 $YA\geqslant C$,所以原始单纯形法实质就是在保证原问题可行的条件下向对偶问题可行的方向迭代。而对偶单纯形法在整个迭代过程中,始终保持对偶问题的可行性,即 $YA\geqslant C$,也始终保持所有检验数 $C-CB^{-1}A\leqslant0$,最后达最优解时 $X_B=B^{-1}b\geqslant0$ 即满足原问题的可行性为止,所以对偶单纯形法实质就是在保证对偶问题可行的条件下向原问题可行的方向迭代。总之,对偶单纯形法适应求解的线性规划问题是目标函数最大化(或最小化),价格向量 $C\leqslant0$(或 $C\geqslant0$),且属于初始可行基中有负单位基、约束条件是"$\geqslant$"形式。对此线性规划问题可不用人工变量法,而用对偶单纯形法,先给"$\geqslant$"形式的约束条件两边乘以-1,使约束条件变为"$\leqslant$"形式,然后加松弛变量即可得初始可行基 B。此时原问题存在一基本解 $X=B^{-1}b\leqslant0$,但它不是基可行解;检验数 $C-CB^{-1}A\leqslant0$(或$\geqslant0$)也就是满足 $YA\geqslant C$,即对偶问题存在可行解;再迭代保持检验数 $C-CB^{-1}A\leqslant0$(或$\geqslant0$),使 $X_B=B^{-1}b\geqslant0$,即原问题得到基可行解。由对偶定理可知,原问题得到最优解。以上即为对偶单纯形法的思路。对偶单纯形法与原始单纯形法相比有以下两个显著的优点:

(1) 初始解是非可行解。当检验数都非正时,可以进行基的变换,这时不需要引进人工变量,简化了计算。

(2) 对于变量个数多于约束方程个数的线性规划问题,采用对偶单纯形法计算量少。因此,对于变量较少、约束较多的线性规划问题,可用对偶单纯形法求解。

通过上面的说明,可以总结如下:

设 $X^{(0)}$ 为线性规划问题 $\max z=CX,AX=b,X\geqslant0$ 的一个基本解,若对应的检验数 $\sigma_j\leqslant0(j\in J)$,则称 $X^{(0)}$ 为该线性规划问题的一个正则解,相应的基称为正则基。正则解一般为非可行解,若正则解同时为可行解,则该正则解就是线性规划问题的最优解。由正则解的这一性质,就有与单纯形法基本思想对应的对偶单纯形法。

单纯形法的基本思想是:从一基可行解($B^{-1}b\geqslant0$)出发,在满足可行解的基础上,通过逐次基可

行解的转换，直至 $\sigma_j \leqslant 0(j \in J)$成立，即达到可行的正则解，从而判断是否得到最优解或无最优解。

对偶单纯形法的基本思想是：从一正则解($\sigma_j \leqslant 0(j \in J)$)出发，在满足正则解的基础上，通过逐次基转换，直至 $B^{-1}b \geqslant 0$ 成立，即达到满足正则解条件的可行解，从而判断是否得到最优解或无最优解。

二、对偶单纯形法的计算步骤

对偶单纯形法的一般计算步骤如下：

(1) 根据线性规划问题，列出初始单纯形表。检查 b 列的数字，若都为非负，并且检验数都为非正，则已得到最优解，停止计算；若 b 列的数字至少还有一个负分量，并且检验数都为非正，则进行以下计算。

(2) 确定换出变量。按 $\min\{b_i \mid b_i < 0, i=1,\cdots,m\} = b_r$，则 b_r 所在行对应的变量 x_r 为出基变量。若 b_r 所在行对应的 A 阵中各元素 $a_{rj} \geqslant 0, j=1,\cdots,n$，则问题无可行解，此时可停止计算；否则转入下一步。

(3) 基变量。由 $\theta = \min\{\sigma_j / a_{rj} \mid a_{rj} < 0, j \in J\} = \sigma_k / a_{rk}$，则对应的变量 x_k 为进基变量。

(4) 主元素按原单纯形法同样的方法进行迭代计算，得到新的单纯形表。

重复上述(1)～(4)步骤，直至获得最优解。

【例 2-5】 用对偶单纯形法求解下列线性规划。

$$\min z = 5x_1 + 2x_2 + 6x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geqslant 24 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 \geqslant 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 将问题改写成标准形式：

$$\max z = -5x_1 - 2x_2 - 6x_3$$
$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -24 \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_5 = -8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

显然，P_4, P_5 可构成现成的单位基，此时，非基变量在目标函数中的系数全为负数，因此 P_4, P_5 构成的就是初始正则基。整个问题的计算过程如表 2-6 所示。

表 2-6　对偶单纯形法计算过程

c_j		-5	-2	-6	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	-2	$[-4]$	-8	1	0	-24
0	x_5	-4	-1	-4	0	1	-8
	$-z$	-5	-2	-6	0	0	0
θ		$-5/-2$	$-2/-4$	$-6/-8$	0	0	
-2	x_2	1/2	1	2	$-1/4$	0	6
0	x_5	$-7/2$	0	$[-2]$	$-1/4$	1	-2
	$-z$	-4	0	-2	$-1/2$	0	120
θ		$-4/(-7/2)$	0	$-2/-2$	$(-1/2)/(-1/4)$	0	
-2	x_2	-3	1	0	$-1/2$	1	4
-6	x_3	7/4	0	1	1/8	$-1/2$	1
	$-z$	$-1/2$	0	0	$-1/4$	-1	14

最后一个单纯形表中，已得到一个可行的正则解，因而得到问题的最优解为 $X^*=(0,4,1)^{\mathrm{T}}$，最优值为 $z^*=14$。

使用对偶单纯形法在以下三种情况下较为方便：

(1) 对于形如 $\min z=CX;AX\geqslant b;X\geqslant 0$，且 $C\geqslant 0$ 的线性规划问题，因为可以将其改写为形如 $\max(-z)=-CX;-AX+X_S=-b;X\geqslant 0$ 的线性规划问题，所以可以立即得到初始正则解。

(2) 当变量多于约束条件时，对这样的线性规划问题用对偶单纯形法计算可以减少计算量。

(3) 在灵敏度分析中，有时需要用对偶单纯形法，这样可使问题的处理得以简化。

第四节　对偶问题的经济意义

一、影子价格

设 B 是 $\max z=\{CX\mid AX\leqslant b,X\geqslant 0\}$ 的最优解 z^* 对应的基，则有 $z^*=C_BB^{-1}b=Y^*b$，得

$$\frac{\partial z^*}{\partial b}=C_BB^{-1}=Y^*$$

这就是说，对偶问题最优解的经济意义是在其他条件不变的情况下，单位资源变化所引起的目标函数的最优值的变化。

【例 2-6】 某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ，Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台数及A，B两种原材料的消耗量如表 2-7 所示。该工厂每生产一件产品Ⅰ可获利润 2 元，每生产一件产品Ⅱ可获利润 3 元，应如何安排生产计划使该工厂获得的利润最大？

表 2-7　产品资源信息

资源	产品		资源限量
	Ⅰ	Ⅱ	
所需设备/台	1	2	8
原材料 A/千克	4	0	16
原材料 B/千克	0	4	12

运用单纯形法求解，得最优单纯形表如表 2-8 所示。

表 2-8　最优单纯形表

c_j		2	3	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	0	1/4	0	4
0	x_5	0	0	−2	1/2	1	4
3	x_2	0	1	1/2	−1/8	0	2
	$-z$	0	0	−3/2	−1/8	0	

由例 2-6 的最终单纯形表(表 2-8)可知，其对偶问题的最优解为 $y_1^*=1.5$，$y_2^*=0.125$，$y_3^*=0$。这说明在其他条件不变的情况下，若设备增加 1 台，该厂按最优计划安排生产可多获利润 1.5 元；原材料 A 增加 1 千克，可多获利润 0.125 元；原材料 B 增加 1 千克，对获利润无影响。y_i 的值代表对第 i 种资源的估价值，这种估价是针对具体工厂的具体产品而存在的一种特殊价格，称为影子价格。影子价格的经济意义如下：

(1) 在该厂现有资源和现有生产方案的条件下，设备的每小时租赁费为 1.5 元，1 千克原材料 A 的出让费为除成本外再加 0.125 元，1 千克原材料 B 可按原成本出让，这时该厂的收入与自己组织

生产时所获利润相等。

(2) 影子价格随具体情况而异。在完全市场经济的条件下，当某种资源的市场价格低于影子价格时，企业应买进该资源用于扩大生产；而当某种资源的市场价格高于影子价格时，企业的决策者应把已有的资源卖掉。可见，影子价格是企业根据市场价格变动调整企业生产计划的一个依据。

影子价格有如下特点：

(1) 影子价格的大小客观地反映了资源在系统内的稀缺程度。根据互补松弛定理的条件，若某一资源在系统内供大于求(即有剩余)，其影子价格(即对偶解)就为零。这一事实表明，增加该资源的供应不会引起系统目标的任何变化。如果某一资源是稀缺资源(即相应约束条件的剩余变量为零)，那么其影子价格必然大于零(非基变量的检验数为非零)。影子价格越高，资源在系统中越稀缺。

(2) 影子价格是一种边际价格，与经济学中所说的边际成本的概念类似，因而在经济管理中有重要的应用价值。

(3) 影子价格是对系统资源的一种最优估价，只有当系统达到最优时才能赋予该资源这种价值。因此，有人也把它称为最优价格。

(4) 影子价格的值与系统状态有关。系统内部资源数量、技术系数和价格的任何变化，都会引起影子价格的变化，所以它又是一种动态价格。

二、边际贡献

在单纯形迭代过程中，如果检验数 $C_N-C_BB^{-1}N>0$，根据目标函数的表达式，目标函数值的改善实际就取决于 X(迭代后将变为基变量)可能取值的大小，所以目标函数 z 也可看成非基变量 X_N 的函数，即 $z=f(X_N)$，求偏导得：

$$\frac{\partial z}{\partial X}=C_N-C_BB^{-1}N=\sigma$$

该式表明，检验数在数学上可以解释为非基变量的单位改变量引起目标函数的改变量。检验数可以表示为

$$\sigma=c_j-C_BB^{-1}p_j=c_j-Yp_j$$

已经知道，Y 是影子价格，p_j 是第 j 种产品对各种资源的消耗系数(即基中的第 j 列向量)，所以 Yp_j 可解释为按影子价格计算的产品成本。c_j 一般都是产品的边际价值即价格。因此，检验数即产品价格 c_j 与影子成本 Yp_j 的差额，在经济上就可以解释为产品对于目标函数的边际贡献，即增加该产品单位产量对目标函数能够带来的贡献。

检验数与每个变量相对应，当线性规划达到最优时，检验数总是小于或等于零(对于极大化问题)，这意味着在最优状态下，每个变量对于目标函数的边际贡献都小于或等于零。具体地讲，这分为两种情况：对基变量而言，根据互补松弛定理的条件，由于变量 $X>0$，故其对应的检验数必为零，所以基变量对于目标函数的贡献为零，这实际也就是等边际原理 MVP＝MIC。其中，MIC＝成本增量/产出增量，MVP＝价值产品增量/产出增量＝产品价格。按照等边际原理，只有在 MVP＝MIC 成立时，产品生产的规模才是最佳的(在这里给定的条件下，MIC＝0，因为资源给定，增加产出不涉及成本)。反过来，对于非基变量而言，由于检验数小于零，因而相应的变量只能取零值才能保证最优解条件的成立，也就是说，若某产品对目标函数的边际贡献小于零，则以不安排生产为宜。

由检验数所代表的边际贡献与影子价格具有相类似的特点：它是系统在达到最优时对变量价格的估量；其取值也受系统状态的影响，随系统状态的变化而变化。

对于目标函数极小化约束条件为“$\geqslant$”的问题：$\min z=CX, AX\geqslant b, X\geqslant 0$，其右端常数项可理解为需要完成的任务。因此，该类型线性规划一般是描述完成一定任务使耗费的资源最小的问题。此

时，其对偶问题的最优解 y_i^*（$i=1,\cdots,m$）表示第 i 种任务的边际成本，即单位任务增加引起的资源耗费的增加量。

【例 2-7】 某工厂使用某种原材料生产甲、乙两种产品。根据现有条件和市场预期，产品甲的产量不小于 100 单位，产品甲和产品乙的总产量不小于 250，每单位甲消耗原材料 2 单位，每单位乙消耗原材料 1 单位，产品甲和产品乙的生产成本分别是 50 元/单位和 80 元/单位，原材料总数量为 400 单位，问如何安排生产计划，使生产成本最小？

解 若 x_1, x_2 分别表示产品甲和产品乙的生产数量，则问题的线性规划模型为

$$\min z=50x_1+80x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 100 \\ x_1+x_2 \geqslant 250 \\ 2x_1+x_2 \leqslant 400 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用大 M 法（极小化为标准形式）求解问题的最优单纯形表如表 2-9 所示。

表 2-9 最优单纯形表

c_j		50	80	0	0	0	M	M	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
50	x_1	1	0	0	1	1	0	-1	150
80	x_2	0	1	0	-2	-1	0	2	100
0	x_3	0	0	1	1	1	-1	-1	50
	$-z$	0	0	0	110	30	M	$-110+M$	$-15\ 500$
				y_1^*	y_2^*	$-y_3^*$	y_1^*+M	y_2^*+M	

从表中可知，对偶问题的最优解为 $y_1^*=0$，$y_2^*=110$，分别表示每增加 1 单位的产品甲和 1 单位的总产量所增加的工厂的成本，即最优生产条件下的产品甲和总产量的边际成本。

三、对偶价格

无论对偶问题的最优解表示的是资源的影子价格还是任务的边际成本，只要为正，则表示右端常数项增加，目标函数也增加；若为负，则表示右端常数项增加，而目标函数减少。对于极大化的问题，目标函数值增加则表明目标函数得到改善；对于极小化问题，目标函数值减少则表明目标函数得到改善。为了二者的统一，线性规划问题某约束条件的右端常数项的单位增加量所引起的目标函数的改善量称为右端常数项的对偶价格。

因此，若对偶价格为正，则增加右端常数项，从而使目标函数值得到改善；若对偶价格为负，则增加右端常数项，目标函数值将会“恶化”。

根据对偶价格的定义，对于极大化的问题，对偶价格就等于其对偶问题的最优解；对于极小化问题，对偶价格就等于其对偶问题最优解的相反数。

【例 2-8】 求下列线性规划问题各约束条件的对偶价格。

$$\min z=2x_1+3x_2+4x_3$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \leqslant 120 \\ 2x_1+x_2+x_3 \geqslant 60 \\ x_1+2x_2+x_3=80 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

用大 M 法（极小化为标准形式）求得问题的最优单纯形表如表 2-10 所示。

表 2-10　最优单纯形表

c_j		2	3	4	0	0	M	M	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	0	0	1/3	1/3	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	220/3
2	x_1	1	0	1/3	$-2/3$	2/3	2/3	$-1/3$	40/3
3	x_2	0	1	1/3	1/3	$-1/3$	$-1/3$	2/3	100/3
	$-z$	0	0	0	1/3	1/3	$-1/3+M$	$-4/3+M$	$-380/3$
				7/3	y_1^*	y_2^*		$-y_3^*+M$	

因此，对偶问题的最优解为 a_{ij}，b_i，$c_j=0$，a_{ij}，b_i，$c_j=1/3$，a_{ij}，b_i，$c_j=4/3$。由于极小化问题，三个约束条件的对偶价格为对偶问题最优解的相反数，它们分别为 0，$-1/3$ 和 $-4/3$。即第二个约束条件的右端常数项增加 1 个单位，则目标函数值“恶化”1/3 个单位，即为 $380/3+1/3=381/3$；若第二个约束条件右端常数项减少 1 个单位，则目标函数值“改善”1/3 个单位，即为 $380/3-1/3=379/3$。对于第一个、第三个约束条件可做同样的分析。

第五节　灵敏度分析

前面讨论的线性规划问题中，a_{ij}，b_i，c_j 等都是常数，但实际上，这些系数往往是估计值、预测值或当前值，随着时间的推移，它们都可能发生变化。其中，a_{ij} 与企业技术水平有关，技术进步可能引起其变化；b_i 与资源数量结构有关；c_j 与市场有关，市场的波动可能引起其变化。这些系数的变化，都会影响企业的决策。灵敏度分析就是分析这些因素中的一个或几个的变化给生产决策带来的影响。灵敏度分析的内容如下：

（1）a_{ij}，b_i，c_j 中一个或几个发生某一具体变化时，线性规划问题的最优决策相应会发生什么样的变化。

（2）a_{ij}，b_i，c_j 在什么范围内变化，线性规划问题的最优解或最优基不变。

灵敏度分析一般是在已得到线性规划最优基的基础上进行的，现在假定一个线性规划已经求出其最优基，如果它的一个或几个系数发生变化，没有必要重新求解，只需要看改变后的系数是否破坏了最优性的条件。若最优性的条件仍然成立，则说明最优基的地位没有发生变化；若最优性条件不成立了，则说明原来的最优基的地位已经改变，在这种情况下要继续迭代，直至求出新的最优基。

假设表 2-12 中的基 B 就是最优基，现在讨论线性规划问题的各系数的变化会引起最优单纯形表的哪些部分发生变化。

表 2-11　单纯形表

C		C_B	C_N	0	b
C_B	X_B	X_B	X_N	X_S	
C_B	X_B	I	$B^{-1}N$	$-B^{-1}$	$B^{-1}b$
	$-z$	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	C_BB^{-1}	$-C_BB^{-1}b$

从表 2-11 中不难看出：

（1）b_i 的改变只会引起 $B^{-1}b$ 的改变。

（2）c_j 的改变只会引起检验数 $\sigma=(C_N-C_BB^{-1}N, -C_BB^{-1})$ 的改变。

（3）a_{ij} 的改变有两种情况：若 a_{ij} 属于 N 中某一非基向量中的一个元素，则其改变只会引起检验数的改变；若 a_{ij} 属于 B 中某一基向量中的一个元素，则 a_{ij} 的改变会引起 B^{-1} 的改变，从而引起检验数 $(C_N-C_BB^{-1}N, -C_BB^{-1})$ 和右端常数项 $B^{-1}b$ 的同时改变。

此系数的改变可能会出现表 2-12 中所列的情况，对这些情况也有相应的处理方法。

表 2-12 几种情况的处理方式

原问题	对偶问题	结论或处理方法
可行解	可行解	最优基不变
可行解	非可行解	单纯形法迭代求最优解
非可行解	可行解	对偶单纯形法迭代求最优解
非可行解	非可行解	引入人工变量，编制新的单纯形表，求最优解

灵敏度分析的任务就是研究 a_{ij}，b_i，c_j 这些数据的变化对最优解或最优基的影响，因为灵敏度分析是在已求得最优解的基础上进行分析，所以又称优化后分析。灵敏度分析的问题概括起来说就是：

(1) 为了保持现有最优解或最优基不变，找出这些数据变化的范围，即数据的稳定性区间。

(2) 当这些数据的变化超出了(1)的范围时，如何在原有最优解或最优基的基础上，做微小的调整，以尽快求出新的最优解或最优基。

从表 2-11 可以看出，有些数据只和表中的某些块有关，因而当这些数据发生变化时，只需对相应的某些块进行修改，便可得到新问题的单纯形表，从而能够进行判别和迭代，而不必从头开始计算线性规划问题，这正是单纯形法的优点之一。

如前所述，在实际问题中，下面这些数据或条件是会经常发生变化的：

价值系数 c_j；右端常数 b_i；技术系数 a_{ij}（包括增加新的变量和增加新的约束条件）。

下面将分别讨论这些变化对最优解或最优基的影响。

一、目标函数中价值系数 c_j 的变化分析

1. 非基变量 x_j 的价值系数 c_j 的变化

若对于最优基 B 而言，非基变量 x_j 的价值系数 c_j 改变为 $c'_j=c_j+\Delta c_j$，则变化后的检验数为

$$\sigma'_j=c_j+\Delta c_j-c_BB^{-1}P_j=\sigma_j+\Delta c_j$$

要持原最优解不变，则必须有 $\sigma'_j=c_j+\Delta c_j-c_BB^{-1}P_j=\sigma_j+\Delta c_j\leqslant 0$，由此导出 $\Delta c_j\leqslant -\sigma_j$，这就是保持原最优解不变时，非基变量 x_j 的目标系数变化范围。当超出这个范围时，原最优解将不再是最优解，为了求新的最优解，必须在原最优单纯形表的基础上继续迭代。

【例 2-9】 已知线性规划问题

$$\max z=x_1+5x_2+3x_3+4x_4$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+2x_4\leqslant 800\\5x_1+4x_2+3x_3+4x_4\leqslant 1\ 200\\3x_1+4x_2+5x_3+3x_4\leqslant 1\ 000\\x_j\geqslant 0(j=1,2,3,4)\end{cases}$$

的最优单纯形表如表 2-13 所示。

表 2-13 例 2-9 的最优单纯形表

c_j		1	5	3	4	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1/4	0	−13/4	0	1	1/4	−1	100
4	x_4	2	0	−2	1	0	1	−1	200
5	x_2	−3/4	1	11/4	0	0	−3/4	1	100
	$-z$	−13/4	0	−11/4	0	0	−1/4	−1	−1 300

(1) 为保持现有最优解不变，分别求非基变量 x_1, x_3 的系数 c_1, c_3 的变化范围。

(2) 当 c_1 变为 5 时，求新的最优解。

解　(1) 由表 2-13 可知 $\sigma_1=-\frac{13}{4}, \sigma_3=-\frac{11}{4}$，于是由保持原最优解不变时，非基变量 x_j 的目标系数变化范围公式 $\Delta c_j \leqslant -\sigma_j$ 知，要使现有最优解不变，必须有

$$\Delta c_1 \leqslant -\frac{13}{4}, \Delta c_3 \leqslant -\frac{11}{4}$$

即当

$$c_1' = c_1 + \Delta c_1 \leqslant 1 + \frac{13}{4} = \frac{17}{4}$$

$$c_3' = c_3 + \Delta c_3 \leqslant 3 + \frac{11}{4} = \frac{23}{4}$$

时，原最优解不变。

(2) 当 $c_1'=5>\frac{17}{4}$时，已超出了 c_1 的变化范围，最优解要发生变化，新的最优解可用以下的方法求得。首先求出新的检验数：

$$\sigma_1' = c_1' - C_B B^{-1} P_1 = 5 - (0,4,5)\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \frac{3}{4} > 0$$

故 x_1 应进基，用新的检验数 $\sigma_1'=3/4$ 代替原来的检验数 $\sigma_1=-13/4$，其余的数据不变，得新的单纯形表(见表 2-14)并继续迭代。

表 2-14　例 2-9 新的单纯形表

c_j		5	5	3	4	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1/4	0	−13/4	0	1	1/4	−1	100
4	x_4	2	0	−2	1	0	1	−1	200
5	x_2	−3/4	1	11/4	0	0	−3/4	1	100
	$-z$	3/4	0	−11/4	0	0	−1/4	−1	−1 300
0	x_5	0	0	−3	−1/8	1	1/8	−7/8	75
5	x_1	1	0	−1	1/2	0	1/2	−1/2	100
5	x_2	0	1	2	3/8	0	−3/8	5/8	175
	$-z$	0	0	−2	−3/8	0	−5/8	−5/8	−1 375

由表 2-14 可知，已经求得新的最优解为 $X^*=(100,175,0,0,75)^{\mathrm{T}}$，新的目标函数最优值为$z^*=1\ 375$。

2. 基变量 x_j 的价值系数 c_j 的变化

若对于最优基 B 而言，某个基变量 x_r 的价值系数 c_r 改变为 $c_r'=c_r+\Delta c_r$，因 $c_r \in c_B$，则

$$\begin{aligned}(C_B+\Delta C_B)B^{-1}A &= C_B B^{-1}A + (0,\cdots,\Delta c,\cdots,0)B^{-1}A \\ &= C_B B^{-1}A + \Delta c_r(a_{r1}', a_{r2}', \cdots, a_{rn}')\end{aligned}$$

其中$(a_{r1}', a_{r2}', \cdots, a_{rn}')$是矩阵 $B^{-1}A$ 的第 r 行。于是，变化后的检验数为

$$\sigma_j' = c_j - C_B B^{-1} P_j = \sigma_j + \Delta c_j - \Delta c_r a_{rj}' = \sigma_j - \Delta c_r a_{rj}' \ (j=1,2,\cdots,n)$$

若要求最优解不变，则必须满足下式，即

$$\sigma_j' = \sigma_j - \Delta c_r a_{rj}' \leqslant 0 \ (j=1,2\cdots,n)$$

由此可以导出：当 $a_{rj}'<0$ 时，有 $\Delta c_r \leqslant \sigma_j / a_{rj}'$；当 $a_{rj}'>0$ 时，有 $\Delta c_r \geqslant \sigma_j / a_{rj}'$。

因此，Δc_r 的允许范围是

$$\max_j\left\{\frac{\sigma_j}{a'_{rj}} \mid a'_{rj}>0\right\}\leqslant \Delta c_r \leqslant \min_j\left\{\frac{\sigma_j}{a'_{rj}} \mid a'_{rj}<0\right\}$$

在使用上述公式时，首先在最优表上查出基变量 x_r 所在行中的元素 $a'_{rj}(j=1,2,\cdots,n)$，而且只取与非基变量所在列相对应的元素，将其中的正元素放在不等式左边，负元素放在不等式右边，分别求出 Δc_r 的上下界。

【例 2-10】 利用表 2-15 中的数据，为使最优基变量(x_3,x_4,x_5)不变，Δc_4 的允许范围是

$$\max\left\{\frac{-\frac{13}{4}}{2},\frac{-\frac{1}{4}}{1}\right\}\leqslant \Delta c_4 \leqslant \min\left\{\frac{-\frac{11}{4}}{-2},\frac{-1}{-1}\right\}$$

即

$$-\frac{1}{4}\leqslant \Delta c_4 \leqslant 1$$

故当$-\frac{15}{4}\leqslant c_4 \leqslant 5$ 时，原最优解不变，现在 C_4 变为 6，已超过了 ΔC_4 的允许范围。

同样地，Δc_2 的允许范围是

$$\max\left\{\frac{-11/4}{11/4},\frac{-1}{1}\right\}\leqslant \Delta c_2 \leqslant \min\left\{\frac{-13/4}{-3/4},\frac{-1/4}{-3/4}\right\}$$

即

$$-1\leqslant \Delta c_2 \leqslant \frac{1}{3}$$

故当 $4\leqslant C_2 \leqslant 16/3$ 时，原最优解不变，现在 c_2 变为 2，也不在 Δc_2 的允许范围内。当 C_B 由(0，4，5)改变为(0，6，2)，即 c_4 变为 6，c_2 变为 2 时，都超过了它们的允许范围，需要求新的最优解。为此，用变换后的 C'_B代替 C_B，将表 2-14 改写并继续迭代，求得新的最优解，由表 2-15 可求得最优解为 $X^*=(0,0,0,300,200,0,100)^{\mathrm{T}}$，新的目标函数最优值为 $z^*=1\ 800$。

表 2-15 最优单纯形表

c_j		1	2	3	6	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1/4	0	−13/4	0	1	1/4	−1	100
6	x_4	2	0	−2	1	0	1	−1	200
2	x_2	−3/4	1	11/4	0	0	−3/4	1	100
	$-z$	−19/2	0	19/2	0	0	−9/2	4	−1 400
0	x_5	−1/2	1	−1/2	0	1	−1/2	0	200
6	x_4	5/4	1	3/4	1	0	1/4	0	300
0	x_7	−3/4	1	11/4	0	0	−3/4	1	100
	$-z$	−13/2	−4	−3/2	0	0	−3/2	0	−1 800

二、右端常数的灵敏度分析

由于 $X_B=B^{-1}b,z=C_BB^{-1}b$，所以右端常数 b_i 的变化会影响到原最优解的可行性与目标函数值。设某个右端常数 b_r 变为 $b'_r=b_r+\Delta b_r$，并假设原问题中的其他系数不变，则使最终表中原问题的解相应地变为 $X'_B=B^{-1}(b+\Delta b)$，其中 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_r,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，$\Delta b=(0,\cdots,\Delta b_r,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$。这时

$$X'_B=B^{-1}(b+\Delta b)=B^{-1}b+B^{-1}\Delta b=B^{-1}b+B^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \Delta b_r\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b'_1\\ \vdots\\ b'_i\\ \vdots\\ b'_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a'_{1r}\Delta b_r\\ \vdots\\ a'_{ir}\Delta b_r\\ \vdots\\ a'_{mr}\Delta b_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b'_1+a'_{1r}\Delta b_r\\ \vdots\\ b'_i+a'_{ir}\Delta b_r\\ \vdots\\ b'_m+a'_{mr}\Delta b_r\end{bmatrix}$$

其中$(a'_{1r},a'_{2r},\cdots,a'_{mr})^{\mathrm{T}}$为逆矩阵$B^{-1}$中的第$r$列。若要求最优基$B$不变，则必须有$X'_B\geqslant 0$，即

$$b'_i+a'_{ir}\Delta b_r\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$$

由此可导出：当$a'_{ir}>0$时，有$\Delta b_r\geqslant\frac{-b'_i}{a'_{ir}}$；当$a'_{ir}<0$时，有$\Delta b_r\leqslant\frac{-b'_i}{a'_{ir}}$。

因此，Δb_r的允许变化范围是

$$\max\left\{-\frac{b'_i}{a'_{rj}}\mid a'_{rj}>0\right\}\leqslant\Delta b_r\leqslant\min\left\{\frac{b'_r}{a'_{rj}}\mid a'_{rj}<0\right\}$$

当b改变为$b+\Delta b$后，若最优基不变，则目标函数变为

$$z'=C_BB^{-1}(b+\Delta b)=z^*+C_BB^{-1}\Delta b$$

在使用上述公式时，首先要在最优表中查最优基B的逆矩阵B^{-1}。若要分析b_r，则只需将B^{-1}的第r列中的正元素放在不等式左边，负元素放在不等式右边，再求出Δb_r的上下界。

【例 2-11】 在例 2-10 中：

(1) 为保持现有最优解不变，分别求b_1,b_2,b_3的允许变化范围。

(2) 如果b_3减少 150，验证原最优解是否可行？如果不可行，求出改变后的最优解及最优值。

解　(1)由下列公式及表 2-15 中的数据，可得

$$\max\left\{-\frac{b'_i}{a'_{rj}}\mid a'_{rj}>0\right\}\leqslant\Delta b_r\leqslant\min\left\{\frac{b'_r}{a'_{rj}}\mid a'_{rj}<0\right\}$$

$$\max\left\{-\frac{100}{1}\right\}\leqslant\Delta b_1<+\infty,\text{即}-100\leqslant\Delta b_1<+\infty$$

这是因为在

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1/4 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -3/4 & 1\end{bmatrix}$$

中第 1 列只有一个非零元素 1，故Δb_1的上界无限制。

同理可得

$$\max\left\{-\frac{100}{1/4},-\frac{200}{1}\right\}\leqslant\Delta b_2<\min\left\{-\frac{100}{-3/4}\right\}$$

$$-200\leqslant\Delta b_2\leqslant\frac{400}{3}$$

$$\max\left\{-\frac{100}{1}\right\}\leqslant\Delta b_3<\min\left\{-\frac{100}{-1},-\frac{200}{-1}\right\}$$

$$-100\leqslant\Delta b_3\leqslant 100$$

(2)当$\Delta b_3=-150$时，已超过了Δb_3的变化范围$[-100,100]$，因而原最优基不可行，又

$$X'_B=\begin{bmatrix}x_5\\ x_4\\ x_2\end{bmatrix}=B^{-1}(b+\Delta b)=\begin{bmatrix}1 & 1/4 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -3/4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800\\ 1\,200\\ 850\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}250\\ 350\\ -50\end{bmatrix}$$

及

$$z'=C'_BB^{-1}(b+\Delta b)=(0,4,5)\begin{bmatrix}250\\ 350\\ -50\end{bmatrix}=1\,150$$

用这些数据去替换表 2-13 中的相应数据，其余数据不变，得表 2-16，用对偶单纯形法进行迭代得最优单纯形表，从而求得最优解。

表 2-16 最优单纯形表

c_j		1	5	3	4	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1/4	0	−13/4	0	1	1/4	−1	250
4	x_4	2	0	−2	1	0	1	−1	350
5	x_2	−3/4	1	11/4	0	0	−3/4	1	−50
	$-z$	−13/4	0	−11/4	0	0	−1/4	4	−1 150
0	x_5	1/4	1/3	−7/3	0	1	0	−2/3	700/3
4	x_4	1	4/3	5/3	1	0	0	1/3	850/3
0	x_6	1	−4/3	−11/3	0	0	1	−4/3	200/3
	$-z$	−3	−1/3	−11/3	0	0	0	−4/3	−3 400/3

求得最优解为

$$X^*=\left(0,0,0,\frac{850}{3},\frac{700}{3},\frac{200}{3},0\right)^{\mathrm{T}}$$

目标函数最优值为 $z^*=\frac{3\,400}{3}$。

三、技术系数的灵敏度分析

企业里设备、工艺、技术和管理等方面的改进和提高，都可能引起资源消耗量的改变，这些改变反映到线性规划模型中就是技术系数 a_{ij} 的改变。根据变动的系数 a_{ij} 处于矩阵中的哪一列又可分为两种情况来考虑：一是 a_{ij} 处于非基变量列中；二是 a_{ij} 处于基变量列中。这种灵敏度分析比较复杂，讨论如下几种情况：

1. 非基变量 x_j 的系数列向量 P_j 的变化

对最优基 B 而言，非基变量 x_j 的系数列向量 P_j 改变为 $P'_j=P_j+\Delta P_j$，则变化后的检验数为

$$\sigma'_j=c_j-C_BB^{-1}P'_j=c_j-C_BB^{-1}(P_j+\Delta P_j)=\sigma_j-Y\Delta P_j\ (j=1,2,\cdots,n)$$

要使最优基 B 的地位不变，应有 $\sigma_j-Y\Delta P_j\leqslant 0$，即 $Y\Delta P_j\geqslant\sigma_j$。

特别地，当 $\Delta P_j=(0,\cdots,\Delta a_{ij},\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 时，可得到

$$(y_1,\cdots,y_i,\cdots,y_m)\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \Delta a_{ij}\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=y_i\Delta a_{ij}\geqslant\sigma_j$$

由此可导出：当 $y_i>0$ 时，有 $\Delta a_{ij}\geqslant\frac{\sigma_j}{y_i}$；当 $y_i<0$ 时，有 $\Delta a_{ij}\leqslant\frac{\sigma_j}{y_i}$。

2. 基变量 x_j 的系数列向量 P_j 的变化

对于最优基 B 而言，当基变量 x_j 的系数列向量 P_j 发生变化时，对基 B 及其逆矩阵 B^{-1} 都有影响，即不但影响现行的最优解的可行性，也影响它的最优性，从而影响到单纯形表的每一列，一般要重新迭代。

【例 2-12】 在例 2-10 中：

(1) 为保持现有最优解不变，分别求非基变量 x_1，x_3 的系数的变化范围。

(2) 若非基变量 x_3 的系数由(1,3,5)变为(1,4,1)，考察原最优解是否仍然保持最优？若不是，该如何处理？

解 (1) 由最优单纯形表可以查得 $y_1=0$，$y_2=1/4$，$y_3=1$，且 $y_2>0$，故

$$\Delta a_{21} \geqslant \frac{\sigma_1}{y_2} = \frac{-13/4}{1/4} = -13, \Delta a_{31} \geqslant \frac{\sigma_1}{y_3} = \frac{-13/4}{1} = -\frac{13}{4}$$

$$\Delta a_{23} \geqslant \frac{\sigma_3}{y_2} = \frac{-11/4}{1/4} = -11, \Delta a_{33} \geqslant \frac{\sigma_3}{y_3} = \frac{-11/4}{1} = -\frac{11}{4}$$

（2）当 x_3 的系数由(1,3,5)变为(1,4,1)时，显然有

$$\Delta P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

则

$$Y\Delta P_3 = \left(0, \frac{1}{4}, 1\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = -\frac{15}{4} < -\frac{11}{4} = \sigma_3$$

即原最优解不再是最优解。为了求新的最优解，应先求新的检验数：

$$\sigma_3' = c_3 - C_B B^{-1} P_3' = 3 - \left(0, \frac{1}{4}, 1\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

用它去替换表 2-15 中的第 3 列，得表 2-17。

表 2-17 最优单纯形表

c_j		1	5	3	4	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1/4	0	1	0	1	1/4	−1	100
4	x_4	2	0	3	1	0	1	−1	200
5	x_2	−3/4	1	−2	0	0	−3/4	1	100
	$-z$	−13/4	0	1	0	0	−1/4	−1	−1 300
0	x_5	−5/12	0	0	−1/3	1	−1/12	−2/3	100/3
3	x_3	2/3	0	1	1/3	0	1/3	−1/3	200/3
5	x_2	7/12	1	0	2/3	0	−1/12	1/3	700/3
	$-z$	−47/12	0	0	−1/3	0	−7/12	−2/3	−4 100/3

通过表 2-17 求得最优解为 $X^* = \left(0, \frac{700}{3}, \frac{200}{3}, 0, \frac{100}{3}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$，最优值为 $z^* = 4\ 100/3$。

【例 2-13】 在例 2-10 中，若基变量 x_2 的技术系数列向量由 $P_2 = (3,4,4)^{\mathrm{T}}$ 变为 $P_2' = (4,5,6)^{\mathrm{T}}$，而它在目标函数中的系数由 $c_2 = 5$ 变为 $c_2' = 6$，试求变化后的最优解。

解 为便于利用最优单纯形表进行分析，首先要计算在最终表中对应于 x_2 的列向量：

$$B^{-1} P_2' = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 \\ -1 \\ 9/4 \end{bmatrix}$$

同时计算出 x_2 的检验数：

$$\sigma_2' = c_2' - C_B B^{-1} P_2' = 6 - (0,4,6) \begin{bmatrix} -3/4 \\ -1 \\ 9/4 \end{bmatrix} = -\frac{7}{2}$$

由于数据发生了变化，在最终表上，原基变量 x_2 的系数列向量不再是单位列向量，检验数也不再为零，但如果仍然想保持原最优基不变，即还是把 x_2 作为基变量看待，则须将以上计算结果填入最终表 x_2 的列向量位置，得表 2-18。

表 2-18 增加一列的单纯形表

c_j		1	6	3	4	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1/4	−3/4	−13/4	0	1	1/4	−1	100
4	x_4	2	−1	−2	1	0	1	−1	200
6	x_2	−3/4	9/4	11/4	0	0	−3/4	1	100
	$-z$	−5/2	−7/2	−11/2	0	0	−1/2	−2	−1 400

表 2-18 并不是一个正规的单纯形表。因为没有单位矩阵，为了得到一个单位矩阵，注意到 x_2 仍为第 3 个基变量，故必须将 x_2 所在列变成单位列向量 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，同时将 σ'_2 由 $-7/2$ 变为 0，即以 $a'_{32}=9/4$ 为主元进行矩阵的初等变换(这种变换没有换基，x_2 仍为基变量)，得表 2-19。

表 2-19 最优单纯形表

c_j		1	6	3	4	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	0	0	−7/3	0	1	0	−2/3	400/3
4	x_4	5/3	0	−7/9	1	0	2/3	−5/9	2 200/9
6	x_2	−1/3	1	11/9	0	0	−1/3	4/9	400/9
	$-z$	−11/3	0	−11/9	0	0	−2/3	−4/9	−11 200/9

由表 2-19 求得新的最优解为 $X^*=\left(0,\frac{400}{9},0,\frac{2\,200}{9},\frac{400}{3},0,0\right)^{\mathrm{T}}$，最优值为 $z^*=11\,200/9$。

3. 增加新变量的灵敏度分析

企业开发新产品，反映到线性规划模型中就相当于增加新的变量，并把新增的变量所消耗的各种资源量作为一列向量，代入原最优单纯形表中求新的最优解。

如果增加一个新的变量 x_{n+1}，它对应的价值系数为 c_{n+1}，在约束矩阵中的对应系数列向量为 $P_{n+1}=(a_{1,n+1},a_{2,n+1},\cdots,a_{m,n+1})^{\mathrm{T}}$，那么把 x_{n+1} 看成非基变量，在原来的最优单纯形表中增加一列：

$$P'_{n+1}=B^{-1}P_{n+1}=\begin{bmatrix}a'_{1,n+1}\\a'_{2,n+1}\\\vdots\\a'_{m,n+1}\end{bmatrix}$$

及检验数 $\sigma_{n+1}=c_{n+1}-C_BB^{-1}P_{n+1}$，就得到了新问题的单纯形表。若 $\sigma_{n+1}\leqslant 0$，则原问题最优解不变；否则，可继续用单纯形法迭代求解。

【例 2-14】 在例 2-10 中新增一个决策变量 x_8(相当于生产计划中增加一种新产品)，已知价值系数 $c_8=7$，技术系数 $P_8=(3,2,5)^{\mathrm{T}}$，问该产品是否值得投产？如果值得投产，求新的最优解。

解

$$P'_{n+1}=B^{-1}P_{n+1}=\begin{bmatrix}a'_{1,n+1}\\a'_{2,n+1}\\\vdots\\a'_{m,n+1}\end{bmatrix}=P'_8=B^{-1}P_8=\begin{bmatrix}1&1/4&-1\\0&1&-1\\0&\frac{-3}{4}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3/2\\-3\\7/2\end{bmatrix}$$

并求检验数：

$$\sigma_8=c_8-C_BB^{-1}P_8=7-(0,4,5)\begin{bmatrix}-3/2\\-3\\7/2\end{bmatrix}=\frac{3}{2}>0$$

故 x_8 可以进基，即新产品可以投产。为求新的最优解，在原最优单纯形表的基础上再增加一列 x_8，将 P'_8 及 σ_8 填在相应位置，经过换基运算，得表 2-20，从而求得最优解。

表 2-20　加入新变量的最优单纯形表

c_j		1	5	3	4	0	0	0	5	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	x_5	1/4	0	−13/4	0	1	1/4	−1	−3/2	100
4	x_4	2	0	−2	1	0	1	−1	−3	200
5	x_2	−3/4	1	11/4	0	0	−3/4	1	7/2	100
	$-z$	−13/4	0	−11/4	0	0	−1/4	−1	3/2	−1 300
0	x_5	−1/14	3/7	−29/14	0	1	−1/14	−4/7	0	1 000/7
4	x_4	19/14	6/7	5/14	1	0	5/14	−1/7	0	2 000/7
7	x_8	−3/14	2/7	11/14	0	0	−3/14	2/7	1	200/7
	$-z$	−41/14	−3/7	−55/14	0	0	1/14	−10/7	0	−9 400/7
0	x_5	1/5	3/5	−2	1/5	1	0	−3/5	0	200
0	x_6	19/5	12/5	1	14/5	0	1	−2/5	0	800
7	x_8	3/5	4/5	1	3/5	0	0	1/5	1	200
	$-z$	−16/5	−3/5	−4	−1/5	0	0	−7/5	0	−1 400

从表 2-20 可以得出最优解 $X^*=(0,0,0,0,200,800,0,200)^{\mathrm{T}}$，最优值为 $z^*=1\ 400$。

4. 增加新约束条件的灵敏度分析

生产中增加加工工序，反映在线性规划模型中即相当于增加新的约束条件，对这种情况下的灵敏度分析，一般可先将求出的最优解代入新增加的约束条件，若满足该约束条件，则最优解不变；否则，需将新增加的约束条件加到原先得到的最优单纯形表中，进行调整求解。在迭代求解过程中，根据需要可以采用单纯形法或对偶单纯形法及引入人工变量等方法。

若在原线性规划问题中，再增加一个新的约束条件：$a_{m+1,1}x_1+a_{m+1,2}x_2+\cdots+a_{m+1,n}x_n\leqslant b_{m+1}$，其中 $a_{m+1,j}(j=1,2,\cdots,n)$ 及 b_{m+1} 均为已知常数，则首先把已求得的原问题的最优解 $X^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$ 代入新的约束条件中，若满足，则原问题的最优解 X^* 仍为新问题的最优解，计算停止；若不满足，则新的约束条件加入系统，继续求解。具体做法是在原最优单纯形表上增加一行和一列，增加的行中以 x_{n+1}(松弛变量)为基变量，并在变量 x_j 下面填入 $a_{m+1,j}(j=1,2,\cdots,n)$；增加的列 P_{n+1} 是一个单位列向量，它的最下面的一个元素为 1，其余元素均为 0(包括 $\sigma_{n+1}=0$)，这样增加一行以后，可能破坏了原最优表上的单位矩阵(最优基)，要用矩阵的初等行变换将原单位矩阵恢复，然后继续迭代求解。

增加等式约束条件，一般将使约束矩阵的秩增加，故需增加基变量。显然，增加一个不等式约束也可以看作是一增加一个等式约束，但是，此时引入的松弛变量 x_{n+1} 正好成为基变量，故可立即得到新问题的一个正则解，而增加一个等式约束时，没有明显的可添加的基变量，故需引入人工变量 x_{n+1} 作为基变量，再用大 M 法或两阶段法将它剔除。

【例 2-15】　在例 2-10 中增加一个新的约束条件

$$4x_1+2x_2-2x_3+4x_4\leqslant 600$$

问原最优解能否仍然保持？若不能，则求出新的最优解。

解　引入松弛变量 x_8，在表 2-15 中增加一行和一列，将有关数据填入，得到表 2-21。

表 2-21 增加约束条件的最优单纯形表

c_j		1	5	3	4	0	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	x_5	1/4	0	−13/4	0	1	1/4	−1	0	100
4	x_4	2	0	−2	1	0	1	−1	0	200
5	x_2	−3/4	1	11/4	0	0	−3/4	1	0	100
0	x_8	4	2	−2	4	0	0	0	1	600
	$-z$	−13/4	0	−11/4	0	0	−1/4	−1	0	−1 300
0	x_5	1/4	0	−13/14	0	1	1/4	−1	0	100
4	x_4	2	0	−2	1	0	1	−1	0	200
5	x_2	−3/4	1	11/14	0	0	−3/4	1	1	100
0	x_8	−5/2	0	1/2	0	0	−5/2	2	0	−400
	$-z$	−13/4	0	−11/14	0	0	−1/4	−1	0	−1 300
0	x_5	0	0	−16/5	0	1	0	−4/5	1/10	60
4	x_4	1	0	−9/5	1	0	0	−1/5	2/5	40
5	x_2	0	1	13/5	0	0	0	2/5	−3/10	220
0	x_6	1	0	−1/5	0	0	1	−4/5	−2/5	160
	$-z$	−3	0	−14/5	0	0	0	−6/5	−1/10	−1 260

表 2-21 并不是正规的单纯形表，因为将新约束条件的系数填入基变量 x_8 所在的行以后，破坏了原来的单位矩阵(最优基)。为了恢复原来的单位矩阵，需要用矩阵的初等行变换将单位列向量中新出现的非零元素变为零，这样得出的单纯形表，然后用对偶单纯法继续迭代，得出最优解为 $X^*=(0,220,0,40,60,16,0,0)^T$，最优值为 $z^*=1\ 260$。

5. *几个系数同时变化的灵敏度分析*

关于 C_j 和 b_j 的灵敏度分析，都是在其他条件不变，某个单变量系数变化时所进行的分析。所有以上的目标函数系数及约束条件右端项的灵敏度计算公式只适用于单个系数变化的情况，当两个或更多的系数都发生变化时，则可采用所谓的百分之一百法则。

百分之一百法则是使最优基不变的单个系数的变化范围，即各单个系数的当前值、下限值和上限值。对于给定的线性规划模型，这些计算均可借助计算机软件进行，利用软件很容易得到线性规划问题的最优解、各单个系数变化的上限值和下限值、各约束条件的对偶价格等。另外，在熟悉和掌握了线性规划的求解方法和灵敏度分析的计算公式的基础上，自己编制计算机软件也不是一件困难的事。

百分之一百法则的原理如下：

(1) 对于所有变化的目标函数系数，当其所有允许增加百分比和允许减少百分比之和不超过100%时，则最优解不变。

(2) 对于所有变化的右端常数项，当其所有允许增加百分比和允许减少百分比之和不超过100%时，则对偶价格不变。

其中：

允许增加百分比=(变化值−当前值)/(上限−当前值)×100%

允许减少百分比=(当前值−变化值)/(当前值−下限)×100%

【例 2-16】 某工厂在计划期内要安排生产甲、乙两种产品，已知生产一件产品所消耗的 A,B,C 三种原材料的数量及单位产品的利润如表 2-22 所示。

表 2-22　资源消耗及原材料状况

原材料	产品		资源限量/千克
	甲	乙	
A	1	3	90
B	2	1	80
C	1	1	45
单位产品利润(千元/件)	5	4	

关于价格系数的单个系数变化的上限值与下限值及右端常数项的对偶价格,并对多个系数变化进行百分之一百分析。

解　若 x_1,x_2 分别表示工厂生产甲、乙产品的数量,则使工厂获得最大利润的生产计划的数学模型为

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 90 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 80 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

利用软件计算最优解如下:

目标函数最优值:215			
变量	最优解	检验数	
x_1	35	0	
x_2	10	0	
约束条件	松弛/剩余变量	对偶价格	
1	25	0	
2	0	1	
3	0	3	
目标函数系数范围:			
变量	下限	当前值	上限
x_1	4	5	8
x_2	2.5	4	5
右端常数项范围:			
约束条件	下限	当前值	上限
1	65	90	无上限
2	67.5	80	90
3	40	45	50

上述计算结果说明:

(1) 在现有条件下,工厂生产甲产品 35 件、乙产品 10 件,获得最大利润 215 000 元。

(2) 第一个约束条件的松弛变量为 25,说明资源 A 有剩余,剩余量为 25 千克;第二、三个约束条件的松弛变量为 0,说明资源 B,C 已用完。

(3) 第一个约束条件的对偶价格为 0,说明资源在一定的范围内变化,工厂的利润不会发生变化;第二、三个约束条件的对偶价格分别为 1 和 3,说明增加资源 B 或 C,目标函数会得到改善,即工

厂的利润会增加。而且增加 1 千克的资源 B,工厂利润增加 1 000 元;增加 1 千克的资源 C,工厂利润增加 3 000 元。

(4) 若变量 x_1 的价格系数在 4 到 8 之间变化,x_2 的价格系数不变,则问题的最优生产计划不变;若变量 x_2 的价格系数在 2.5 到 5 之间变化,x_1 的价格系数不变,则问题的最优生产计划不变。

(5) 若资源 A 的数量在 65 到∞之间变化,其他资源的数量不变,则资源 A 的对偶价格不变;若资源 B 的数量在 67.5 到 90 之间变化,其他资源的数量不变,则资源 B 的对偶价格不变;若资源 C 的数量在 40 到 50 之间变化,其他资源的数量不变,则资源 C 的对偶价格不变。

利用上述计算结果进行多个系数变化的分析:

(1) 若 C_1 从 5 增加到 6.5,C_2 从 4 减少到 3,试分析最优解是否会发生变化。

C_1 的允许增加百分比=(6.5−5)/(8−5)=50%

C_2 的允许减少百分比=(4−3)/(4−2.5)≈66.67%

因为 C_1,C_2 变化的百分比之和(50%+66.67%)大于 100%,因此,最优解要发生变化。

(2) 若 b_1 从 90 增加到 120,b_2 从 80 减少到 75,b_3 从 45 增加到 47,试分析对偶价格是否会发生变化。

$$b_1\text{ 允许增加的百分比}=(120-90)/(\infty-90)=0\%$$

$$b_2\text{ 允许减少的百分比}=(80-75)/(80-67.5)=40\%$$

$$b_3\text{ 允许增加的百分比}=(47-45)/(50-45)=40\%$$

因为 b_1,b_2,b_3 变化的百分比之和小于 100%,因此,该问题的对偶价格不变。

第六节 参数线性规划

在线性规划的实际应用中,由于某种原因,有时线性规划问题的目标函数系数和约束条件的右端常数会随着某个参数而连续变化。例如,在制定生产计划时,产品的价格会由于原材料的供应价格的波动而波动,这样,代表总利润的目标函数中的价格系数便会随着某个参数而改变;又如,在同样的问题中,由于供应原材料的厂家的生产发生变化,原材料的限制量产生波动,那么约束条件的右端常数项也随着某个参数而有所改变,这种问题用灵敏度分析的方法处理是很不方便的,因为灵敏度分析是研究单个数据变化时,对最优解产生的影响,而当数据随着某个参数而连续变化时,研究它们对最优解的影响,则是参数线性规划所讨论的问题。但是,由于这两种方法都是讨论数据的变化对最优解的影响,因而它们分析和处理问题的方法有许多相似之处。因为参数规划是研究这些参数中某一参数连续变化时,使最优解发生变化的各临界点的值。即把某一参数作为参变量,而目标函数在某区间内是这个参变量的线性函数,含这个参变量的约束条件是线性等式或不等式。因此,仍可用单纯形法和对偶单纯形法分析参数线性规划问题,其步骤如下:

(1) 对含有某参变量 λ 的参数线性规划问题,先令 $\lambda=0$,用单纯形法求出最优解。

(2) 用灵敏度分析法,将参变量 λ 直接反映到最终表中。

(3) 当参变量 λ 连续变大或变小时,观察 b 列和检验数行各数字的变化。若在 b 首先出现某负值时,则以它对应的变量为换出变量,于是用对偶单纯形法迭代一步。若在检验数行首先出现某正值时,则以它对应的变量为换入变量,用单纯形法迭代一步。

(4) 在经迭代一步后得到的新表上,令参变量 λ 继续变大或变小,重复步骤(3),直到 b 不能再出现负值,检验数行不能再出现正值为止。

一、目标函数的系数含有参数的线性规划问题

【例 2-17】 求解参数规划问题

$$\max z=(3-6\lambda)x_1+(2-5\lambda)x_2+(5+2\lambda)x_3$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\leqslant 430 \\ 3x_1+2x_3\leqslant 460 \\ x_1+4x_2\leqslant 420 \\ x_j\geqslant 0\ (j=1,2,3) \end{cases}$$

解　首先求解 $\lambda=0$ 的线性规划问题，得最优单纯形表(见表 2-23)；再在最优表中增加 c_j' 和 z' 两行及 C_B' 列得到扩充的单纯形表，如表 2-24 所示。

表 2-23　最优单纯形表

c_j		3	2	5	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_2	−1/4	1	0	1/2	−1/4	0	100
5	x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	x_6	2	0	0	−2	1	1	20
	$-z$	−4	0	0	−1	−2	0	−1 350

表 2-24　扩充的单纯形表

c_j'			−6	−5	2	0	0	0	b
c_j			3	2	5	0	0	0	
C_B'	C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
−5	2	x_2	−1/4	1	0	1/2	−1/4	0	100
2	5	x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	0	x_6	2	0	0	−2	1	1	20
$-z$			−4	0	0	−1	−2	0	−1 350
$-z'$			−41/4	0	0	5/2	−9/4	0	40

为使表 2-23 的最优解仍为参数规划的最优解，由最优解的条件，有

$$\begin{cases} \sigma_1(\lambda)=\sigma_1+\lambda\sigma_1'=-4-\dfrac{41}{4}\lambda\leqslant 0 \\ \sigma_4(\lambda)=\sigma_4+\lambda\sigma_4'=-1+\dfrac{5}{2}\lambda\leqslant 0 \\ \sigma_5(\lambda)=\sigma_5+\lambda\sigma_5'=-2-\dfrac{9}{4}\lambda\leqslant 0 \end{cases}$$

于是可得基 B 的下特征数和上特征数：

$$\bar{\lambda}_B=\min\left\{-\frac{-1}{5/2}\right\}=\frac{2}{5}\qquad \underline{\lambda}_B=\max\left\{-\frac{-4}{-41/4},-\frac{-2}{-9/4}\right\}=-\frac{16}{41}$$

即对于 $\left[-\dfrac{16}{41},\dfrac{2}{5}\right]$ 上的任意一个 λ 值，参数规划的最优解是 $X^*=(0,100,230,0,0,20)^{\mathrm{T}}$，最优值是 $z^*=1\,350-40\lambda$。

再讨论 $\lambda>\dfrac{2}{5}$ 的情形。由最优解的检验数公式可知，非基变量 x_4 对应的检验数 $\sigma_4(\lambda)>0$，使表 2-24 不再是最优表，应取 x_4 为进基变量；又根据最小比值法则，应取 x_2 为出基变量，继续进行换基迭代，得表 2-25。

表 2-25 第一次迭代的单纯形表

c'_j			-6	-5	2	0	0	0	b
c_j			3	2	5	0	0	0	
C'_B	C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	x_4	$-1/2$	2	0	1	$-1/2$	0	200
2	5	x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	0	x_6	1	4	0	0	0	1	420
$-z$			$-9/2$	2	0	0	$-5/2$	0	$-1\ 150$
$-z'$			-9	-5	0	0	-1	0	-460

为使表 2-25 中的最优解 $X^*=(0,0,230,200,0,420)^{\mathrm{T}}$ 仍为参数规划问题的最优解，计算下特征数和上特征数：

$$\bar{\lambda}_B=+\infty \qquad \underline{\lambda}_B=\max\left\{-\frac{-9/2}{-9},-\frac{2}{-5},-\frac{-5/2}{-1}\right\}=\frac{2}{5}$$

即对于$\left[\frac{2}{5},+\infty\right]$上的任意一个 λ 值，参数规划的最优解都是 $X^*=(0,0,230,200,0,420)^{\mathrm{T}}$，最优值是 $z^*=1\ 150+460\lambda$。

再讨论 $\lambda<-16/41$ 的情形。这时由检验数可知，非基变量 x_1 对应的检验数 $\sigma_1(\lambda)>0$，使得表 2-25不再是最优表，应取 x_1 为进基变量，再根据最小比值法则知，应取 x_6 为出基变量，进行换基迭代，得表 2-26。

表 2-26 第二次迭代的单纯形表

c'_j			-6	-5	2	0	0	0	b
c_j			3	2	5	0	0	0	
C'_B	C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-5	2	x_2	0	1	0	1/4	$-1/8$	$-1/8$	205/2
2	5	x_3	0	0	1	3/2	$-1/4$	$-3/4$	215
-6	3	x_1	1	0	0	-1	1/2	1/2	10
$-z$			0	0	0	-5	0	2	$-1\ 310$
$-z'$			0	0	0	$-31/4$	23/8	41/8	285/2

为使表 2-26 的最优解仍为参数规划的最优解，由检验数可知：

$$\begin{cases}\sigma_4(\lambda)=\sigma_4+\lambda\sigma'_4=-5-\dfrac{31}{4}\lambda\leqslant 0\\ \sigma_5(\lambda)=\sigma_5+\lambda\sigma'_5=0+\dfrac{23}{8}\lambda\leqslant 0\\ \sigma_6(\lambda)=\sigma_6+\lambda\sigma'_6=2+\dfrac{41}{8}\lambda\leqslant 0\end{cases}$$

于是，可计算下特征数和上特征数：

$$\bar{\lambda}_B=\min\left\{-\frac{0}{23/8},-\frac{2}{41/8}\right\}=-\frac{16}{41} \qquad \underline{\lambda}_B=\max\left\{-\frac{-5}{-31/4}\right\}=-\frac{20}{31}$$

即对$\left[-\frac{20}{31},-\frac{16}{41}\right]$上的任意一个 λ 值，参数规划的最优解为 $X^*=\left(10,\frac{205}{2},215,0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$，最优值是 $z^*=1\ 310-\frac{285}{2}\lambda$。

再讨论 $\lambda<-20/31$ 的情形。这时由检验数可知，非基变量 x_4 对应的检验数 $\sigma_4(\lambda)>0$，使得表 2-26 不再是最优表，应取 x_4 为进基变量，再根据最小比值法则知，应取 x_3 为出基变量，进行换基

迭代，得表 2-27。

表 2-27　第三次迭代的单纯形表

c_j'			-6	-5	2	0	0	0	b
c_j			3	2	5	0	0	0	
C_B'	C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-5	2	x_2	0	1	$-1/6$	0	$-1/12$	1/4	200/3
0	0	x_4	0	0	2/3	1	$-1/6$	$-1/2$	430/3
-6	3	x_1	1	0	2/3	0	1/3	0	460/3
$-z$			0	0	10/3	0	$-5/6$	$-1/2$	$-1\ 780/3$
$-z'$			0	0	31/6	0	19/12	5/4	3 760/3

为使表 2-27 的最优解仍为参数规划的最优解，可计算下特征数和上特征数：

$$\bar{\lambda}_B=\min\left\{-\frac{10/3}{31/6},-\frac{-5/6}{19/12},-\frac{-1/2}{5/4}\right\}=-\frac{20}{31}\qquad \underline{\lambda}_B=-\infty$$

即对$\left[-\infty,-\dfrac{20}{31}\right]$上的任意一个 λ 值，参数规划的最优解为 $X^*=\left(\dfrac{460}{3},\dfrac{200}{3},0,\dfrac{430}{3},0,0\right)^{\mathrm{T}}$，最优值是 $z^*=\dfrac{1\ 780}{3}-\dfrac{3\ 760}{3}\lambda$。

至此，问题已全部解答完毕，现将此参数规划问题的解列成表 2-28。

表 2-28　参数规划的解

最优区间	最优解	最优值
$[-\infty,-20/31]$	$(460/3,200/3,0,430/3,0,0)^{\mathrm{T}}$	$(1\ 780/3-3\ 760\lambda/3)$
$[-20/31,-16/41]$	$(10,205/2,215,0,0,0)^{\mathrm{T}}$	$(1\ 310-285\lambda/2)$
$[-16/41,2/5]$	$(0,100,230,0,0,20)^{\mathrm{T}}$	$(1\ 350-40\lambda)$
$[2/5,+\infty]$	$(0,0,230,200,0,420)^{\mathrm{T}}$	$(1\ 150+460\lambda)$

二、右端常数项含有参数的线性规划问题

【例 2-18】　求解参数规划问题

$$\max z=3x_1+2x_2+5x_3$$
$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\leqslant 430+\lambda\\3x_1+2x_3\leqslant 460-4\lambda\\x_1+4x_2\leqslant 420-4\lambda\\x_j\geqslant 0\ (j=1,2,3)\end{cases}$$

解　首先，当 $\lambda=0$ 时，运用单纯形法可求得最优单纯形表，见表 2-29。

表 2-29　最优单纯形表

c_j		3	2	5	0	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_2	$-1/4$	1	0	1/2	$-1/4$	0	100
5	x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	x_6	2	0	0	-2	1	1	20
$-z$		-4	0	0	-1	-2	0	$-1\ 350$

又因为

$$B^{-1}b^*=\begin{bmatrix}1/2&-1/4&0\\0&1/2&0\\-2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-4\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/2\\-2\\-10\end{bmatrix}$$

将它作为新的一列加到表 2-29 中，得到扩充的单纯形表，如表 2-30 所示。

表 2-30　扩充的单纯形表

c_j		3	2	5	0	0	0	b	b^*
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
2	x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100	$3/2$
5	x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230	-2
0	x_4	2	0	0	-2	1	1	20	-10
$-z$		-4	0	0	-1	-2	0	$-1\ 350$	7

为使表 2-30 的最优基保持不变，根据检验数有

$$\begin{cases} b_1(\lambda)=100+\dfrac{3}{2}\lambda\geqslant 0 \\ b_2(\lambda)=230-2\lambda\geqslant 0 \\ b_3(\lambda)=20-10\lambda\geqslant 0 \end{cases}$$

于是，求出下特征数和上特征数：

$$\bar{\lambda}_B=\min\left\{-\frac{230}{-2},-\frac{20}{-10}\right\}=2 \qquad \underline{\lambda}_B=\max\left\{-\frac{100}{\frac{3}{2}}\right\}=-\frac{200}{3}$$

即对$\left[-\dfrac{200}{3},2\right]$上的任意一个 λ 值，参数规划的最优解为 $X^*=\left(0,100+\dfrac{3}{2}\lambda,230-2\lambda\right)^{\mathrm{T}}$，最优值是 $z^*=1\ 350-7\lambda$。

再讨论 $\lambda>2$ 的情形。这时由检验数可知，基变量 x_6 取负值，使得表 2-30 对于原问题是不可行的，运用对偶单纯形法消除不可行性，应取 x_6 为出基变量，再根据最小比值法则知，应取 x_4 为进基变量，进行换基迭代，得表 2-31。

表 2-31　第一次迭代的单纯形表

c_j		3	2	5	0	0	0	b	b^*
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
2	x_2	$-1/4$	1	0	0	0	$1/4$	105	-1
5	x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230	-2
0	x_4	-1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	-10	5
$-z$		-5	0	0	0	$-5/2$	$-1/2$	$-1\ 360$	12

为使表 2-31 的基为最优基，计算下特征数和上特征数：

$$\bar{\lambda}_B=\min\left\{-\frac{105}{-1},-\frac{230}{-2}\right\}=105 \qquad \underline{\lambda}_B=\max\left\{-\frac{-10}{5}\right\}=2$$

即对[2,105]上的任意一个 λ 值，参数规划的最优解为 $X^*=(0,105-\lambda,230-2\lambda)^{\mathrm{T}}$，最优值是 $z^*=1\ 360-12\lambda$。

再讨论 $\lambda>105$ 的情形。这时，基变量 x_2 取负值，使得表 2-29 中 x_2 所在行中，约束条件的系数都是正数，所以原问题是不可行的，即当 $\lambda>105$ 时，原问题不存在最优解。

再讨论 $\lambda<-200/3$ 的情形。由表 2-29 可知，基变量 x_2 取负值，故取 x_2 为出基变量，再根据最小比值法则知，应取 x_5 为进基变量，用对偶单纯形法进行换基迭代，得表 2-32。

表 2-32　第二次迭代的单纯形表

c_j		3	2	5	0	0	0	b	b^*
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_5	1	−4	0	−2	1	0	−400	−6
5	x_3	1	2	1	1	0	0	430	1
0	x_6	1	4	0	0	0	1	420	−4
$-z$		−2	−8	0	−5	0	0	−2 150	−5

为使表 2-32 的基为最优基，计算下特征数和上特征数：

$$\bar{\lambda}_B=\min\left\{-\frac{-400}{-6},-\frac{420}{-4}\right\}=-\frac{200}{3}\qquad \underline{\lambda}_B=\max\left\{-\frac{-430}{1}\right\}=-430$$

即对[−430，−200/3]上的任意一个 λ 值，参数规划的最优解为 $X^*=(0,0,430+\lambda)^{\mathrm{T}}$，最优值是 $z^*=2\ 150+5\lambda$。

再讨论 $\lambda<-430$ 的情形。这时，基变量 x_3 取负值，但表 2-32 中 x_3 所在行中，约束条件的系数都是正数，所以原问题是不可行的，故当 $\lambda<-430$ 时，原问题不存在最优解。

至此，问题已全部解答完毕，现将此参数规划的解列表 2-33。

表 2-33　参数规划的解

最优区间	最优解	最优值
$[-\infty,-430]$	无	无
$[-430,-200/3]$	$(0,0,430+\lambda)^{\mathrm{T}}$	$2\ 150+5\lambda$
$[-200/3,2]$	$(0,100+3\lambda/2,230-2\lambda)^{\mathrm{T}}$	$1\ 350-7\lambda$
$[2,105]$	$(0,105-\lambda,230-2\lambda)^{\mathrm{T}}$	$1\ 360-12\lambda$
$[105,+\infty]$	无	无

思考与练习

1. 写出下列线性规划问题的对偶问题。

(1)
$$\max z=x_1+2x_2+3x_3+4x_4$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}-x_1+x_2-x_3-3x_4=5\\6x_1+7x_2+3x_3-5x_4\geqslant 8\\12x_1-9x_2-9x_3+9x_4\leqslant 20\\x_1,x_2\geqslant 0,x_3\leqslant 0,x_4\ \text{无约束}\end{cases}$$

(2)
$$\max z=2x_1+3x_2-7x_3+8x_4$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1-x_3+2x_4=10\\2x_1+3x_2+x_3+2x_4\leqslant 17\\-x_1+3x_2-4x_3\geqslant 12\\3\leqslant x_2\leqslant 25\\x_1,x_3\geqslant 0,x_4\leqslant 0\end{cases}$$

2. 已知线性规划问题

$$\max z=2x_1+x_2+5x_3+6x_4$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+x_3+x_4\leqslant 8\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4\leqslant 12\\x_j\geqslant 0(j=1,\cdots,4)\end{cases}$$

其对偶问题的最优解为 $y_1^*=4,y_2^*=1$，试应用对偶问题的性质，求原问题的最优解。

3. 考虑线性规划问题

$$\max z=2x_1+4x_2+3x_3$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3\leqslant 60\\2x_1+x_2+2x_3\leqslant 40\\x_1+3x_2+2x_3\leqslant 80\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(1) 写出其对偶问题。

(2) 用单纯形法求解原问题,列出每步迭代计算得到的原问题的解与互补的对偶问题的解。

(3) 用对偶单纯形法求解其对偶问题,并列出每步迭代计算得到的对偶问题的解及与其互补的对偶问题的解。

(4) 比较(2)和(3)的计算结果。

4. 用对偶单纯形法求下列线性规划。

(1)
$$\min z=3x_1+2x_2+x_3+4x_4$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+4x_2+5x_3+x_4\geqslant 0\\3x_1-x_2+7x_3-2x_4\geqslant 2\\5x_1+2x_2+x_3+6x_4\geqslant 15\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

(2)
$$\min z=x_1+x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+x_2\geqslant 4\\x_1+2x_2\geqslant 6\\x_1\leqslant 4\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

5. 已知线性规划问题如下:

$$\max z=-5x_1+5x_2+13x_3$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}-x_1+x_2+3x_3\leqslant 20\\12x_1+4x_2+10x_3\leqslant 90\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

先用单纯形法求解,分别就下列情况进行灵敏度分析,并求新的最优解。

(1) 约束条件 1 的右端常数由 20 变为 30。

(2) 约束条件 2 的右端常数由 90 变为 70。

(3) 目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8。

(4) x_1 的系数列向量由$\begin{pmatrix}-1\\12\end{pmatrix}$变为$\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$。

(5) 增加一个约束条件 3:$2x_1+3x_2+5x_3\leqslant 50$。

(6) 将原约束条件 2 改变为:$10x_1+5x_2+10x_3\leqslant 100$。

6. 某文教用品厂用原材料白坯纸生产原稿纸、日记本和练习本三种产品。该厂现有工人 100 人,每月白坯纸供应量为 30 000 千克。已知工人的劳动生产率为:每人每月可生产原稿纸 30 捆,或日记本 30 打,或练习本 30 箱。已知原材料消耗为:每捆原稿纸用白坯纸$\frac{10}{3}$千克,每打日记本用白坯纸$\frac{40}{3}$千克,每箱练习本用白坯纸$\frac{80}{3}$千克。又知每生产一捆原稿纸可获利 2 元,生产一打日记本获利 3 元,生产一箱练习本获利 1 元。试确定:

(1) 现有生产条件下获利最大的方案。

(2) 如白坯纸的供应数量不变,当工人人数不足时可招收临时工,临时工工资支出为每人每月 40 元,则该厂要不要招收临时工?若要,招多少临时工最合适?

7. 某工厂拟生产甲、乙、丙三种产品,都需要在 A,B 两种设备上加工,有关数据如表 2-34 所示。

表 2-34 相关数据表

设备	产品			设备有效台时(每月)
	甲	乙	丙	
A	1	2	1	40
B	2	1	2	50
产值/千元	3	2	1	

(1) 如何充分发挥设备能力,使总产值最大?

(2) 若为了提高产量,以每台时 35 元租金租外厂 A 设备,是否合算?

(3) 试分别确定甲产品单位产值、B设备供应量各自的影响范围。

(4) 若每月能以3.9万元租金租用外厂B设备30台时,则是否应租用?为什么?

(5) 若每月A设备供应量减少20台,B设备供应量增加10台时,试问最优解与影子价格有何变化?

8. 分析下列参数规划中当t变化时最优解的变化情况。

(1)
$$\max z=(7+2t)x_1+(12+t)x_2+(10-t)x_3 \quad (t\geqslant 0)$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 20\\2x_1+2x_2+x_3\leqslant 30\\x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(2)
$$\max z=2x_1+x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1\leqslant 10+2t\\x_1+x_2\leqslant 25-t\\x_2\leqslant 10+2t\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\quad (0\leqslant t\leqslant 25)$$

第三章

运输问题

在生产中，经常需要将某种物资从一些产地运往另一些销地，因而存在着如何调运使总的运费最小的问题。这类问题一般可用线性规划模型来描述，当然也可以用单纯形法求解，但由于其模型结构特殊，学者们提供了更为简便和直观的解法——表上作业法。此外，有些线性规划问题从实际意义上看，并非运输问题，但其模型结构类似于运输问题，因而其也可以化为运输问题进行求解。

第一节　运输问题及其数学模型

一、运输问题模型

1. 平衡运输问题

运输问题的一般提法是这样的：某种物品有 m 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，其产量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，另有 n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，其销量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，各产地 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$运往销地 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$的单位运价(或运输距离)为 c_{ij}，其数据列入表 3-1。问应如何组织调运才能使总运费最省？

表 3-1　运价表

产地	销地				产量
	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

将运价表与运量 x_{ij} 结合形成表 3-2，该问题为求解最佳调运方案，即求解所有 x_{ij} 的值，使总的运输费用 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ 达到最少。

表 3-2　运输平衡表

产地	销地				产量
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	$x_{11}\ c_{11}$	$x_{12}\ c_{12}$	…	$x_{1n}\ c_{1n}$	a_1
A_2	$x_{21}\ c_{21}$	$x_{22}\ c_{22}$	…	$x_{2n}\ c_{2n}$	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	$x_{m1}\ c_{m1}$	$x_{m2}\ c_{m2}$	…	$x_{mn}\ c_{mn}$	a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	

设 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 B_j 的运量，也为决策变量，那么在产销平衡的条件下，要求得总运费最小的调运方案，该问题的数学模型形式为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i(i = 1,2,\cdots,m)\\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j(j = 1,2,\cdots,n)\\ x_{ij} \geqslant 0(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

上述模型包含 $m\times n$ 个变量，$m+n$ 个约束方程。其系数矩阵可以表示为

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\text{共有 } m \text{ 行}\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\text{共有 } n \text{ 行}\end{array}
\end{array}$$

该系数矩阵中对应于变量 x_{ij} 的系数向量 p_{ij}，其分量中除第 i 个和第 $m+j$ 个为 1 以外，其余的都为零。

对产销平衡的运输问题，由于 $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j = \sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}) = \sum\limits_{i=1}^{m}(\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$，往往上述约束方程中肯定有一个是多余的，即模型最多只有 $m+n-1$ 个独立约束方程，系数矩阵的秩小于或等于 $m+n-1$。

定理 1　平衡运输问题必有可行解，也必有最优解。

证　设 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j = Q$，取

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{Q}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则显然有 $x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，又

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\frac{a_i b_j}{Q} = \frac{a_i}{Q}\sum_{j=1}^{n} b_j = a_i\quad(i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i b_j}{Q} = \frac{b_j}{Q}\sum_{i=1}^{m} a_i = b_j\quad(j = 1,2,\cdots,n)$$

所以 x_{ij} 是运输问题的一个可行解。

又因为 $c_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，故对于任意一个可行解 x_{ij}，运输问题的目标函数都不会为负数，即目标函数值有下界零，对于求极小值问题，目标函数值有下界，则必有最优解，证毕。

【例 3-1】 设某种物资共有三个产地 A_1,A_2,A_3，其产量分别为 9，5，7 个单位；另有 4 个销地 B_1,B_2,B_3,B_4，其销量分别为 3，8，4，6 个单位。已知由产地 $A_i(i=1,2,3)$运往销地 $B_j(j=1,2,3,4)$的单位运价为 c_{ij}，其数据列入表 3-3(为了表示清楚起见，我们将运价 c_{ij} 填在小方框内)。问如何调运才能使总运费最省？试建立此问题的数学模型。

表 3-3 例 3-1 数据

产地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	x_{11} 2	x_{12} 9	x_{13} 10	x_{14} 7	a_1
A_2	x_{21} 1	x_{22} 3	x_{23} 4	x_{24} 2	a_2
A_3	x_{31} 8	x_{32} 4	x_{33} 2	x_{34} 5	a_3
销量	3	8	4	6	21

解 设 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 $B_j(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$的运量，则此问题的数学模型为求 $x_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$，使得

$$\min Z=2x_{11}+9x_{12}+10x_{13}+7x_{14}+x_{21}+3x_{22}+4x_{23}+2x_{24}+8x_{31}+4x_{32}+2x_{33}+5x_{34}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=9\\x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=5\\x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=7\\x_{11}+x_{21}+x_{31}=3\\x_{12}+x_{22}+x_{32}=8\\x_{13}+x_{23}+x_{33}=4\\x_{14}+x_{24}+x_{34}=6;\\x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,3;j=1,2,3,4)\end{cases}$$

这是一个平衡运输问题。

和一般的线性规划问题一样，运输问题的最优解也一定可以在基可行解中找到，下面结合例 3-1 来研究在运输问题中基可行解的特征。

根据单纯形法的原理，我们首先要确定约束系数矩阵 A 的秩。

对于例 3-1，若将变量 $x_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$按字典序排列，则得到约束系数矩阵 A，其中前 3 行分别为第 1～3 个约束方程的系数，后 4 列分别为第 4～7 个约束方程的系数。显然这是一个 $(3+4)$行和(3×4)列的矩阵。若在 A 中右边增加一列，将约束方程组的右端常数填入，则得到约束方程的增广矩阵，记为 $\bar{A}$。

一般地，若将变量 $x_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$按字典序排列，则得运输问题的约束方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$
A=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hdashline
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\overline{A}=\left[\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & & a_1\\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & a_2\\
 & & & & & & & & \ddots & & & & & \vdots\\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & a_m\\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & & b_1\\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & b_2\\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & & \vdots\\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & b_n
\end{array}\right]
$$

这两个矩阵均属于大型稀疏矩阵。“大型”是指矩阵的规模大，矩阵 A 共有 $(m+n)$ 行，mn 列，当 m 和 n 较大时，矩阵 A 和 $\overline{A}$ 的规模是很大的。稀疏是指矩阵中的非零元素较少（一般仅 5%）。且矩阵 A 或 $\overline{A}$ 中相应于 x_{ij} 的列向量为

$$
P_{ij}=\begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } m+j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}
$$

即 P_{ij} 中的第 i 个分量和第 $m+j$ 个分量为 1，其余元素均为 0。

正是由于运输问题的系数矩阵 A 和增广矩阵 $\overline{A}$ 具有上面说的这种特殊结构，一般单纯形法对于它的求解虽然适用，但不是很有效，需要寻找求解运输问题的特殊途径。我们先证明下面几个重要性质。

定理 2　运输问题的约束方程系数矩阵 A 和增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩相等，且等于 $m+n-1$。

证　假设 $m,n\geqslant 2$，则有 $m+n\leqslant mn$，于是 $r(\overline{A})\leqslant m+n$。又由平衡条件可知，$\overline{A}$ 的前 m 行之和应等于后 n 行之和，因此 $\overline{A}$ 的行是线性相关的，故必有 $r(\overline{A})\leqslant m+n$。

其次，证明 $\overline{A}$ 中至少存在一个 $m+n-1$ 阶的非奇异方阵 B。事实上，可以按下列方式选一个 $m+n-1$ 阶的子方阵 B，使得

$$
|B|=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{31} & \cdots\ \ x_{m1} \end{array}\\
\left|\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & 0 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & 1 \\
1 & & & & 1 & 1\ \cdots & 1 \\
 & 1 & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{前 } m-1 \text{ 行}\\
\neq 0\\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{后 } n \text{ 行}
\end{array}
$$

由此可见,$\bar{A}$ 的秩恰为 $m+n-1$。又由于 B 事实上是包含在 A 中的,故 A 的秩也等于 $m+n-1$。证毕。

由于 A 与 $\bar{A}$ 的秩都是 $m+n-1$,因此在问题的约束方程组中,虽有 $m+n$ 个结构约束条件,但由于总产量等于总销量,故只有 $m+n-1$ 个结构约束条件是线性独立的。可以证明,去掉其中任何一个方程,剩下的 $m+n-1$ 个方程都是独立的。

由线性规划的理论可知,约束方程组系数矩阵的秩就决定了基可行解中基变量的个数,因此可得如下的重要推论。

推论 1 运输问题的基可行解中应包含 $m+n-1$ 个基变量。

对于例 3-1,显然 $r(A)$ 与 $r(\bar{A})$ 都为 $3+4-1=6$,故它的基可行解中,基变量共 6 个。那么,究竟怎样的 $m+n-1$ 个变量可以作为基变量呢?为了回答这个问题,我们设这样的变量:

$$x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \cdots, x_{i_sj_s} \quad (s=m+n-1)$$

只要这些变量对应的约束方程系数列向量

$$P_{i_1j_1}, P_{i_2j_2}, \cdots, P_{i_sj_s} \quad (s=m+n-1)$$

是线性无关的,这些变量就可以作为基变量。但是,要从一个很大的系数矩阵 A 中,选择 $m+n-1$ 个线性无关的列向量,其工作量是很大的(首先,选择的方式多,共有 C_{mn}^{m+n-1} 种选法;其次,判断它是否线性无关的工作量也很大)。因此,我们不走直接从 A 中选择基向量这条路,而是根据运输问题的特点设计了另一种更直观和简便易行的方法。为此,我们首先引进闭回路的概念,它在运输问题的解法中作用很大。

定义 1 凡是能排列成

$$x_{i_1j_1}, x_{i_1j_2}, x_{i_2j_2}, x_{i_2j_3}, \cdots, x_{i_sj_s}, x_{i_sj_1}$$

或

$$x_{i_1j_1}, x_{i_2j_1}, x_{i_2j_2}, x_{i_3j_2}, \cdots, x_{i_sj_s}, x_{i_1j_s}$$

(其中 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 互不相同;$j_1, j_2, \cdots, j_s$ 互不相同)形式的变量集合,用一条封闭折线将它们连接起来形成的图形称为一个闭回路,其中诸变量称为这个闭回路的顶点,连接相邻两个顶点及最后一个顶点与第一个顶点的线段称为闭回路的边。

例如,设 $m=4, n=5$,则集合为

$$\{x_{11}, x_{14}, x_{44}, x_{45}, x_{35}, x_{32}, x_{22}, x_{21}\}$$

若把各顶点标在运价表上(见表 3-4),且用线段把相邻两顶点及最后一个顶点与第一个顶点连接起来,就形成了一条闭回路。

表 3-4 运价表上的闭回路

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	x_{11}			x_{14}		
A_2	x_{21}	x_{22}				
A_3		x_{32}			x_{35}	
A_4				x_{44}	x_{45}	

显然在闭回路中,相邻两点或者是处在相同的行(第一个下标相同),或者是处在相同的列(第二个下标相同),而且如果第一、二个顶点处在相同的行,则第二、三两个顶点就处在相同的列,依次类推,最后一个顶点必与第一个顶点处在相同的列。

另外,闭回路也可以写成

$$\{x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, x_{35}, x_{45}, x_{44}, x_{14}\}$$

即第一、二两个顶点处在相同的列，第二、三两个顶点处在相同的行，依次类推，最后一个顶点与第一个顶点处在相同的行。

也就是说，闭回路上的顶点按顺时针排列和按逆时针排列的结果是一样的。还要说明的是，这里 x_{34} 不是闭回路的顶点，因为闭回路在这一点没有转弯。

显然，闭回路有以下几何性质：

(1) 每个顶点都是转角点。

(2) 每条边都是水平线或垂直线，闭回路是由这些水平线或垂直线构成的一条封闭折线。

(3) 每行(或列)若有闭回路的顶点，则必有两个。

根据不同的情况，闭回路可以有不同的形式。例如，在 $m=3, n=4$ 的运输问题中，变量组

$$\{x_{11}, x_{12}, x_{32}, x_{34}, x_{24}, x_{21}\} \text{和} \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{24}, x_{34}, x_{31}\}$$

都是闭回路，把它们画在运价表上分别如表 3-5 和表 3-6 所示。

表 3-5　运价表上的闭回路

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	x_{11}	x_{12}			
A_2	x_{21}			x_{24}	
A_3		x_{32}		x_{34}	

表 3-6　运价表上的闭回路

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	x_{11}				
A_2		x_{22}		x_{24}	
A_3	x_{31}			x_{34}	

再根据运输问题的约束方程系数矩阵 A 中的列向量 P_{ij} 的特征，可以推出闭回路有如下性质：

性质 1　构成闭回路的变量组对应的列向量组 $P_{i_1j_1}, P_{i_1j_2}, P_{i_2j_2}, P_{i_2j_3}, \cdots, P_{i_sj_s}, P_{i_sj_1}$ 必线性相关。

证　由直接计算可知

$$P_{i_1j_1} - P_{i_1j_2} + P_{i_2j_2} - P_{i_2j_3} + \cdots + P_{i_sj_s} - P_{i_sj_1} = 0$$

故向量组必线性相关。

性质 2　若变量组 $x_{i_1j_1}, x_{i_2j_1}, \cdots, x_{i_rj_r}$ 中有一个部分组构成闭回路，则变量组对应的列向量组 $P_{i_1j_1}, P_{i_2j_2}, \cdots, P_{i_rj_r}$ 是线性相关的。

证　由性质 1 知，向量组中有一个部分组(与闭回路的顶点相对应的向量组)是线性相关的。根据线性代数理论可知，若向量组中有一部分线性相关，则全体也线性相关。因此，向量组必线性相关。证毕。

推论 2　若变量组对应的列向量线性无关，则该变量组一定不含闭回路。

下面再介绍孤立点的概念。

定义 2 在变量组中,若有某个变量 x_{ij} 是它所在的行(第 i 行)或列(第 j 列)中出现于变量组中的唯一变量,则称该变量是该变量组的一个孤立点。

例如,由变量

$$x_{12},x_{14},x_{21},x_{24},x_{25},x_{32}$$

构成的变量组(见表 3-7),由于在第 1 列的所有变量中,只有变量 x_{21} 属于该变量组,所以它是一个孤立点。同理,x_{25},x_{33} 也都是孤立点。

表 3-7 变量组

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1		x_{12}		x_{14}	
A_2	x_{21}			x_{24}	x_{25}
A_3		x_{32}	x_{33}		

性质 3 若变量组中不包含任何闭回路,则该变量必有孤立点。

证 用反证法。假设变量组中没有孤立点,即变量组的任一变量所在的行和列上至少还有变量组中的另一个变量。现从该变量组中任取一个变量 $x_{i_1j_1}$,按假设,必有组中另一变量与 $x_{i_1j_1}$ 同行,设它为 $x_{i_1j_2}$。同理,又必有组中的一变量与 $x_{i_1j_2}$ 同列,设它为 $x_{i_2j_2}$。

同理,又有组中的一变量与 $x_{i_2j_2}$ 同行,设它为 $x_{i_2j_3}$,如此下去,可得一系列变量:

$$x_{i_1j_1},x_{i_1j_2},x_{i_2j_2},x_{i_2j_3},\cdots$$

这些变量都属于原变量组,但原变量组是有限集合,因此,变量组中必有重复出现的现象。设 $x_{i_pj_p}$(或 $x_{i_pj_{p+1}}$)是第一次出现的与前面某一变量相重合的变量。设前面的那个变量为 $x_{i_qj_q}$(或 $x_{i_qj_{q+1}}$),这时

$$x_{i_qj_q},x_{i_qj_{q+1}},x_{i_{q+1}j_{q+1}},\cdots,x_{i_{p-1}j_{p-1}},x_{i_{p-1}j_p}$$

是一个闭回路,但这与变量组不包含闭回路的假设矛盾。证毕。

下面给出一个重要的定理。

定理 3 变量组对应的列向量组线性无关的充要条件是该变量组中不包含任何闭回路。

证 先证必要性。用反证法。设变量组对应的列向量组线性无关,但该变量组包含一条以其中某些变量为顶点的闭回路,则由性质 1 知这些变量对应的列向量必线性相关,因而变量组也线性相关,这与假设矛盾。

再证充分性,即证若变量组中不包含任何闭回路,则向量组线性无关。事实上,若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$,使得

$$k_1P_{i_1j_1}+k_2P_{i_2j_2}+\cdots+k_rP_{i_rj_r}=0$$

因为变量组中不包含任何闭回路,由性质 3 可知其中必有孤立点。不妨设 $x_{i_1j_1}$ 为孤立点,又不妨设 $x_{i_1j_1}$ 是在第 i_1 行上唯一的变量(至于是第 j_1 列上唯一的变量的情形可以完全类似地给出证明)。这时,由 P_{ij} 的特征可以看出,上式的左端第 i_1 个分量的和是 k_1,而右端是 0,所以 $k_1=0$。从而变成

$$k_2P_{i_2j_2}+k_3P_{i_3j_3}+\cdots+k_rP_{i_rj_r}=0$$

但 $x_{i_1j_1},x_{i_2j_2},\cdots,x_{i_rj_r}$ 仍不包含闭回路,故在去掉 $x_{i_1j_1}$ 后,其中还有孤立点,设为 $x_{i_2j_2}$。与前面类似地分析可证 $k_2=0$。同理,可得

$$k_3=k_4=\cdots=k_r=0$$

这就证明了向量组线性无关。证毕。

由此得出下列重要推论。

推论 3 运输问题中的一组 $m+n-1$ 个变量

$$x_{i_1j_1},x_{i_2j_2},\cdots,x_{i_sj_s}\ (s=m+n-1)$$

能构成基变量的充要条件是它不包含任何闭回路。

上面的推论给出了运输问题的基可行解中基变量的一个基本特征：基变量组不含闭回路。

这个推论是很重要的，因为利用它来判断 $m+n-1$ 个变量是不是构成基变量组，就看它是不是包含闭回路。这种方法简便易行，它比直接判断这些变量对应的列向量是不是线性无关要简单得多。另外，在下面将看到利用基变量的这个特征，可以导出求运输问题的初始基可行解的一些简便方法。

2. 不平衡运输问题

上述运输问题都要求总产量等于总销量，因而也称为产销平衡的运输问题。产销不平衡的运输问题是指总产量不等于总销量的运输问题 $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$，这类问题更为常见。其模型如下：

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j & j = 1,2,\cdots,n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i & i = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \geqslant 0 & i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

根据该问题中总供应量 $\sum_{i=1}^{m} a_i$ 与总需求量 $\sum_{j=1}^{n} b_j$ 的关系，可以将运输问题分为两类。

若产量大于销量$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$，说明有一部分产量为库存，暂时无法销售，则其运输模型为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i & i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \geqslant 0 & i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

当 $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ 时，销量大于产量，其数学模型为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j & j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \geqslant 0 & i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

为了能够采用产销平衡的运输问题求解算法解决产销不平衡的运输问题，通常需要把不平衡的运输问题化成平衡的运输问题，其主要的方法是增加一个假想的产地或者销地。

如果产量大于销量，就要考虑多余物品的存储问题。假设一个销地 B_{n+1}，可以将其理解为企业仓库或者中转站。令 $x_{i,n+1}$ 是产地 A_i 产品需要的储存量，于是有

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad i = 1,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$$

假定各个产地到销地 B_{n+1} 的单位运费为 $c_{i,n+1}$，其运输模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} c_{i,n+1}x_{i,n+1}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\cdots,n+1\\ \sum\limits_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad i=1,2,\cdots,m\\ x_{ij}\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n+1\end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} b_j$。

若所有产地到假想地的运费均为零，则模型可化简为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\cdots,n+1\\ \sum\limits_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad i=1,2,\cdots,m\\ x_{ij}\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n+1\end{cases}$$

若销量大于产量，则可以假想一个产地，也可以理解为从库存取出进行销售。假定从假想的产地到各个销地的单位运费为 $c_{m+1,j}$，运时为 $x_{m+1,j}$，其运输模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{m+1,j}x_{m+1,j}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\cdots,n\\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i=1,2,\cdots,m+1\\ x_{ij}\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,m+1;j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

其中，$\sum\limits_{i=1}^{m+1} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$。若所有产地到假想地的运费均为零，则模型可以简化为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\cdots,n\\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i=1,2,\cdots,m+1\\ x_{ij}\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,m+1;j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

3. 有转运的运输问题

在实际问题中，物品通常需要先由产地运输到某个中间转运站（可能是另外的产地、销售地或者中转仓库、配送中心等），再转运到相应的销地。在此情形下，通过转运可能节约运费，比直接运输更为经济合理。例如，家乐福就在全球建立了多家配送中心。

有 m 个产地 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和 n 个销地 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 均可以作为中转站使用，因此，发送物品的地点不仅仅是产地，还包括销地，有 $m+n$ 个，接收物品的地点也有 $m+n$ 个。

产地 A_i 发送到各个地方的物品数量之和，等于该地的产量加上经过它转运的物品数量。各地运输到 B_j 的物品数量之和，等于它的净需求量加上转运量。在建立模型中，除了考虑单位运价之

外，通常还需要考虑各个地点转运单位物品的相关费用。

前面讨论的运输问题都是假定任意产地与销地之间都有直达路线，可以直接运输物资，并且产地只输出货物，销地只输入货物。但实际情况可能更复杂一些。例如，可以考虑下列更一般的情况：

(1) 产地与销地之间没有直达路线，货物由产地到销地必须通过某中间站转运。

(2) 某些产地既输出货物，也吸收一部分货物；某些销地既吸收货物，又输出部分货物。即产地或销地也可以起中转站的作用，或者既是产地又是销地。

(3) 产地与销地之间虽然有直达路线，但直达运输的费用或运输距离分别比经过某些中转站还要高或远。

存在以上情况的问题，统称为转运问题。解决此类问题的思路是先将它化为无转运的平衡运输问题，再进行求解。为此，需要做如下假设：

(1) 根据具体问题求出最大可能中转量 Q(Q 是大于总产量 $\sum_{i=1}^{m} a_i$ 的一个数)。

(2) 纯中转站可视为输出量和输入量均为 Q 的一个产地和一个销地。

(3) 兼中转站的产地 A_i 可视为一个输入量为 Q 的销地及一个产量为 A_i+Q 的产地。

(4) 兼中转站的销地 B_j 可视为一个输出量为 Q 的产地及一个销量为 B_j+Q 的销地。

在此假设的基础上，列出各产地的输出量、各销地的输入量及各产销地之间的运输表，然后求解。有转运的运输问题化成为产销平衡的运输问题，步骤如下：

(1) 所有产地、销地、转运站同时看作产地和销地。

(2) 运输表中不可能方案的运费取作 M(一个足够大的数)，自身对自身的运费为 0。

(3) 经过转运点的物资量既是该点作为销地的需求量，又是该点作为产地的供应量，如果无法获取该数量的确切值，将调运总量作为该数值的上界。

下面举例说明这一转化过程。

【例 3-2】 已知某物资的产量、销量及运价如表 3-8 所示。

表 3-8 某物资的产量、销量及运价表

产地	地区				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	20

另外，还假定这些物资在三个产地之间可以互相调运，在四个销地之间也可以互相调运，其运价如表 3-9 和表 3-10 所示。

表 3-9 产地间运价表

产地	A_1	A_2	A_3
A_1	0	1	3
A_2	1	0	M
A_3	3	M	0

表 3-10 销地间运价表

销地	B_1	B_2	B_3	B_4
B_1	0	1	4	2
B_2	1	0	2	1
B_3	4	2	0	3
B_4	2	1	3	0

另外，再假定还有四个纯中转站 T_1，T_2，T_3，T_4，它们到各产地、各销地及中转站之间的运价如表 3-11 所示。

表 3-11 有中转站的运价表

产地与销地	A_1	A_2	A_3	T_1	T_2	T_3	T_4	B_1	B_2	B_3	B_4
T_1	2	3	1	0	1	3	2	2	8	4	6
T_2	1	5	M	1	0	1	1	4	5	2	7
T_3	4	M	2	3	1	0	2	1	8	2	4
T_4	3	2	3	2	1	2	0	1	M	2	6

问在考虑到产销地之间直接运输和非直接运转的各种可能方案的情况下，怎样将三个产地 A_1，A_2，A_3 所产的物资运往四个销地 B_1，B_2，B_3，B_4，使总运费最省。

解 从表 3-8 看出，从 A_1 到 B_2 的运费为 11。而将表 3-9 结合起来看，如果从 A_1 经 A_3 运往 B_2，总费用为 3＋4＝7。如果再结合表 3-11 看，从 A_1 经 T_2 运往 B_2 只需 1＋5＝6。而再结合表 3-10 可知，从 A_1 到 B_2 运费最少的路径是从 A_1 经 A_2 到 B_1，最后到 B_2，其总运费只需 1＋1＋1＝3。可见，在这个问题中，从每个产地到各销地之间的运输方案是很多的。为了把这个问题仍当作一般的运输问题处理，可以这样做：

(1) 由于问题中所有产地、中间转运站、销地都可以既看作产地，又看作销地，因此可以把整个问题当作有 11 个产地和 11 个销地的扩大了的运输问题。

(2) 对扩大的运输问题建立单位运价表，见表 3-11。

(3) 所有中间转运站的产量等于销量。由于运费最少时不可能出现一批物资来回倒运现象，所以每个转运站的转运数不超过总产量 20。因此，可以规定四个中转站 T_1，T_2，T_3，T_4 的产量和销量均为 20。由于实际的转运量

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j$$

可以在每个约束条件中增加一个松弛变量 x_{ii}，x_{ii} 相当于一个虚构的转运站，意义就是自己运给自己，$(20-x_{ii})$ 就是每个转运站的实际转运量，x_{ii} 对应的运价 $c_{ii}=0$。

(4) 扩大的运输问题中，原来的产地与销地也有转运站的作用，所以同样在原来产量与销量的数字上加 20。即三个产地 A_1，A_2，A_3 的产量改成 27，24，29，销量均为 20；四个销地 B_1，B_2，B_3，B_4 的销量改成 23，26，25，26，产量均为 20。同时引进 x_{ii} 作为松弛变量。

下面列出扩大运输问题的产销平衡与单位运价表(见表 3-12)。

表 3-12 有中转问题的产销平衡与单位运价表

产地	销地											产量
	A_1	A_2	A_3	T_1	T_2	T_3	T_4	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0	1	3	2	1	4	3	3	11	3	10	27
A_2	1	0	M	3	5	M	2	1	9	2	8	24
A_3	3	M	0	1	M	2	3	7	4	10	5	29
T_1	2	3	1	0	1	3	2	2	8	4	6	20
T_2	1	5	M	1	0	1	1	4	5	2	7	20
T_3	4	M	2	3	1	0	2	1	8	2	4	20
T_4	3	2	3	2	1	2	0	1	M	2	6	20
B_1	3	1	7	2	4	1	1	0	1	4	2	20
B_2	11	9	4	8	5	8	M	1	0	2	1	20
B_3	3	2	10	4	2	2	2	4	2	0	3	20
B_4	10	8	5	6	7	4	6	2	1	3	0	20
销量	20	20	20	20	20	20	20	23	26	25	26	

由于表 3-12 是一个产销平衡的运输问题，所以可以用表上作业法求解。

第二节　运输问题的表上作业法

运输问题的解法主要有图上作业法和表上作业法两种，本节主要介绍表上作业法（又称为运输单纯形法）。它是根据单纯形法的原理和运输问题的特征设计出来的一种便于在表上运算的方法。作为一种迭代算法，它的主要步骤是：

① 求一个初始基可行解（又称初始调运方案）。

② 判别当前的基可行解是否为最优解。若是，则迭代停止；否则，转下一步。

③ 改进当前的基可行解，得新的基可行解，再返回②。

本节首先介绍初始基可行解的求法，下一节再介绍如何判断改进。

我们知道，在线性规划问题的解法中，求初始基可行解是比较麻烦的，特别是当约束方程组的系数矩阵 A 中不含单位矩阵时，还要引入人工变量，用大 M 法或两阶段法来求初始基可行解。对于运输问题，由于约束方程系数矩阵 A 中不包含单位矩阵，照理也要引入人工变量。但是由于运输问题的特殊性，可以不必引入人工变量，而是利用一些特殊的方法直接求出运输问题的初始基可行解。下面介绍几种常用的求运输问题的初始基可行解的方法。

一、西北角法

西北角法又称左上角法，用这种方法来制定运输问题的初始调运方案，即求初始基可行解，应遵循如下规则：

优先安排运价表上编号最小的产地和销地之间（即运价表的西北角位置）的运输业务。也就是从运价表的西北角位置（即 x_{11} 处）开始，依次安排 m 个产地和 n 个销地之间的运输业务，从而得到一个初始调运方案。

需要说明的是，西北角法所遵循的规则纯粹是一种人为的规定，没有任何理论依据和实际背景。但它容易操作，特别适合在计算机上编程计算，因而仍不失为一种制定初始调运方案的好方法，受到广大实际工作者的青睐。

首先通过例题介绍这种方法的基本思路和解题过程。

【例 3-3】 用西北角法求例 3-1 的一个初始调运方案。

解　首先安排产地 A_1 与销地 B_1 之间的运输业务，即从运价表上西北角（或左上角）位置 x_{11} 开始分配运输量，并使 x_{11} 取尽可能大的数值。现在产地 A_1 的产量为 9，而销地 B_1 的需求量为 3，故安排产地 A_1 运送 3 个单位的货物给销地 B_1，即取 $x_{11}=\min\{a_1, b_1\}=\min\{9, 3\}=3$。

当产地 A_1 运出 3 个单位货物后，还剩 $9-3=6$ 个单位的货物，将这个数填在 a_1 的修正量处。而当销地 B_1 接收到 3 个单位货物后，它的需求量已经得到满足，于是 b_1 的修正量为 0。这时从产地 A_2，A_3 就不可能再运送货物给销地 B_1 了，即 $x_{21}=x_{31}=0$，并称第 1 列已饱和。

解此类问题时，通常总是先画一张运价与产销平衡表（见表 3-13）。表中的 x_{ij} 先空着，然后把求出来的值逐个填进去。为了在表上能够看出哪些变量是基变量，哪些变量是非基变量，可以约定在代表基变量的格子中画上一个圈，把基变量取的值填在圈内，并把这种格子称为数字格或赋值格，它所对应的是基变量；而在代表非基变量的格子中画上“×”，它的值一定等于 0，这种打“×”的格子称为空格，它对应的是非基变量。

按照这些规定，本例中在决定了基变量 $x_{11}=3$ 和非基变量 x_{21} 和 x_{31} 之后，应将③填在 x_{11} 处，将“×”填在 x_{21} 和 x_{31} 处（见表 3-13）。这时运价表上西北角处得到赋值，而第 1 列的各变量 x_{i1} 都已确定，即第 1 列已饱和，可以认为第 1 列已经从表中划掉了。

表 3-13　西北角法求解第一步

产地	销地				产量	修正量
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	③ 2	9	10	7	9	6
A_2	× 1	3	4	2	5	
A_3	× 8	4	2	5	7	
销量	3	8	4	6		
修正量	0					

再在剩下的运价表上重复上述过程。即决定 x_{12} 的值(划去了第 1 列后的表中西北角的变量)，令 x_{12} 为基变量，并且 x_{12} 取尽可能大的值。即取 $x_{12}=\min\{a_1,b_1\}=\min\{6,8\}=6$。

在表 3-14 中 x_{12} 的格子中填上⑥，然后令 $x_{13}=x_{14}=0$，即取 x_{13}，x_{14} 为非基变量，在对应的格子中打"×"。这时 a_1 的修正量为 0，而 b_2 的修正量为 $8-6=2$，这时第 1 行已饱和，可以划去。

表 3-14　西北角法求解第二步

产地	销地				a_i	修正量
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	③ 2	⑥ 9	× 10	× 7	9	6，0
A_2	× 1	② 3	③ 4	× 2	5	3，0
A_3	× 8	× 4	① 2	⑥ 5	7	6，0
b_j	3	8	4	6		
修正量	0	2 0	1 0	0		

用同样的方法，可以得出 $x_{22}=2$(x_{22} 是基变量)，$x_{32}=0$，划去第 2 列。

$x_{23}=3$(x_{23} 是基变量)，$x_{24}=0$，划去第 2 列。

$x_{33}=1$(x_{33} 是基变量)，划去第 3 列。

$x_{34}=6$(x_{34} 是基变量)，同时划去第 3 行和第 4 列。

不难看出，表 3-14 中的各数("×"代表 0)构成了一个可行解(事实上，不断修改 a_i 和 b_j 的过程，就是为了保证所填的数，按行相加等于 a_i，按列相加等于 b_j)；同时，画圈的数恰好等于 $m+n-1=3+4-1=6$。后面将证明，用这种方法求得的解是一个基可行解，而且 $m+n-1$ 个画圈的地方正好是基变量。

本例中，用西北角法求出的初始基可行解 $X^{(0)}$ 的各分量为

$$x_{11}^{(0)}=3,x_{12}^{(0)}=6,x_{22}^{(0)}=2,x_{23}^{(0)}=3,x_{33}^{(0)}=1,x_{34}^{(0)}=6,\text{其余 } x_{ij}^{(0)}=0$$

其对应的目标函数值(总费用)为

$$Z^{(0)}=2\times3+9\times6+3\times2+4\times3+2\times1+5\times6=110$$

【例 3-4】　已知运输问题的运价及产销量表如表 3-15 所示，试用西北角法求初始基可行解。

表 3-15　运输平衡表

产地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	4	3
A_2	2	6	5	3	5
A_3	1	4	2	7	8
销量	2	1	7	6	16

解　首先取

$$x_{11}^{(0)}=\min\{a_1, b_1\}=\min\{3,2\}=2$$

在 x_{11} 处填②，则 $x_{21}^{(0)}=x_{31}^{(0)}=0$，在 x_{21}，x_{31} 处打“×”。第 1 列已饱和，可以划去(见表 3-16)。

表 3-16　西北角法求解过程

产地	销地								产量	修正量
	B_1		B_2		B_3		B_4			
A_1	②	2	①	9	×	10	×	7	3	1,0
A_2	×	1	⓪	3	⑤	4	×	2	5	0
A_3	×	8	×	4	②	2	⑥	5	8	6,0
销量	2	1	7	6	16					
修正量	0	0	2 0	0						

再考虑 x_{12}，令 $x_{12}^{(0)}=\min\{a_1, b_2\}=\min\{1,1\}=1$。

在 x_{12} 处填①，这时 x_{13}，x_{14} 及 x_{22}，x_{32} 都必须为 0，即第 1 行和第 2 行同时饱和。在这种情况下，规定只在一个方向上打“×”。例如，若在第 1 行上打“×”，即取 $x_{13}^{(0)}=x_{14}^{(0)}=0$。且 x_{13}，x_{14} 为非基变量。这时划去第 1 行，而第 2 列的修正量为 0。

再考虑 x_{22}，令

$$x_{22}^{(0)}=\min\{a_2, b_2\}=\min\{5,0\}=0$$

在 x_{22} 处填 0，表示 x_{22} 为基变量，但取值为 0(属退化的解)，这时再在 x_{32} 处打“×”，划去第 2 列。

继续做下去，可以得到

$$x_{23}^{(0)}=5, x_{24}^{(0)}=0, x_{33}^{(0)}=2, x_{34}^{(0)}=6, \text{其余 } x_{ij}^{(0)}=0$$

相应的目标函数值为

$$Z^{(0)}=7\times2+8\times1+6\times0+5\times5+2\times2+7\times6=93$$

注意，在 x_{22} 处写 0 并画圈，主要是使带圈的数目保持为 $m+n-1$ 个。因为前面已经说过，画圈的地方正好是基变量，而基变量必须是 $m+n-1$ 个。一般在用西北角法求初始解时，应注意以下几点：

(1) 在填入一个画圈的数时，如果行和列同时饱和，规定只划去一行或一列，而不能同时划去行和列。这时，行和列的修正量均为 0，如果划去的是行(或列)，下次遇到修正量为 0 的列(或行)时，就必须在相应的西北角位置，取变量的值为 0，并加上圈。这表明该基变量取 0 值(属于退化的解)，

它与不填数字的地方取 $x_{ij}=0$ 是不同的，前者是基变量取 0 值，后者是非基变量取 0 值。这样可以保证画圈的数恰为 $m+n-1$。

(2) 在剩下最后一个空格时，只能填数(必要时可取 0)并画圈，以保证画圈的数为 $m+n-1$。

(3) 在某一行(或列)填最后一个数时，若行和列同时饱和，则规定只划去该行(或列)，下次再遇到该列时，应写 0 并画圈。

如在例 3-4 中，A_3 的变量由 8 改为 2，B_4 的销量由 6 改为 0，则在填入 $x_{33}=2$ 时，第 3 行与第 3 列均已饱和。这时的第 3 列再无填数的空格，故应先划去这一列。最后在 x_{34} 处填⑩，这样才不致使画圈的数减少。

西北角法的算法归纳如下：

在运算过程中，若以 I 表示当前还有货物可运出的产地 A_i 的下标集合，以 J 表示当前需求量尚未得到满足的销地 B_j 的下标集合，以 Δ 表示已画圈点的集合(即基变量的集合)，则西北角法的算法步骤如下：

(1) $I=\{1,2,\cdots,m\}$，$J=\{1,2,\cdots,n\}$；$\Delta=\Phi$，$x_{ij}=0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

(2) 确定 p 和 q；取 $p=\min\{i|i\in I\}$，$q=\min\{j|j\in J\}$。

(3) 取 $\varepsilon=\min\{a_p,b_q\}$，令 $x_{pq}=\varepsilon$ 并加圈填入 A_p 与 B_q 交叉处的格子点。修改 $a_p=a_p-\varepsilon$，$b_q=b_q-\varepsilon$，$\Delta=\Delta\cup\{x_{pq}\}$，若 $a_p=0$，则取 $I=I-\{P\}$；若 $b_q=0$，则取 $J=J-\{q\}$。

(4) 判断是否满足 $a_p+b_q=0$。若满足则转向(5)，否则返回(2)。

(5) 判断是否有 $I=\Phi$，若是则 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为所求，Δ 为基变量集合，算法停止；否则，取 $\Delta=\Delta\cup\{x_{p,q+1}\}$ 或 $\Delta=\Delta\cup\{x_{p+1,q}\}$，令 $x_{p,q+1}=0$ 或 $x_{p+1,q}=0$ 并加圈填入相应的位置，返回(2)。用西北角法求得的解是基可行解，且画圈的个数恰为 $m+n-1$。

二、最小元素法

用西北角法制定运输问题的初始调运方案时，完全没有考虑运价的大小这个因素，这显然与常理不合。如果考虑运价的大小，应遵循如下规划：优先安排单位运价最小的产地与销地之间的运输业务。依次安排最小元素、次小元素，从而得到一个初始基可行解。这种算法称为最小元素法。显然，用这种方法制定出来的调运方案，其总运费一般会比用西北角法制定的调运方案省(当然也不一定是最省的)。

和一般线性规划问题一样，运输问题的最优解也一定可以在其基可行解中找到。类似于单纯形法，最小元素法仍然需要解决如下问题：初始基可行解的确定；最优解的判定；基可行解的转换。

1. 初始基可行解的确定

这种方法的基本思想就是就近供应，即从单位运价表中最小的运价开始确定供销关系，然后次小，一直到求出初始基可行解为止。下面结合例 3-5，给出最小元素法的具体步骤。

【例 3-5】 设有某物资从 A_1，A_2，A_3 处运往 B_1，B_2，B_3，B_4 四个地方，各处供应量(产量)、需求量(销量)及单位运价见表 3-17。问应如何安排运输方案，才能使总运费最少？

表 3-17 例 3-5 运输平衡表

产地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	7	6	4	50
A_2	2	4	3	3	20
A_3	8	3	8	9	30
销量	40	20	15	25	100 \ 100

(1) 列出如表 3-18 所示的调运表(包括单位运价、产量与销量)。

表 3-18　最小元素法求解

产地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	20 3	× 7	5 6	25 4	50
A_2	20 2	× 4	× 3	× 3	20
A_3	× 8	20 3	10 8	× 9	30
销量	40	20	15	25	

(2) 在调运表中找出一个单位运价最小的格子，在相应的运量位置上填上尽可能大的数(必须满足约束条件)。如在表 3-18 中，单位运价 $c_{21}=2$ 为最小，这样在 c_{21} 所在格子相应运量的位置上填上尽可能大的数 20(满足 A_2 产量为 20 的约束条件)。

(3) 在填有数字的格子的所在行或列的运量应该为 0 的位置上打"×"(即表示该运量为 0，相应的变量为非基变量)，且只能在行或列的方向上打"×"，不能同时在两个方向上打"×"。如第 2 行第 1 个填有运量为 20 的格子，由于 A_2 的供应量已全部用完，因此，该行的其他格子的运量应全部为 0，这样在相应的运量位置上打"×"。

(4) 在既没有填数也未打"×"的格子重复上述步骤(2)、(3)。

(5) 最后剩下的一行或列只能填数，不能打"×"。

表 3-18 中给出的 $x_{11}=20$，$x_{13}=5$，$x_{14}=25$，$x_{21}=20$，$x_{32}=20$，$x_{33}=10$，其他 $x_{ij}=0$，显然是该运输问题的一个可行解；同时，调运表中不包含以这些非零变量为顶点的闭回路。因此，该可行解就是该运输问题的一个基可行解。更一般地，可以证明，由最小元素法给出的可行解就是运输问题的一个基可行解。

2. 最优解的判定

最优解的判定通常有两种方法，即闭回路法和位势法。

(1) 闭回路法。在表 3-18 所描述的调运表中，任一非基可变量都可以作出这样的闭回路：该闭回路以选定的非基变量为第一个顶点，其余的顶点都是基变量。可以证明，对于任一非基变量，这样的闭回路只有一条。

在这样的闭回路上，可以对调运方案进行调整，能使调运方案仍然满足所有约束条件，即满足产销平衡的要求。例如，对表 3-18 中的非基变量 x_{12} 作闭回路，如表 3-19 所示。

表 3-19　最小元素法闭回路

产地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	20 3	7	5 6	25 4	50
A_2	20 2	4	3	3	20
A_3	8	20 3	10 8	9	30
销量	40	20	15	25	

在表 3-19 中所示的闭回路上，为满足产销平衡条件，若要使 x_{12} 增加 1 个单位运量，x_{13} 就必须减少 1 个单位运量，同时 x_{33} 必须增加 1 个单位运量，x_{32} 须减少 1 个单位运量。

再来观察经过这样调整后的目标函数的变化：x_{12} 增加 1 个单位运量，则运费增加 7 个单位；x_{13} 减少一个单位运量，则运费减少 6 个单位；x_{33} 增加 1 个单位运量，则运费增加 8 个单位；x_{32} 减少一个单位运量，则运费减少 3 个单位。这样，调整后的目标函数总的变化量为 $7-6+8-3=6$，即目标函数增加 6 个单位。因此，以上的调整是不合算的，即以 x_{12} 为非基变量的选择是正确的。

这种在闭回路上进行的 1 个单位运量的调整所得到的目标函数值的变化量，实际上是相应非基变量的检验数。如上述 x_{12} 的检验数 $\sigma_{12}=6$，由于运输问题为极小化，所以若所有的非基变量的检验数都大于等于零，则得到的基可行解就是最优解；否则，就要进行基可行解的转换。

对表 3-18 中所有非基变量的检验数的计算过程如表 3-20 所示。

表 3-20 非基变量的检验数的计算过程

非基变量	闭回路	检验数
x_{12}	$x_{12}\rightarrow x_{13}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{12}$	6
x_{22}	$x_{22}\rightarrow x_{21}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{13}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{22}$	4
x_{23}	$x_{23}\rightarrow x_{21}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{13}\rightarrow x_{23}$	-2
x_{24}	$x_{24}\rightarrow x_{21}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{14}\rightarrow x_{24}$	0
x_{31}	$x_{31}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{13}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{31}$	3
x_{34}	$x_{34}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{13}\rightarrow x_{14}\rightarrow x_{34}$	3

x_{23} 的检验数 $\sigma_{23}=-2<0$，故表 3-18 中的基可行解不是最优解。

（2）位势法。当运输问题变量的个数较多时，闭回路法计算比较烦琐，此时位势法更为简便。对于运输问题

$$\min z=CX$$
$$AX=b$$
$$X\geqslant 0$$

设 B 为其一可行解，则相应的基可行解的各变量的检验数可用下式计算，即

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-C_B B^{-1} p_{ij}$$

又运输问题的对偶问题

$$\max z=YB$$
$$YA\leqslant C$$
$$Y \text{ 无限制}$$

其中，$Y=(u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_n)$ 为对偶变量，各分量分别对应 $m+n$ 个条件。根据对偶理论有

$$Y=C_B B^{-1}$$

因此有

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-Yp_{ij}$$

又因为 p_{ij} 中除第 i 个元素和第 $m+j$ 个元素为 1 以外，其余元素均为 0，即 $p_{ij}=e_i+e_{m+j}$，所以有

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}&=c_{ij}-Yp_{ij}=c_{ij}-(u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_n)p_{ij}\\&=c_{ij}-(u_i+v_j)\end{aligned}$$

而所有基变量的检验数等于 0，因此有

$$c_{ij}-(u_i+v_j)=0$$

即
$$u_i+v_j=c_{ij}\quad (i,j)\in I(\text{基变量下标集})$$

由于 u_i 对应于调运表中的第 i 行，故称其为第 i 行的行位势；v_j 对应于调运表中的第 j 列，故称其为第 j 列的列位势。

位势法的具体计算步骤如下：

(1) 在调运表中，对于每个基变量都按公式 $u_i+v_j=c_{ij}$ 列出一个位势方程，形成位势方程组。

(2) 任意决定其中一个位势的数值，然后求出其他位势的数值。

(3) 按公式 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$ 计算非基变量的检验数，若所有非基变量的检验数均大于等于 0，则调运表中的基可行解就是最优解，否则就不是最优解。

下面用位势法对表 3-18 中的基可行解进行最优性检验，如表 3-21 所示。

表 3-21　位势法求解

产地	销地				产量	行位势
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	20 3	7	5 6	25 4	50	u_1
A_2	20 2	4	3	3	20	u_2
A_3	8	20 3	10 8	9	30	u_3
销量	40	20	15	25		
列位势	v_1	v_2	v_3	v_4		

位势方程组为

$$u_1+v_1=3\qquad u_1+v_4=4\qquad u_3+v_2=3$$
$$u_1+v_3=6\qquad u_2+v_1=2\qquad u_3+v_3=8$$

取 $u_1=0$，解上述方程组得

$$u_1=0,u_2=-1,u_3=2\qquad v_1=3,v_2=1,v_3=6,v_4=4$$

各非基变量的检验数为

$$\sigma_{12}=c_{12}-(u_1+v_2)=7-(0+1)=6>0$$
$$\sigma_{22}=c_{22}-(u_2+v_2)=4-(-1+1)=4>0$$
$$\sigma_{23}=c_{23}-(u_2+v_3)=3-(-1+6)=-2<0$$
$$\sigma_{24}=c_{24}-(u_2+v_4)=3-(-1+4)=0$$
$$\sigma_{31}=c_{31}-(u_3+v_1)=8-(2+3)=3>0$$
$$\sigma_{34}=c_{34}-(u_3+v_4)=9-(2+4)=3>0$$

由于 $\sigma_{23}=-2<0$，故表 3-21 中的基可行解不是最优解。

3. 基可行解的转换

当调运表中仍然有非基变量的检验数为负时，则说明问题还没有得到最优解，需要进行基可行解的转换。具体办法为：

(1) 以某一个 $\sigma_{ij}<0$(若有多个则取最小者)对应的变量 x_{ij} 作为进基变量。

(2) 以所选的 x_{ij} 为第一个顶点作闭回路，该闭回路除 x_{ij} 外，其余顶点都是基变量，并排序。

(3) 以顺序为偶数的顶点的基变量最小值 $\min\{(x_{ij})_k|k$ 为偶数$\}$ 作为调整量，在顺序为奇数的顶点上加上该调整量，在顺序为偶数的顶点上减去该调整量，即可得到新的基可行解。

这里对表 3-18 中的基可行解进行转换。

由于 $\sigma_{23}=-2<0$，故以 x_{23} 为进基变量，并以 x_{23} 为第一个顶点作闭回路，如表 3-22 所示。

表 3-22 位势法基可行解转换

产地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3 / 20	7	6 / 5	4 / 25	50
A_2	2 / 20	4	3 / x_{23}	3	20
A_3	8	3 / 20	8 / 10	9	30
销量	40	20	15	25	

该闭回路上，偶数顶点上的基变量最小值为 5，以该调整量进行调整得到如表 3-23 所示的新的基可行解。

表 3-23 闭回路调整

产地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3 / 25	7	6	4 / 25	50
A_2	2 / 15	4	3 / 5	3	20
A_3	8	3 / 20	8 / 10	9	30
销量	40	20	15	25	

新基可行解的位势方程组为

$$u_1+v_1=3 \qquad u_2+v_1=2 \qquad u_3+v_2=3$$
$$u_1+v_4=4 \qquad u_2+v_3=3 \qquad u_3+v_3=8$$

取 $u_1=0$，解上述方程组得

$$u_1=0, u_2=-1, u_3=4 \qquad v_1=3, v_2=-1, v_3=4, v_4=4$$

各非基变量的检验数为

$$\sigma_{12}=7-(0-1)=8>0 \qquad \sigma_{24}=3-(-1+4)=0$$
$$\sigma_{13}=6-(0+4)=2>0 \qquad \sigma_{31}=8-(4+3)=1>0$$
$$\sigma_{22}=4-(-1-1)=6>0 \qquad \sigma_{34}=9-(4+4)=1>0$$

由于所有非基变量的检验数均大于等于 0，故从表 3-23 中得到最优解为

$$x_{11}=25, x_{14}=25, x_{21}=15, x_{23}=5, x_{32}=20, x_{33}=10, \text{其他 } x_{ij}=0$$

最优目标值为

$$z^*=3\times25+4\times25+2\times15+3\times5+3\times20+8\times10+4\times25+4\times25=560$$

此外，由于 $\sigma_{24}=0$，故此问题有另一最优基可行解。具体求法是在表 3-22 中，以 x_{24} 为进基变量作闭回路，进行调整后得到。

由上面分析可知，表上作业法的实质是用单纯形法求解像运输问题这类的特殊形式的线性规划问题的简化方法，因而也称它为运输单纯形法。

总结表上作业法的解题步骤如下：

(1) 编制调运表(包括产销平衡表及单位运价表)。

(2) 在调运表上求出初始基可行解。

(3) 用位势法或闭回路法计算非基变量的检验数。若所有非基变量的检验数均大于等于 0,则已得到问题的最优解,即可停止计算;否则转入下一步。

(4) 选取小于 0 的检验数中的最小者所对应的变量作为进基变量,用闭回路法进行基可行解的转换,得到新的基可行解,转入步骤(3)。

【例 3-6】 用最小元素法求本节例 3-1 的初始调运方案。

解 首先从运价表(c_{ij})上的最小元素所处的格子(若有几个格子同时达到最小值,则可任取其中一个)开始分配,其余做法与西北角法大体一致。

本例中,第一个最小元素为 1,故先定 x_{21} 的值。和前面一样,令 x_{21} 为基变量,给 x_{21} 以尽可能大的值。即令 $c_{21}=1$

$$x_{21}^{(0)}=\min\{a_2,b_1\}=\min\{5,3\}=3$$

在 x_{21} 处填入③,并在 x_{11},x_{31} 处打"×",即令 $x_{11}^{(0)}=x_{31}^{(0)}=0$,这时第 1 列的修正量为 0,即第 1 列已饱和,可以划去。第 2 行的修正量为 5－3＝2(见表 3-24)。

再在剩下的运价表上找最小元素,这里 $c_{24}=c_{33}=2$ 都是最小,可任取一个。如取 c_{33},则令

$$x_{33}^{(0)}=\min\{a_3,b_3\}=\min\{7,4\}=4$$

在 x_{33} 处填入④,并在 x_{13},x_{23} 处打"×",即令 $x_{13}^{(0)}=x_{23}^{(0)}=0$。划去第 3 列。

用同样的方法可得:

$x_{34}^{(0)}=2$,$x_{22}^{(0)}=0$,划去第 2 行;$x_{32}^{(0)}=3$,$x_{34}^{(0)}=0$,划去第 3 行;$x_{14}^{(0)}=4$,划去第 4 列;$x_{12}^{(0)}=5$。同时划去第 1 行和第 2 列。

表 3-24　最小元素法求解过程

产地	销地								产量	修正量
	B_1		B_2		B_3		B_4			
A_1	×	2	⑤	9	×	10	④	7	9	5,0
A_2	③	1	×	3	×	4	②	2	5	2,0
A_3	×	8	③	4	④	2	×	5	7	3,0
销量	3	8	4	6						
修正量	0	5 0	0	4 0						

相应的目标函数值(总费用)为

$$Z^{(0)}=9\times5+7\times4+1\times3+2\times2+4\times3+2\times4=100$$

由此可以看出,用最小元素法找出的初始基可行解比用西北角法求出的结果要好些。

在使用最小元素法时应注意的问题与在西北角法中强调的三点相同,这里不再重复。这样,在使用最小元素法时应注意的问题中,除了在西北角法中说明的三点外,还应加上一条,即:在只剩下一行或一列还未填数或打"×"的格子中,按余额分配,只准填数画圈(必要时写 0 画圈),不准打×。这样做也是为了保证画圈的数字个数为 $m+n-1$ 个。现将最小元素法的算法步骤归纳如下:

(1) $I=\{1,2,\cdots,m\}$,$J=\{1,2,\cdots,n\}$;$\Delta=\Phi$,$x_{ij}=0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

(2) 确定 p 和 q,取 $c_{pq}=\min\{c_{ij}\mid i\in I,j\in J\}$。

(3) 取 $\varepsilon=\min\{a_p,b_q\}$,令 $x_{pq}=\varepsilon$ 并加圈填入 A_p 与 B_q 交叉处的格子点。修改 $a_p=a_p-\varepsilon$,$b_q=$

$b_q-\varepsilon$，$\Delta=\Delta\cup\{x_{pq}\}$。若 $a_p=0$，则取 $I=I-\{P\}$；若 $b_q=0$，则取 $J=J-\{q\}$。

(4) 判断是否满足 $a_p+b_q=0$，若满足则转(5)，否则返回(2)。

(5) 判断是否满足 $I=\Phi$，若满足则 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为所求，$\Delta$ 为基变量集合，算法停止；否则，取 $c_{rs}=\min\{c_{ij}\mid i\in I,j\in J,\Delta=\Delta\cup\{x_{rs}\}\}$，令 $p=r,q=s$，返回(3)。

西北角法与最小元素法的比较如下：

西北角法的最大优点是实现简单，特别适合编制程序上机计算，但缺点是所制定的初始方案往往离最优解较远，后面的调整量较大；而最小元素法的最大优点是制定的初始方案一般离最优解较近，后面调整量较小。但要在一张大型的运价表上每次搜索最小元素，其计算量也是很可观的(即使是在计算机上搜索也是如此)。当然，当问题的规模不大，用手工计算时，可以通过人的判断力，很快找到最小元素，这样也不会花费太多的计算量。因此，用手工计算时，一般使用最小元素法求初始调运方案较好。

最后，我们证明这两种算法所共有的一个重要性质。

定理 4 用西北角法或最小元素法得到的一组变量的值是运输问题的一个基可行解，而圈中的数恰是对应的基变量的值，个数为 $m+n-1$。

证 首先根据$\{x_{ij}\}$的取法可知，每填一个画圈的数，就要修改相应行的产量和列的需求量，因而这样得到的一个解必是问题的一个可行解。

其次，我们证明画圈的个数恰是 $m+n-1$。因为采用这两种方法，每填一个画圈的数，就要划去一行或一列，即行数和列数之和总是减少 1。如表 3-25 所示。

表 3-25 基变量个数

行数+列数	画圈的个数
$m+n$	0
$m+n-1$	1
$m+n-2$	2
⋮	⋮
3	$m+n-3$
2	$m+n-2$

不难看出，若表中至少有两行，则划去一行后，行数和列数之和就减少 1。对于划去的列也有类似的结论。但表中若只有一行时，这个结论就不对了。如有一行四列，那么行数与列数之和就为 5，而划去一行，则行数和列数之和就变成 0 了。为了避免出现这种情况，在最小元素法中，在只剩下一行(或一列)时，不准打“×”，而在西北角法中，在只剩下一行(或一列)时，永远不会出现打“×”的情况。因此，每填一个画圈的数，行数和列数之和永远减少 1(见表 3-25)。

在填了 $m+n-2$ 个画圈的数之后，行数与列数之和为 2，即只剩下一行一列(即一个格子点)，这时显然只能再填一个数，就把所有的行和列消去了，故一共填了 $m+n-1$ 个画圈的数。

下面再证明，这 $m+n-1$ 个画圈的数对应的变量集合不包含闭回路。

用反证法。假设这组画圈的数中含有一个闭回路，如图 3-1 所示。为了简单起见，我们仅选择了 4 个画圈的点构成的闭回路，一般情况的证明完全一样。假定在填 $x_{i_1j_1}$ 这个画圈的数时划去的是行，那么 $x_{i_1j_2}$ 这个数就一定要比 $x_{i_1j_1}$ 先填，并且填 $x_{i_1j_2}$ 时划去的应是列。由此，$x_{i_2j_2}$ 这个数要比 $x_{i_1j_1}$ 先填，而且填 $x_{i_2j_2}$ 时划去的应是行，这又说明 $x_{i_2j_1}$ 一定比 $x_{i_2j_2}$ 先填，而且填 $x_{i_2j_1}$ 时划去的应是列。这样一来，$x_{i_1j_1}$ 处根本就

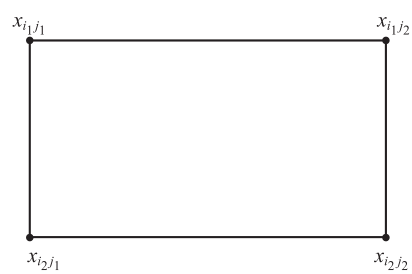


图 3-1 定理 4 的证明

不能填数了，因而得出矛盾，故这组变量不含闭回路。再由推论 3 可知，这 $m+n-1$ 个画圈的数必是基变量的值。

综上所述，用西北角法和最小元素法得到的一个解 $\{x_{ij}\}$，其中画圈的个数恰为 $m+n-1$，且不含闭回路，因而这个解一定是基可行解。

三、元素差额法

元素差额法又称 vogel 近似法，是在最小元素法的基础上改进的一种求初始方案的方法。在分配运量以确定产销关系时，不是从最小元素开始，而是从运价表中各行和各列的最小元素和次小元素之差额来确定产销关系，因而得名。

下面结合具体例子来介绍元素差额法的计算步骤。

【例 3-7】 用元素差额法求下列运输问题的初始调运方案(见表 3-26)。

表 3-26　元素差额法求解过程

产地	销地				产量	差额		
	B_1	B_2	B_3	B_4				
A_1	× 5	× 15	⑤ 3	② 14	7	2	2	11
A_2	③ 1	× 9	× 2	① 7	4	1	1	5
A_3	× 7	⑥ 4	× 11	③ 5	9	1	2	6
销量	3	6	5	6	20			
差额	4	5	1	2				
	4		1	2				
			1	2				

解　第一步：找出运价表上每行运价中的最小元素和次小元素，并计算其差额，填入表的右边“差额”栏的第 1 列；找出运价表上每列运价中的最小元素和次小元素，并计算其差额，填入表下边“差额”栏的第 1 行。

例如，由表 3-26 的第 1 行可以看出：从 A_1 运往 B_3 的运价最小，即 $c_{13}=3$；运往 B_1 的运价为次小，即 $c_{11}=5$。它们的差额是 2，所以在 A_1 行的右边写上差额 2。又如，由表的第 1 列可以看出：从 A_2 运往 B_1 的运价 $c_{21}=1$ 最小；从 A_1 运往 B_1 的运价 $c_{11}=5$ 为次小，它们的差额是 4。用同样的方法可求出其他各行和各列的差额，见表 3-26 所示的第 1 列差额和第 1 行差额。

第二步：在第 1 列差额和第 1 行差额中选出差额最大者，并对该最大差额所在的行(或列)中的最小元素进行分配(分配的方法与最小元素法相同)。若出现有几个相同的最大差额的行或列，则可任取一行或一列进行分配。

在本例的 7 个差额(分别是 2，1，1 和 4，5，1，2)中，最大者是 5，它出现在 B_2 列。而 B_2 列中的最小元素是 4，它所在的行是第 3 行，于是要定出 x_{32} 的值。和前面一样，令 x_{32} 为基变量，并给 x_{32} 以尽可能大的值，即令

$$x_{32}=\min\{a_3,b_2\}=\min\{9,6\}=6$$

在 x_{32} 格左上角填上 6 并画圈，在 x_{12}，x_{22} 格左上角打“×”，同时修改 $a_3=9-6=3$，$b_2=6-6=0$。即 B_2 列已饱和，可以划去(见表 3-26)。

第三步：在新的运价表上(B_2 列已划去)重新计算差额，重复上述步骤。

在本例中，新的 6 个差额(2，1，2 和 4，1，2)中的最大者是 4，它出现在 B_1 列。而 B_1 列中最小元素是 1，它所在的行是第 2 行。故要定出 x_{21} 的值，令

$$x_{21}=\min\{a_2,b_1\}=\min\{4,3\}=3$$

在 x_{21} 处填上 3 并画圈，在 x_{11}，x_{31} 处打“×”，同时修改 $a_2=4-3=1$，$b_1=3-3=0$。即 B_1 列已饱和，可以划去(见表 3-26)。

再计算新的差额，重复第 1 步和第 2 步。

表 3-26 中第三次差额有 5 个(11，5，6 和 1，2)，其中最大差额为 11，它出现在 A_1 行，这一行的最小元素是 3(已填过、打过“×”的格子不再考虑)，它是在第 3 列，所以要定出 x_{13}。令

$$x_{13}=\min\{a_1,b_3\}=\min\{7,5\}=5$$

在 x_{13} 处填上 5 并画圈，在 x_{23}，x_{33} 处打上“×”。同时修改 $a_1=7-5=2$，$b_3=5-5=0$，划去 B_3 列。

在剩下最后一行或一列按余额分配时，只准填数画圈(必要时填 0 画圈)，不准打“×”，以确保画圈的数字个数为 $m+n-1$。

这里最后剩下 B_4 列，先就其中的最小元素 $c_{34}=5$ 处分配，令

$$x_{34}=\min\{a_3,b_4\}=\min\{3,6\}=3$$

在 x_{34} 处填上 3 并画圈，同时修改 $a_3=3-3=0$，$b_4=6-3=3$，这时第 3 行已饱和，可以划去。

再考虑 B_4 列剩下的元素中最小者 $c_{24}=7$，令

$$x_{24}=\min\{a_2,b_4\}=\min\{1,3\}=1$$

在 x_{24} 处填上 1 并画圈，同时修改 $a_2=1-1=0$，$b_4=3-1=2$，这时第 2 行已饱和，可以划去。

最后剩下 $c_{14}=14$。令

$$x_{14}=\min\{a_1,b_4\}=\min\{2,2\}=2$$

在 x_{14} 处填上 2 并画圈。至此已全部分配完毕，这样便得初始调运方案(见表 3-26)，其对应的运费为

$$Z=3\times5+14\times2+1\times3+7\times1+4\times6+5\times3=92$$

如果用元素差额法求解本节例 3-1，所得的初始调运方案见表 3-27。对应的运费为

$$Z=2\times3+9\times5+7\times1+2\times5+4\times3+2\times4=88$$

表 3-27　元素差额法运算的初始调运方案

产地	销地				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	③ 2	⑤ 9	× 10	① 7	9
A_2	× 1	× 3	× 4	⑤ 2	5
A_3	× 8	③ 4	④ 2	× 5	7
销量	3	8	4	6	21

具体演算请读者自行完成。

显然，从计算的角度考虑，元素差额法比西北角法和最小元素法都要好，所得的初始解更接近最优解。但它也有不足之处，即每次都要计算最小元素与次小元素的差额，其计算量也不小。

第三节　运输问题的应用

这一节要给出的是利用运输问题来解决实际问题，许多应用和运输并没有直接联系，但只要能转化为运输问题进行分析，就可以通过它来获得解决方案。

一、一般的产销不平衡运输问题

【例 3-8】 表 3-28 给出了三个产地及四个销地的某物资供应量与需求量，以及从各产地到各销

地的单位物资运价,试求出运费最小的运输方案。

表 3-28 不平衡运输表

产地	销地				供应量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	2	4	5	200
A_2	7	5	2	1	100
A_3	9	6	3	5	150
需求量	50	100	150	50	450 / 350

解 由表 3-28 可知,总供应量为 450,总需求量为 350,即问题为产大于销的运输问题。因此,需要设想一个销地 B_5,其需求量为 $450-350=100$。但问题并未给出物资的存储费用,因此,从各产地到 B_5 的单位运价视为 0,即 $c_{i5}=0(i=1,2,3)$,得到新的产销平衡表如表 3-29 所示。

表 3-29 新的产销平衡表

产地	销地					供应量
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	2	4	5	0	200
A_2	7	5	2	1	0	100
A_3	9	6	3	5	0	150
需求量	50	100	150	50	100	450 / 450

用表上作业法解得该问题的最优运输方案为:$x_{11}=25$,$x_{12}=100$,$x_{15}=50$,$x_{23}=50$,$x_{24}=50$,$x_{33}=100$,$x_{35}=50$。其中,$x_{15}=50$,$x_{35}=50$ 表示 A_1,A_3 各有 50 个单位的物资库存。总运费为 800 元。

【例 3-9】 某运输问题有三个产地和三个销地,产地的总供应量小于销地的最高需求量之和,但超过了销地的最低需求量之和。现在,各销地的最低需求量必须被满足,最低需求量到最高需求量之间的需求量若不能被满足,就会造成经济损失,其中 B_1 销量必须被满足,B_2,B_3 不能被满足的单位损失分别为 3 元和 2 元。单位运价、供应量与需求量如表 3-30 所示,求出最优调运方案。

表 3-30 单位运价、供应量与需求量

产地	销地			供应量
	B_1	B_2	B_3	
A_1	5	1	7	200
A_2	6	4	6	800
A_3	3	2	5	150
最低需求量 最高需求量	600 600	120 200	300 430	1 150

解 B_2 的最高需求量与最低需求量不相等,而 B_1 的最低需求量必须被满足,因此可将 B_2 看成两个销地 B_{21} 和 B_{22},其中 B_{21} 的需求量为 B_2 的最低需求量,该需求量必须满足;B_{22} 的需求量为 B_2 的最高需求量减去最低需求量,即 $200-120=80$,该需求量可以不被满足。对销地 B_3 也进行同样的处理。这样问题就变为一个三个产地、五个销地的运输问题,其中总产量为 1 150,总需求量为 1 230,因此其是一个销大于产的问题。为求解此问题,又要假设一个产地 A_4,其产量为 1 230－

1 150＝80。为了使各销地的最低销量得到满足，可令 A_4 运往 B_1，B_{21}，B_{31} 的运价为 M，即给出一个很高的运价。这样就可以得到产销平衡表，如表 3-31 所示。

表 3-31 产销平衡表

产地	销地					供应量
	B_1	B_{21}	B_{22}	B_{31}	B_{32}	
A_1	5	1	1	7	7	200
A_2	6	4	4	6	6	800
A_3	3	2	2	5	5	150
A_4	M	M	3	M	2	80
需求量	600	120	80	300	130	1 230 / 1 230

用表上作业法求解，可以得到如表 3-32 所示的调运方案。

表 3-32 最优调运表

产地	销地					供应量
	B_1	B_{21}	B_{22}	B_{31}	B_{32}	
A_1		120	80			200
A_2	450			300	50	800
A_3	150					150
A_4					80	80
需求量	600	120	80	300	130	1 230 / 1 230

从最优调运表中可以看出，B_1 和 B_2 的需求量全部得到满足，而 B_3 的需求量满足了 350。总运费(包括缺货损失费 160 元)为 5 610 元。

【例 3-10】 设有三个化肥厂供应四个地区的农用化肥。假设每个地区使用各厂的化肥效果相同，各化肥厂年产量、各地区的需要量(单位：万吨)和从各化肥厂到各地区运送化肥的运价(万元/万吨)如表 3-33 所示。试求使总运费最低的化肥调运方案。

表 3-33 化肥需求情况表

化肥厂	地区				产量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	16	13	22	17	50
A_2	14	13	19	15	60
A_3	19	20	23	—	50
最低需求	30	70	0	10	
最高需求	50	70	30	不限	

解 这是一个产销不平衡的运输问题，总产量为 160 万吨，四个地区的最低需求量为 110 万吨，最高需求量不限。根据现有产量，在满足 B_1，B_2 和 B_3 地区最低需求的情况下，最多能供应 B_4 地区 (50＋60＋50)－(30＋70＋0)＝60(万吨)。

这四个地区的最高需求量为

$$50+70+30+60=210(\text{万吨})$$

大于产量。

为求得平衡，在产销平衡表中，增加一个假想的化肥厂 A_4，其年产量为

$$210-160=50(\text{万吨})$$

由于各地区的需求量包括两部分：最低需求量和额外需求量部分（最高需求量减去最低需求量），前者必须满足，后者在有条件时尽量满足。如地区 B_1 的最低需求量是 30 万吨，它是必须要满足的，所以不能由假想化肥厂 A_4 供应。为此，令单位运量为 M(充分大的正数)，而另一部分为 50－30＝20(万吨)，这属于额外需求部分，只是在有条件时尽量满足，因此可以考虑由假想的化肥厂 A_4 供应，为此令相应的运价为 0。其他地区都可做类似的分析，即凡是对需求量分成两部分的地区，实际上都可以按两个地区来对待。这样就可以将原运输表(表 3-33)改写成如表 3-34 所示的运输表。

表 3-34 运输表

化肥厂	地区						供应量
	B_1'	B_1''	B_2	B_3	B_4'	B_4''	
A_1	16	16	13	22	17	17	50
A_2	14	14	13	19	15	15	60
A_3	19	19	20	23	M	M	50
A_4	M	0	M	0	M	0	50
需求量	30	20	70	30	10	50	210

这样将原问题转化为一个平衡运输问题，根据表上作业法，可求得这个问题的最优调运方案，见表 3-35。

表 3-35 最优调运方案

化肥厂	地区						供应量
	B_1'	B_1''	B_2	B_3	B_4'	B_4''	
A_1			50				50
A_2			20		10	30	60
A_3	30	20	0				50
A_4				30		20	50
需求量	30	20	70	30	10	50	210

由表 3-35 可以看出，地区 B_1 的最高需求量 50 万吨全部满足了，地区 B_4 供应了 40 万吨，而地区 B_3 没有供应，地区 B_2 的 70 万吨是必须保证供应的，这种供应方式显然是合理的。

二、生产与存储问题

【例 3-11】 某高科技企业生产某种光电通信产品，现要安排今后四个季度的生产计划。已知今后四个季度的合同签订数、企业各季度生产能力及生产成本如表 3-36 所示。考虑资金的机会成本，预计每件产品每存储一个季度的费用为 100 元。在完成合同的条件下，试安排这四个季度的生产计划，使生产成本与存储费用之和最小。

表 3-36 各季度的合同签订数、生产能力及生产成本

季度	合同签订数/台	生产能力/台	生产成本/千元
1	230	270	3.2
2	265	280	3.33
3	255	260	3.31
4	245	270	3.42

解 设 x_{ij} 表示第 i 季度生产第 j 季度交货的该种产品的数量，考虑生产成本与存储费用后，x_{ij} 所对应的目标函数中的价格系数 c_{ij} 如表 3-37 所示。

表 3-37 x_{ij} 所对应的价格系数 c_{ij}

i	j			
	1	2	3	4
1	3.2	3.3	3.4	3.5
2		3.33	3.43	3.53
3			3.31	3.41
4				3.42

这样，该问题的数学模型为

$$\min z=3.2x_{11}+3.3x_{12}+3.4x_{13}+3.5x_{14}+3.33x_{22}+3.43x_{23}+3.53x_{24}+3.31x_{33}+3.41x_{34}+3.42x_{44}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leqslant 270 \\ x_{22}+x_{23}+x_{24}\leqslant 280 \\ x_{33}+x_{34}\leqslant 260 \\ x_{44}\leqslant 270 \\ x_{11}=230 \\ x_{12}+x_{22}=265 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=255 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=245 \\ x_{ij}\geqslant 0,i=1,\cdots,4;j=1,\cdots,4;i\geqslant j \end{cases}$$

模型中，前 4 个条件为生产能力约束，后 4 个条件为合同限制约束。观察该模型可知，若将 x_{21}，x_{31}，x_{32}，x_{41}，x_{42}，x_{43} 等变量补齐，则模型变为一个标准的运输问题的数学模型。为了保证模型的性质不变，必须使这些补齐的变量为 0。为此，可在函数目标中令这些变量的系数为 M，这样就得到一个产销不平衡的运输问题。此时，可假设一个销地，将其变成产销平衡问题。产销表及运价表如表 3-38 所示。

表 3-38 产销表及运价表

产地	销地					产量
	1	2	3	4	5	
1	3.2	3.3	3.4	3.5	0	270
2	M	3.33	3.43	3.53	0	280
3	M	M	3.31	3.41	0	260
4	M	M	M	3.42	0	270
销 量	230	265	255	245	85	1 080 / 1 080

用表上作业法,可求得四个季度的生产计划如表 3-39 所示。

表 3-39 生产计划表

产地	销地					产量
	1	2	3	4	5	
1	230	40				270
2		225			55	280
3			255	5		260
4				240	30	270
销量	230	265	255	245	85	1 080 / 1 080

从最优调运表中可以看出:第 1 季度生产 270 台,其中 40 台用于满足第 2 季度需要;第 2 季度生产 225 台;第 3 季度生产 260 台,其中 5 台用于满足第 4 季度需要;第 4 季度则生产 270 台。总运费为 3 299 150 元。

三、转运问题

【例 3-12】 某公司生产某种高科技产品。该公司在大连和广州设有两个分厂生产这种产品,在上海和天津设有两个销售公司负责对南京、济南、南昌和青岛四个城市进行产品供应。因大连与青岛相距较近,公司同意大连也可以直接向青岛供货。各厂产量、各地需要量、线路网络及相应各城市间的每单位产品的运费均标在图 3-2 中,单位为百元。现在的问题是:如何调运这种产品使公司总的费用最小?

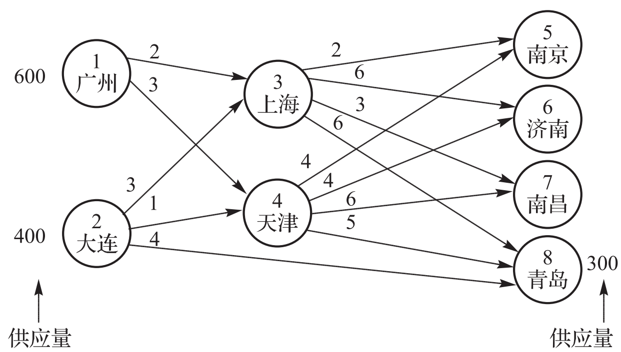


图 3-2 公司运输网络

解 如图 3-2 所示,给各城市编号,即 $i=1,2,\cdots,8$ 分别代表广州、大连、上海、天津、南京、济南、南昌和青岛。

设 x_{ij} 表示从 i 到 j 的调运量(台),则问题的目标函数为

$$\min z=2x_{13}+3x_{14}+3x_{23}+x_{24}+4x_{28}+2x_{35}+6x_{36}+3x_{37}+6x_{38}+4x_{45}+4x_{46}+6x_{47}+5x_{48}$$

对于发货点 1,2,有供应量约束:

$$x_{13}+x_{14}\leqslant 600$$
$$x_{23}+x_{24}+x_{28}\leqslant 400$$

对于中转点 3,4,有平衡约束:

$$x_{13}+x_{23}-x_{35}-x_{36}-x_{37}-x_{38}=0$$
$$x_{14}+x_{24}-x_{45}-x_{46}-x_{47}-x_{48}=0$$

对于需求点 5,6,7,8,有需求量约束:

$$x_{35}+x_{45}=200$$
$$x_{36}+x_{46}=150$$
$$x_{37}+x_{47}=350$$
$$x_{38}+x_{48}+x_{28}=300$$

由此可得到该问题的线性规划模型为

$$\min z=2x_{13}+3x_{14}+3x_{23}+x_{24}+4x_{28}+2x_{35}+6x_{36}+3x_{37}+6x_{38}+4x_{45}+4x_{46}+6x_{47}+5x_{48}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_{13}+x_{14}\leqslant 600\\x_{23}+x_{24}+x_{28}\leqslant 400\\x_{13}+x_{23}-x_{35}-x_{36}-x_{37}-x_{38}=0\\x_{14}+x_{24}-x_{45}-x_{46}-x_{47}-x_{48}=0\\x_{35}+x_{45}=200\\x_{36}+x_{46}=150\\x_{37}+x_{47}=350\\x_{38}+x_{48}+x_{28}=300\\x_{ij}\geqslant 0,\text{对于所有 } i,j\end{cases}$$

对于上述模型,用单纯形法可以得到最优解,但如果将其转化成运输问题模型,用表上作业法求解不仅简单而且直观。具体做法是:每个中转站对于发货点来说可以看作销地,其销量为所有可以运到该地的产量之和;每个中转站对于销地来说可以看作产地,其产量等于其销量。这样,该问题就变成了 4 个产地、6 个销地的运输问题。产地到销地的单位运价的处理办法是:中转站自己到自己的运价为 0,网络图中,不能直接运输的产地到销地之间的运价为 M,其余运价直接用网络图中标明的数字。该问题的产销平衡表如表 3-40 所示。

表 3-40 例 3-12 产销平衡表

产地	销地						供应量
	3(上海)	4(天津)	5(南京)	6(济南)	7(南昌)	8(青岛)	
1(广州)	2	3	M	M	M	M	600
2(大连)	3	1	M	M	M	4	400
3(上海)	0	M	2	6	3	6	1 000
4(天津)	M	0	4	4	6	5	1 000
需求量	1 000	1 000	200	150	350	300	3 000 / 3 000

用表上作业法,可求得该问题的最优调运方案如表 3-41 所示。

表 3-41 例 3-12 最优调运方案

产地	销地						供应量
	3(上海)	4(天津)	5(南京)	6(济南)	7(南昌)	8(青岛)	
1(广州)	550	50					600
2(大连)		100				300	400
3(上海)	450		200		350		1 000
4(天津)		850		150			1 000
需求量	1 000	1 000	200	150	350	300	3 000 / 3 000

从表 3-41 可以看出,最优方案是:广州向中转站上海运 550 台,向天津运 50 台;大连向中转站天津运 100 台,直接向青岛运 300 台;中转站上海向南京和南昌分别运 200 台和 350 台;中转站天津向济南运 150 台。最少运费为 4 600 元。