

第一篇

宏观低速物质的运动规律

以牛顿力学为基础的经典力学,作为普适力学理论兴盛了约 300 年。20 世纪初,在高速领域和微观领域经典力学被相对论和量子力学所取代。但在一般的工程技术领域,包括机械制造、土木建筑,甚至于航空航天技术中,经典力学仍然保持着充沛的活力而起着基础理论的作用。它的这种实用性是我们进入大学阶段还要学习经典力学的一个重要原因。现代物理理论和实验已经证明,经典力学中的一些重要概念和定律,如动量、角动量、能量及其守恒定律等,也适用于包括高速和微观领域在内的整个物理学。只有在对经典力学有较深刻理解的基础上,才有可能在工程领域中进行应用。力学的基本原理是物理学其他分支的基础,对于其他自然科学也具有重要的意义。本篇主要讨论了在宏观低速范畴内物体的平动、转动和振动这三种运动形式的规律。平动、转动和振动是经典力学中物质粒子性的表现。

引言

物理学作为一门科学是从伽利略首创实验、物理思维和数学演绎相结合的科学方法开始的。正是伽利略提出“首先要研究物体怎样运动,然后才能研究物体为什么运动”,才使物理摆脱了哲学家们关于运动原因的众说纷纭的论争,走上了科学的道路。我们也从运动的描述开始讨论。运动学是从几何的观点来描述物体的运动,即研究物体的空间位置随时间的变化关系,不涉及引发物体运动和改变运动状态的原因。

本章着重讨论了描述质点运动的位置矢量、位移、速度和加速度四个物理量的定义及其矢量性、相对性和瞬时性。讨论了运动方程和直角坐标系中运动学的两类基本问题;在自然坐标系中和平面极坐标系中讨论了圆周运动的线量描述和角量描述,并给出了角量和线量描述的关系。

1.1 质点运动的描述

1.1.1 参考系与坐标系

1. 经典力学中的时间与空间

力学的研究对象是物体的机械运动。所谓机械运动是指物体的空间位置随时间的变化。在经典力学的范围内,空间和时间不依赖于物质的存在和运动的时空背景,称为**绝对的时空观**,但空间和时间需要借助物质的存在和运动去度量。

空间可以通过物质的存在反映出它所具有的广延性,它是沿四面八方无限均匀延伸的范围,并认为空间中的直线永远是直的,称为欧几里得空间。空间范围的度量中最基本的是长度的计量,其国际单位为米(m)。在 1983 年 10 月召开的第 17 届国际计量大会上,米的定义为:“米是 $1/299\,792\,458$ 秒的时间间隔内光在真空中行程的长度。”

时间可以通过物质的运动反映出它所具有的持续性和顺序性,它是从古到今,从先到后单方向的均匀连续变化,从不逆向。时间间隔的量度需要借助于周期性运动来计量,其国际单位为秒(s)。1967 年召开的第 13 届国际度量衡大会对秒的定义是:铯-133 原子基态的两个超精细能级间跃迁对应辐射的 $9\,192\,631\,770$ 个周期的持续时间。

经典力学的绝对时空观与人们的经验相协调,容易使人接受。但是它毕竟只是时空性质的一种假设。近代物理学表明空间和时间与物质的存在和运动是紧密联系的,绝对时空观只是实际时空性质的一种近似。

2. 参考系

物体的运动是绝对的,但是描述物体的运动却是相对的,即在具有不同运动状态的参考对象看来,同一个物体的运动状态是不同的.从站在路边的人的角度去看和从骑自行车的人的角度去看,一辆在公路上行驶的汽车的运动状态是不同的.但我们认为,在具有相同运动状态(相对静止)的参考对象看来,一个物体的运动状态是相同的.为了描述物体的运动,我们选择与一个确定的参考对象相对静止的所有物体作为一个系统,称为**参考系**.在一个确定的参考系中,物体的运动状态是可以确定的.

3. 坐标系

在选定参考系后,为定量描述物体的运动,我们取参考系中的任意一点作为坐标原点建立**坐标系**.常用的坐标系有直角坐标系、极坐标系、柱坐标系、球坐标系等,另外还有描述曲线运动的自然坐标系.

1.1.2 质点

在研究力学问题时,我们常常需要对研究对象进行模型化,最基本的力学模型是质点.所谓**质点**,是指忽略对象的大小和形状,并将全部的质量集中在一个几何点上的模型.把物体当作质点来处理是有条件的、相对的,而不是无条件的、绝对的.例如,研究地球绕太阳公转时,由于地球到太阳的平均距离约为地球半径的 10^4 倍,则地球上各点对于太阳的运动可以看作相同.所以,在研究地球绕太阳公转时,可以把地球当作质点;但在研究地球上物体的运动时,就不能把地球看作质点来处理了.

研究对象可看作质点的条件如下.

(1)研究对象的尺度在所研究问题中相对很小,可忽略其大小和形状,看作质点.例如,研究地球围绕太阳公转运动时,由于地球的尺度与公转轨道尺度相比很小,可忽略其大小和形状,看作质点.而在研究地球的自转运动中,不能将地球看作质点.

(2)研究对象发生平动,即对象上各点的运动状态完全相同时,可看作质点.

质点的概念是经过科学的抽象而形成的物理量.把物体视为质点的这种抽象的研究方法,在实践和理论上都有重要意义.当所研究的物体不能看作质点时,可以把整个物体看成由许多的质点所组成,弄清楚这些质点的运动,就可以明白整个物体的运动情况了.所以,研究质点的运动是研究物体运动的基础.

1.1.3 质点的位置矢量和运动方程

为了定量描述质点的运动,我们在选定的参考系上建立坐标系,则质点的位置就可以用从坐标原点 O 到质点所在位置 P 的矢量 \boldsymbol{r} 来描述,称为**位置矢量**,简称**位矢**.在直角坐标系中,令 x 、 y 、 z 方向的单位矢量分别为 \boldsymbol{i} 、 \boldsymbol{j} 、 \boldsymbol{k} ,则位置矢量的直角坐标系表达式为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad (1-1)$$

其中,位矢的大小为

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1-2)$$

方向为

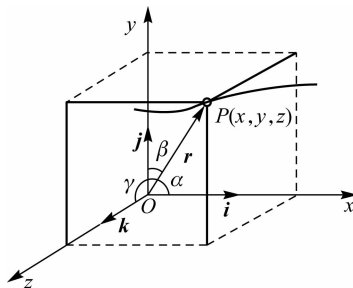


图 1.1 直角坐标系中的位矢

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \cos \beta = \frac{y}{r}, \cos \gamma = \frac{z}{r}$$

当质点运动时,位置不断变化,位矢是时间的函数,即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1-3)$$

该函数描述了质点位置随时间变化的过程,称为**运动方程**.在不同的坐标系中,运动方程有不同的形式.在直角坐标系中,运动方程可写为

矢量形式

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1-4)$$

分量形式

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1-5)$$

将运动方程分量形式中的 t 消去,可得到质点运动的**轨迹方程**.

例 1.1 求解下列质点运动方程的轨迹方程.

$$(1) \mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\mathbf{i} + R\sin(\omega t)\mathbf{j}$$

$$(2) \mathbf{r}(t) = vt\mathbf{i} + (h - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j}$$

解:(1)质点运动方程的分量形式为 $\begin{cases} x = R\cos(\omega t) \\ y = R\sin(\omega t) \end{cases}$,两式平方相加可得轨迹方程,即

$$x^2 + y^2 = R^2$$

该质点做圆周运动.

(2)运动方程的分量形式为 $\begin{cases} x = vt \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$,将 $t = \frac{x}{v}$ 代入消去 t 可得轨迹方程,即

$$y = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2$$

该质点的运动轨迹为抛物线.

1.1.4 质点的位移和路程

如图 1.2 所示,在质点的运动过程中,质点某一时刻 t 位于 A 点,经过 Δt 时间间隔后位于 B 点,相应的位置矢量由 \mathbf{r}_A 变为 \mathbf{r}_B .我们定义在 Δt 时间间隔内位置矢量的增量为位移矢量(简称**位移**),即

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (1-6)$$

它表示在 Δt 时间内质点位矢的变化.在直角坐标系中可写为

$$\Delta \mathbf{r} = (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j} + z_B\mathbf{k}) - (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k}) = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k} \quad (1-7)$$

其中,位移大小为

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

位移方向由 A 指向 B .

需要注意,位移大小 $|\Delta \mathbf{r}|$ 与 Δr 的区别. Δr 表示初末时刻位矢大小的变化量.

$$\Delta r = |\mathbf{r}_B| - |\mathbf{r}_A| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} - \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

如图 1.2 所示,一般 $\Delta r \neq |\Delta r|$.

在质点的运动过程中,运动轨迹的长度称为质点在这一运动过程所经过的**路程**,记作 Δs ,路程是标量.

位移与路程是两个不同的物理量.位移为矢量,而路程为标量,并且位移的大小一般不等于路程,即 $|\Delta r| \neq \Delta s$.只有当质点做单向直线运动时,两者才相等;或者在运动时间间隔 $\Delta t \rightarrow 0$ 时位移大小和路程相等,即 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta r| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s$,或者 $|\mathrm{d}r| = \mathrm{d}s$.

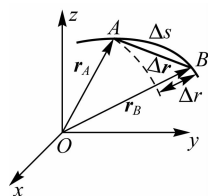


图 1.2 位移与路程

1.1.5 质点的速度和速率

为定量描述质点运动的快慢,我们引入物理量速度和速率.

1. 平均速度和瞬时速度

若质点在时间间隔 Δt 内发生的位移为 Δr ,则定义 Δt 时间内的**平均速度**为

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (1-8)$$

平均速度是矢量,其方向为位移矢量 Δr 的方向.平均速度只是某一个时间段内的平均效果,不能精细地描述质点每一时刻的运动快慢.因此,我们引入**瞬时速度**.

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均速度的极限称为质点在 t 时刻的**瞬时速度**(简称**速度**),即

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad (1-9)$$

可见,速度是位矢对时间的一阶导数,上式在任意坐标系中均成立.

为什么可以这样定义质点在 t 时刻的瞬时速度?如图 1.3 所示,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,弧长 \widehat{AB} 趋近于弦长 \overline{AB} ,曲线 s 趋近于直线 AB ,其长度为 $|\Delta r|$,平均速度 $\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ 趋近于瞬时速度 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.也就是说,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, B 点 $\rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow$ 无限接近 A 点, AB 趋近于 A 点的切线.速度方向沿运动轨迹的切线方向.

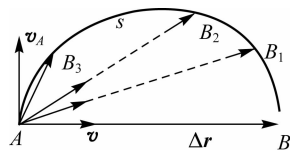


图 1.3 平均速度和瞬时速度

下面我们考虑直角坐标系情况,速度可表示为

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}i + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}j + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}k = v_x i + v_y j + v_z k \quad (1-10)$$

其大小为

$$v = \left| \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1-11)$$

在国际单位制中,速度的单位是米·秒⁻¹(m·s⁻¹).

2. 平均速率和瞬时速率

若质点在时间间隔 Δt 内发生的路程为 Δs ,则定义 Δt 时间内的**平均速率**为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1-12)$$

平均速率是标量.由于一般情况下 $|\Delta r| \neq \Delta s$,因此平均速度的大小一般不等于平均速率,即 $|\bar{v}| \neq \bar{v}$.

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均速率的极限称为质点在 t 时刻的**瞬时速率**(简称**速率**)为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1-13)$$

由于 $|dr| = ds$, 则瞬时速度的大小即为瞬时速率, 即

$$|v| = \frac{|dr|}{dt} = \frac{ds}{dt} = v$$

例 1.2 如图 1.4 所示, 质点做半径为 R 的匀速率圆周运动, 周期为 T , 求下列过程中质点的平均速度和平均速率.

(1) 四分之一周期从 A 到 B ;

(2) 半个周期从 A 到 C .

解: (1) 由平均速度的定义 $\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$, 得

$$\Delta r = r_B - r_A = Rj - Ri$$

$$\Delta t = \frac{T}{4}$$

则平均速度为

$$\bar{v} = \frac{4Rj}{T} - \frac{4Ri}{T}$$

其大小 $|\bar{v}| = \frac{4\sqrt{2}R}{T}$, 方向由 A 指向 B .

平均速率为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi R}{2}}{\frac{T}{4}} = \frac{2\pi R}{T}$$

(2) 在质点半个周期从 A 到 C 过程中

$$\Delta r = r_C - r_A = -Ri - Ri = -2Ri$$

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

由平均速度定义 $\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$, 得

$$\bar{v} = -\frac{4R}{T}i$$

其大小为 $|\bar{v}| = \frac{4R}{T}$, 方向由 A 指向 C .

平均速率为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\pi R}{\frac{T}{2}} = \frac{2\pi R}{T}$$

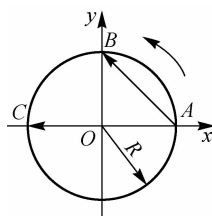


图 1.4 例 1.2 图

1.1.6 质点的加速度

一般情况下, 质点沿某一轨迹运动时, 其速度随时间变化. 如图 1.5 所示, 在质点的运动过程中, 某一时刻 t 质点位于 A 点, 速度为 v_A ; 经过 Δt 时间间隔后位于 B 点, 速度为 v_B . 在 Δt 时间间隔内, 速度的增量为 $\Delta v = v_B - v_A$, 定义 Δt 时间间隔内的平均加速度为

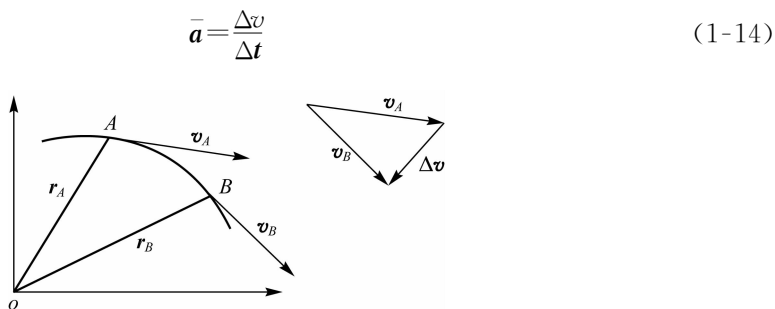


图 1.5 速度及其变化量

平均加速度是矢量,其方向与 Δv 相同.

平均加速度仅粗略地描述了质点速度在 Δt 时间间隔内的变化情况. 要精确地描述质点速度变化的快慢, 令 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 定义 t 时刻的**瞬时加速度**(简称**加速度**)为

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (1-15)$$

可见, 加速度是速度对时间的一阶导数, 或位矢对时间的二阶导数. 同样, 式(1-15)适用于任意坐标系.

在直角坐标系中, 加速度可表示为

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1-16)$$

加速度是矢量, 其大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

方向沿 Δv 的极限方向.

在国际单位制中加速度的单位是米·秒⁻² ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

在上述位矢 \mathbf{r} 、位移 $\Delta \mathbf{r}$ 、速度 \mathbf{v} 和加速度 \mathbf{a} 四个物理量的直角坐标分量描述中, 都满足**运动独立性原理**. 因此, 质点的空间运动都可看成沿 x, y, z 三个方向各自独立的直线运动的叠加.

1.1.7 直角坐标系中运动学的两类问题

在质点运动学中, 质点的运动状态常用位矢 \mathbf{r} 和速度 \mathbf{v} 来描述, 加速度 \mathbf{a} 描述质点运动状态的变化. 在质点运动中, 一般归纳为下述两类运动学问题. 现在, 以直角坐标系为例, 讨论两种类型的运动学问题.

1. 第一类问题

已知运动方程, 求质点的速度和加速度方程, 即已知 $\mathbf{r}(t)$, 求 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{a}(t)$. 此类问题只需要按公式

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ 和 } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

直接将位矢函数 $\mathbf{r}(t)$ 对时间 t 求导, 即可求解.

例 1.3 已知质点的运动方程为 $\mathbf{r} = (-5t + 10t^2)\mathbf{i} + (10t - 15t^2)\mathbf{j}$, 式中各量均为 SI 单位, 求 $t = 2 \text{ s}$ 时质点的速度和加速度.

解:采用坐标分量法和微分法进行求解,即质点在 Oxy 平面内运动,由质点的运动方程可知

$$x = -5t + 10t^2, y = 10t - 15t^2$$

(1)从速度定义出发,得

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -5 + 20t, v_y = \frac{dy}{dt} = 10 - 30t$$

$t=2$ s 时,质点在 x 轴和 y 轴方向上的速度为

$$v_x = (-5 + 40) \text{ m/s} = 35 \text{ m/s}, v_y = (10 - 60) \text{ m/s} = -50 \text{ m/s}$$

$t=2$ s 时,质点速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{35^2 + (-50)^2} \text{ m/s} = 61 \text{ m/s}$$

质点速度的方向与 x 轴的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{-50}{35} = -55^\circ$$

(2)从加速度定义出发求解,得

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 20 \text{ m/s}^2, a_y = \frac{dv_y}{dt} = -30 \text{ m/s}^2$$

质点加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{20^2 + (-30)^2} \text{ m/s}^2 = 36 \text{ m/s}^2$$

质点加速度的方向与 x 轴的夹角为

$$\beta = \arctan \frac{a_y}{a_x} = \arctan \frac{-30}{20} = -56^\circ 19'$$

例 1.4 一质点在外力的作用下从静止在原点到开始运动,其加速度为 $a = 2x + 1$ (SI),求质点运动到 10 m 时所具有的速度。

解:已知加速度是位置的函数或速度的函数,求速度和位置的函数关系,即已知 $a(x)$ 或 $a(v)$,求 $v(x)$. 此类问题采用如下方法。

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \frac{dx}{dx} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

然后将含有 v 和 x 的部分分离变量,积分求解. 本题中

$$a = v \frac{dv}{dx} = 2x + 1$$

分离变量积分,得

$$\int_0^v v dv = \int_0^x (2x + 1) dx$$

则

$$v = \sqrt{2x^2 + 2x}$$

当 $x = 10$ m 时,速度为 $v = \sqrt{2x^2 + 2x} = \sqrt{220} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 14.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. 第二类问题

已知速度函数或加速度函数及初始条件($t=0$ 时的初位矢 \mathbf{r}_0 、初速度 \mathbf{v}_0),求质点的运动方程,即已知 $v(t)$ 或 $a(t)$ 和 \mathbf{r}_0 、 \mathbf{v}_0 ,求 $\mathbf{r}(t)$. 此类问题需要用积分法结合初始条件进行求解。

例 1.5 一质点作直线运动,其瞬时加速度的变化规律为 $a_x = -A\omega^2 \cos \omega t$, $t=0$ 时,

大学物理教程

$v_x=0, x=A$. 其中, A, ω 均为正常数, 求此质点的运动方程.

解: 由已知条件得

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega t$$

考虑初始条件, 利用分离变量积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v_x} dv_x &= - \int_0^t A\omega^2 \cos \omega t dt \\ v_x &= v_0 + \int_0^t -A\omega^2 \cos \omega t dt \\ &= 0 + \int_0^t -A\omega^2 \cos \omega t dt \\ &= -A\omega \sin \omega t \Big|_0^t \\ &= -A\omega \sin \omega t \\ v_x &= \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t \end{aligned}$$

考虑初始条件, 对上式利用分离变量积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x dx &= - \int_0^t A\omega \sin \omega t dt \\ x &= x_0 + \int_0^t (-A\omega \sin \omega t) dt \\ &= A + \int_0^t (-A\omega \sin \omega t) dt \\ &= A + A \cos \omega t \Big|_0^t \\ &= A + A \cos \omega t - A \\ &= A \cos \omega t \end{aligned}$$

上式即为所求运动方程.

例 1.6 一人在阳台上以投射角 $\theta=30^\circ$ 和速度 $v_0=20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 向台前地面投出一小球, 球离手时距离地面的高度为 $h=10 \text{ m}$. 试求: 球投出后何时着地? 在何处着地? 着地时速度的大小和方向如何?

解: 这是二维问题. 以投出点为原点, 建立直角坐标系, 如图 1.6 所示, 则加速度为

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$$

初始条件, 速度、位矢分别为 $v_0 = v_0 \cos \theta \mathbf{i} + v_0 \sin \theta \mathbf{j}$, $r_0 = 0$, 由

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = -g\mathbf{j}$$

结合初条件积分得

$$\int_{v_0}^v dv = - \int_0^t g\mathbf{j} dt$$

速度方程为

$$\mathbf{v} = v_0 - g\mathbf{j} = v_0 \cos \theta \mathbf{i} + (v_0 \sin \theta - gt)\mathbf{j}$$

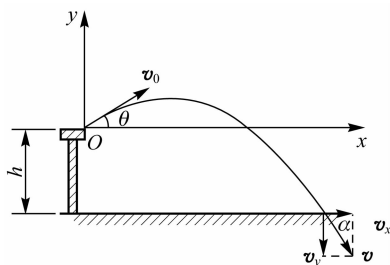


图 1.6 例 1.6 图

$$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_0 \cos \theta \mathbf{i} + (v_0 \sin \theta - gt) \mathbf{j}$$

结合初始条件积分得

$$\int_{r_0}^r d\mathbf{r} = \int_0^t [v_0 \cos \theta \mathbf{i} + (v_0 \sin \theta - gt) \mathbf{j}] dt$$

运动方程为

$$\mathbf{r} = v_0 t \cos \theta \mathbf{i} + (v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2) \mathbf{j}$$

当小球落地时,位矢的 y 轴分量为 $-h$,即

$$y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 = -h$$

取 $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,得

$$20 \times \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \times 9.8 t^2 = -10$$

解得 $t = 2.78 \text{ s}$ ($t = -0.74 \text{ s}$ 舍去),即球出手后 2.78 s 着地.

着地点与投射点的水平距离为

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t = 20 \cos 30^\circ \times 2.78 \text{ m} = 48.1 \text{ m}$$

着地时小球的速度分量为

$$v_x = v_0 \cos \theta = 20 \cos 30^\circ \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 17.3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt = (20 \sin 30^\circ - 9.8 \times 2.78) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -17.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

着地时速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{17.3^2 + 17.2^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 24.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

速度与 x 轴夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} = -44.8^\circ$$

需要注意,以上两类问题都是在直角坐标系情况下的计算,若在其他坐标系中研究运动学问题,情况会有所不同.

1.2 圆周运动

1.2.1 自然坐标系 切向速度和法向加速度

圆周运动是一类特殊的平面曲线运动.质点作圆周运动时,由于其轨道的曲率半径处处相等,而速度方向始终在圆周的切线上.因此,对圆周运动的描述,可采用以平面自然坐标系为基础的线量描述.

自然坐标系是以质点的运动轨道为坐标轴的一维坐标系.如图 1.7 所示,在轨道曲线上,任取一点 O 作为自然坐标原点,沿轨道选取正方向,以 O 点到质点的曲线长度 s 为自然坐标来确定质点的位置.自然坐标系中的运动方程可写为

$$s = s(t)$$

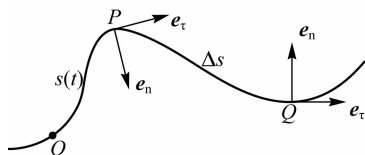


图 1.7 自然坐标系

在质点的轨道曲线(即自然坐标系)上的任意一点 P , 存在着两个单位矢量 e_τ 和 e_n , 其中 e_τ 是切向单位矢量, 它沿着轨道在 P 点的切线并指向自然坐标系的正方向; e_n 是法向单位矢量, 它沿着轨道在 P 点的法线并指向轨道的凹侧, 这是一个动坐标系.

与直角坐标系的三个单位矢量 i, j, k 不同, e_τ 和 e_n 并非常矢量, 它们会随着自然坐标位置的变化而变化, 因此它们是时间的函数.

若质点 t 时刻处于 P 点, 经过 Δt 时间后到达 Q 点, Δt 内质点的位置变化可由质点经过的路程来描述, 即

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) \quad (1-17)$$

需要注意, 在自然坐标系中路程是有正负的. 若 P 点到 Q 点沿正方向, 则 $\Delta s > 0$, 若 P 点到 Q 点沿负方向, 则 $\Delta s < 0$. 当时间间隔 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 路程 Δs 可以写为 ds .

由速度的定义 $v = \frac{dr}{dt}$ 知, 其大小为 $|v| = \frac{|dr|}{dt} = \frac{ds}{dt}$, 方向沿轨道的切线方向. 若质点沿轨道向正方向运动, 即沿 e_τ 方向, 此时 $ds > 0$, 则在自然坐标系中, 质点的速度可表示为

$$v = |v|e_\tau = ve_\tau = \frac{ds}{dt}e_\tau = \frac{ds}{dt}e_\tau$$

需要指出, 在自然坐标系中速率 v 是有正负的. 若速度沿正方向, 则 $v > 0$, 若速度沿负方向, 则 $v < 0$.

下面, 进一步深入讨论质点圆周运动过程中的加速度 a .

由加速度的定义有

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(ve_\tau) = \frac{dv}{dt}e_\tau + v \frac{de_\tau}{dt} \quad (1-18)$$

设质点做圆周运动, 如图 1.8 所示. 由于切向单位矢量 e_τ 是时间 t 的函数 $e_\tau(t)$, 则 $\frac{de_\tau}{dt} \neq 0$.

下面讨论 $\frac{de_\tau}{dt}$ 在自然坐标系中的形式.

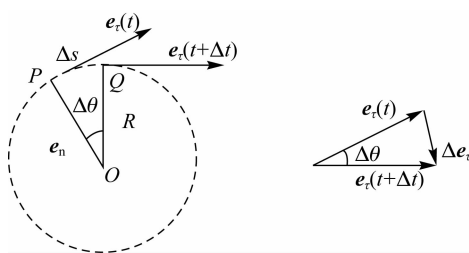


图 1.8 切向加速度和法向加速度

设 t 时刻质点位于 P 点, 切向单位矢量为 $e_\tau(t)$; 经过时间间隔 Δt 后, 质点运动到 Q 点, 切向单位矢量为 $e_\tau(t + \Delta t)$. 此过程中切向单位矢量的变化量为

$$\Delta e_\tau = e_\tau(t + \Delta t) - e_\tau(t)$$

当时间间隔 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 该过程中质点运动的路程 Δs 是半径为 R 的一段圆弧, Δs 对应的圆心角为 $\Delta \theta$, 即 $\Delta s = R\Delta \theta$, 见图 1.8, 此时切向单位矢量的变化量 Δe_τ 的方向趋于垂直 e_τ 方向, 即 e_n 方向; 大小 $|\Delta e_\tau| = \Delta \theta |e_\tau| = \Delta \theta$, 即 $\Delta e_\tau = |\Delta e_\tau| e_n = \Delta \theta e_n$. 因此, 有

$$\frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \mathbf{e}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{R \Delta t} \mathbf{e}_n = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_n = \frac{v}{R} \mathbf{e}_n \quad (1-19)$$

将式(1-19)代入式(1-18),可得

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_\tau + \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_n \quad (1-20)$$

由式(1-20)可以看出,在自然坐标系中,加速度可以沿切线方向和法线方向分解,分别称为切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n .

$$\begin{cases} a_\tau = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{e}_\tau \\ a_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_n \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \\ a_n = \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

由切向加速度和法向加速度的定义可以看出,切向加速度是改变质点运动速率的原因;法向加速度是改变质点运动方向的原因.

总加速度大小为

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

一般情况下,质点做圆周运动的加速度方向既不沿切向 \mathbf{e}_τ ,也不沿法向 \mathbf{e}_n ,而是与切线方向的夹角为 $\alpha = \arctan \frac{a_n}{a_\tau}$. 对于一般平面曲线运动,法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{R}$ 中的 R 可用曲率半径 ρ 来替代.

1.2.2 圆周运动的角量描述

用自然坐标系表述圆周运动中质点的位置、路程的量纲是长度时,我们将这种表述方法称为线量表述. 同一种运动还可采用不同的表述方法,既可以用自然坐标系,也可以用其他坐标系来描述圆周运动. 下面讨论圆周运动的平面极坐标系描述.

以圆心 O 为极点,任意射线为极轴 Ox 建立平面极坐标系. 质点的坐标可以由极径 r 和极角 θ 确定. 由于圆周运动中极径 r 保持不变,因此质点的运动可以由极角 θ 完全表述. 这种表述方法称为角量表述,如图 1.9 所示.

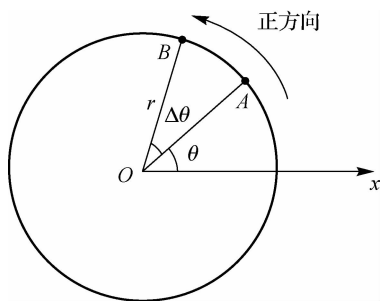


图 1.9 圆周运动的角量描述

1. 角位置和角位移

在平面极坐标系中,圆周运动中质点的位置可以由极角 θ 唯一确定,我们称极角 θ 为角位置.

一般规定逆时针方向为正方向,则从极轴初始位置开始,逆时针方向的角位置都是正的;顺时针方向的角位置都是负的. 角位置的单位是弧度(rad).

在圆周运动中,角量描述的运动方程可以写为

$$\theta = \theta(t) \quad (1-21)$$

在圆周运动中,某一时刻 t 质点位于 A 点,经过 Δt 时间间隔后位于 B 点,相应的角位置由 θ_A 变为 θ_B ,为描述角位置的变化,定义角位移 $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\theta = \theta_B - \theta_A \quad (1-22)$$

它表示在 Δt 时间内质点角位置的变化. 当从 t 时刻的 A 点到 $t + \Delta t$ 时刻的 B 点实际运动路径为逆时针时, 角位移为正; 当从 t 时刻的 A 点到 $t + \Delta t$ 时刻的 B 点实际运动路径为顺时针时, 角位移为负. 角位移的单位是弧度(rad).

当时间间隔 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 称为无限小角位移, 记为 $d\theta$.

2. 角速度

为定量描述圆周运动中质点转动的快慢, 引入**角速度** ω , 定义逆时针的右手螺旋方向为正方向, 则

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-23)$$

在国际单位制中, 角速度单位是弧度 \cdot 秒⁻¹ ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

角速度实际是矢量, 有大小和方向. 质点作平面圆周运动时, 其角速度的方向遵循右手螺旋法则, 可知其方向为垂直运动平面, 且沿大拇指竖直轴正方向, 如图 1.10 所示. 但是, 在圆周运动中, 角速度矢量的方向, 只有两个方向, 沿着轴向上或向下. 为了简便, 在以后讨论质点作平面圆周运动时, 角速度矢量可视为**标量**来处理, 其方向用正负号来表示.

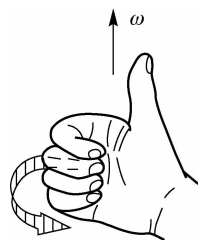


图 1.10 角速度的方向

3. 角加速度

同样, 可以定义**角加速度** β 来描述角速度的变化快慢. 定义逆时针的右手螺旋方向为正方向, 则

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1-24)$$

与角速度一样, 角加速度也有正负.

在国际单位制中, 角加速度的单位是弧度 \cdot 秒⁻² ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$).

4. 角量描述与线量描述的关系

在描述半径为 R 的圆周运动时, 我们同时建立平面极坐标系和自然坐标系, 如图 1.11 所示. 以圆心为极点, 任意射线为极轴 Ox 建立平面极坐标系, 逆时针为极角 θ 正方向. 以极轴 Ox 与圆周的交点 O' ($\theta=0$) 作为原点, 以圆周为坐标轴, 建立自然坐标系, 逆时针为自然坐标 s 正方向. 则角量描述与线量描述之间的关系如下.

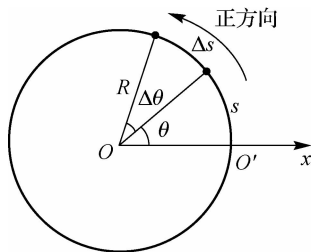


图 1.11 角量与线量关系

自然坐标 s 与角位置 θ

$$s = R\theta$$

路程 Δs 与角位移 $\Delta\theta$

$$\Delta s = R\Delta\theta$$

速率 v 与角速度 ω

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

切向加速度 a_τ

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\beta$$

法向加速度 a_n

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

例 1.7 一质点做半径为 $r=0.1$ m 的圆周运动,其角位置 θ 的运动方程为 $\theta=2+3t^3$ (θ 的单位为 rad, t 的单位为 s). 试求:

- (1) 速率随时间的变化关系;
- (2) $t=1$ s 时的法向加速度和切向加速度.

解: (1) 由角速度的定义得

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(2+3t^3) = 9t^2$$

则速率为

$$v = r\omega = 0.9t^2$$

(2) 由角加速度的定义得

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(9t^2) = 18t$$

则法向加速度为

$$a_n = r\omega^2 = 8.1t^4$$

切向加速度为

$$a_\tau = r\beta = 1.8t$$

当 $t=1$ s 时,法向加速度为

$$a_n = 8.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

切向加速度为

$$a_\tau = 1.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

例 1.8 一飞轮以速率 $n=1200$ 转/分转动,当受到制动而均匀地减速,并经过 $t=40$ s 后静止. 求:

- (1) 角加速度 β ;
- (2) 从制动开始 $t=10$ s 时,飞轮的角速度 ω ;
- (3) 从制动开始到静止时飞轮的转数 N ;
- (4) 设飞轮的半径为 $R=1$ m,求 $t=10$ s 时,飞轮边缘上一点的速率、切向加速度和法向加速度.

解: (1) 飞轮的初角速度为

$$\omega_0 = \frac{1200 \times 2\pi}{60} = 40\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

由于飞轮均匀减速,所以角加速度 β 为常数. 由定义 $\beta = \frac{d\omega}{dt}$, 结合初末时刻的条件积分得

$$\int_0^{40} \beta dt = \int_{\omega_0}^0 d\omega$$

则角加速度为

$$\beta = \frac{0 - 40\pi}{40} = -\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

大学物理教程

(2) 由积分 $\int_0^t \beta dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$ 算出任意时刻 t 时的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \beta t = (40\pi - \pi t) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

当 $t=10 \text{ s}$ 时, 角速度为

$$\omega = 30\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 由定义 $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 40\pi - \pi t$, 结合初末时刻的条件积分, 得

$$\int_0^{40} \omega dt = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

则角位移为

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \int_0^{40} (40\pi - \pi t) dt = \left(40\pi t - \frac{1}{2}\pi t^2 \right) \Big|_0^{40} = 800\pi \text{ rad}$$

则转数为

$$N = \frac{800\pi}{2\pi} = 400 (\text{转})$$

(4) 当 $t=10 \text{ s}$ 时, 飞轮边缘上一点的速率为

$$v = R\omega = 1 \times 30\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 30\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n 分别为

$$a_\tau = R\beta = 1 \times (-\pi) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = -\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = R\omega^2 = 1 \times (30\pi)^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 900\pi^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

1.3 相对运动

描述一个物体的运动时, 采用不同的参考系会有不同的结果. 若已知物体相对某一参考系 S 的运动, 现在希望知道该物体相对另一参考系 S' 的运动, 而 S' 又相对 S 在运动时, 那么就要讨论在两个不同参考系 S 和 S' 中, 描述质点 P 运动时的内在联系. 本节仅讨论最简单的情况, S' 相对 S 做平动, 即两个参考系坐标轴始终保持平行.

设参考系 S' 相对 S 做匀速直线运动, 且两参考系中直角坐标的对应坐标轴的相对取向始终相互平行. 首先取参考系 S 上任意点 O 为坐标原点, 建立坐标系 A , 然后取参考系 S' 上任意点 O' 为坐标原点, 建立坐标系 B . 在任意时刻 t 时, 质点 P 在坐标系 A 中的位矢为 \mathbf{r}_{AP} , 质点 P 在坐标系 B 中的位矢为 \mathbf{r}_{BP} , 坐标系 B 的原点 O' 在坐标系 A 中的位矢为 \mathbf{r}_{AB} , 如图 1.12 所示. 则这三个矢量之间有如下关系.

$$\mathbf{r}_{AP} = \mathbf{r}_{BP} + \mathbf{r}_{AB} \quad (1-25)$$

对时间求导, 可得

$$\frac{d\mathbf{r}_{AP}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{BP}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt}$$

其中, $\frac{d\mathbf{r}_{AP}}{dt}$ 是质点 P 相对坐标系 A 的速度 v_{PA} , $\frac{d\mathbf{r}_{BP}}{dt}$ 是质点 P 相对坐标系 B 的速度 v_{PB} ,

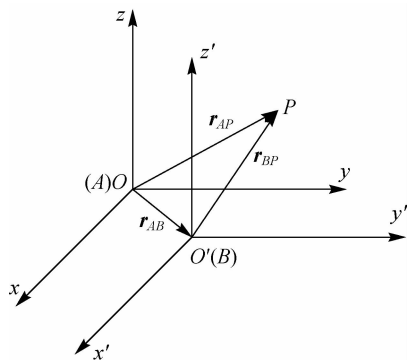


图 1.12 两个参考系中的质点运动

$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt}$ 是坐标系 B 相对坐标系 A 的速度 v_{BA} (称为牵连速度), 则有

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \quad (1-26)$$

式(1-26)称为速度合成公式. 再次对时间求导, 可得

$$\frac{dv_{PA}}{dt} = \frac{dv_{PB}}{dt} + \frac{dv_{BA}}{dt}$$

其中, $\frac{dv_{PA}}{dt}$ 是质点 P 相对坐标系 A 的加速度 a_{PA} , $\frac{dv_{PB}}{dt}$ 是质点 P 相对坐标系 B 的加速度 a_{PB} , $\frac{dv_{BA}}{dt}$ 是坐标系 B 相对坐标系 A 的加速度 a_{BA} (称为牵连加速度), 则有

$$a_{PA} = a_{PB} + a_{BA} \quad (1-27)$$

式(1-27)为加速度合成公式.

例 1.9 电车以速率 $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 向东行驶, 风裹着雨使雨有 $7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 向西的分速度. 坐在行驶的电车中, 人可以看到雨与竖直方向成 45° 角下落. 求雨相对地面的速率为多少?

解: 以雨滴为研究对象, 分别以地面和电车为参考系, 雨在两个参考系中的速度分别为 v 和 v' , 电车相对于地面的速度(牵连速度)为 v_0 , 则

$$v = v' + v_0$$

已知 v 的水平分量 v_x 为 $7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 向西, v' 与竖直方向成 45° 角, $|v_0| = v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 方向向东, 如图 1.13 所示. 则雨相对于地面的速率为

$$v = \sqrt{(v_0 + v_x)^2 + v_y^2} = \sqrt{17^2 + 7^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 18.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

例 1.10 河的两岸相互平行, 一船由 A 点朝与岸垂直的方向匀速驶去, 经 10 min 到达对岸 C 点, 若船从 A 点出发仍按第一次渡河速率不变, 但垂直到达彼岸的 B 点, 需 12.5 min . 已知 $BC = l = 120 \text{ m}$, 求:

- (1) 水流速率 v ;
- (2) 渡河时船速率 u ;
- (3) 河宽 L .

解: (1) 以船为研究对象 P , 分别以地面和河水为参考系 1 和参考系 2, 则船在两个参考系中的速度分别记为 v_{P1} 和 v_{P2} , 河水相对于地面的速度(牵连速度)记为 v_{21} , 则有

$$v_{P1} = v_{P2} + v_{21}$$

如图 1.14 建立直角坐标系, 第一次渡河时, $|v_{P2}| = u$, v_{P2} 方向垂直于河岸, v_{P1} 的方向由 A 指向 C , 牵连速度大小 $|v_{21}| = v$, 经历时间 $t_1 = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$, 则有

$$v_{P1} = v\mathbf{i} + u\mathbf{j}$$

对时间积分, 得

$$\mathbf{r}_{AC} = vt_1\mathbf{i} + ut_1\mathbf{j} = l\mathbf{i} + L\mathbf{j}$$

即

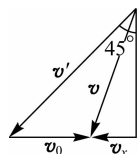


图 1.13 例 1.9 图

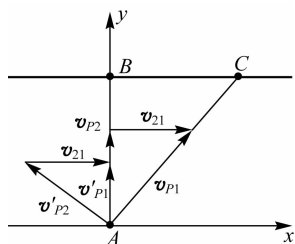


图 1.14 例 1.10 图

$$\begin{cases} vt_1 = l \\ ut_1 = L \end{cases} \quad (1)$$

则水流速率为

$$v = \frac{l}{t_1} = \frac{120 \text{ m}}{600 \text{ s}} = 0.2 \text{ m/s}$$

(2)第二次渡河时,设船在两个参考系中的速度分别记为 v'_{P1} 和 v'_{P2} ,则

$$v'_{P1} = v'_{P2} + v_{21}$$

$|v'_{P2}| = u$, v'_{P1} 的方向由A指向B,设 $|v'_{P1}| = v'$,牵连速度大小 $|v_{21}| = v$,经历时间 $t_2 = 12.5 \text{ min} = 750 \text{ s}$,则有

$$|v'_{P1}|^2 = (v')^2 = |v'_{P2}|^2 - |v_{21}|^2 = u^2 - v^2$$

又

$$L = v't_2 = \sqrt{u^2 - v^2} t_2$$

将(2)代入上式,可得

$$ut_1 = \sqrt{u^2 - v^2} t_2$$

求解,得船速率为

$$u = \frac{vt_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \frac{0.2 \times 750}{\sqrt{750^2 - 600^2}} \text{ m/s} \approx 0.33 \text{ m/s}$$

(3)河宽L为

$$L = u \cdot t_1 = 0.33 \times 600 \text{ m} \approx 198 \text{ m}$$

本章提要

1. 描述质点运动的物理量

(1)位置矢量: r ,运动方程 $r=r(t)$.

(2)位移矢量: $\Delta r=r_2-r_1$ 和路程 Δs .

(3)平均速度: $\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$.

(4)平均速率: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

(5)瞬时速度(速度): $v = \frac{dr}{dt}$.

(6)瞬时速率(速率): $v = \frac{ds}{dt}$.

(7)加速度: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$.

这些定义是与坐标系的选取无关的,在不同坐标系中有不同形式.

2. 直角坐标系中的运动学描述

(1)位置矢量.

矢量形式 $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

$$\text{分量形式} \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

(2) 位移矢量: $\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}$.

(3) 速度.

$$\text{矢量形式} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

$$\text{分量形式} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

(4) 速率.

$$v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

(5) 加速度.

$$\text{矢量形式} \mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$\text{分量形式} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

3. 直角坐标系中的两类运动学问题

(1) 已知 $\mathbf{r}(t)$, 求 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{a}(t)$, 直接求导.

(2) 已知 $\mathbf{v}(t)$ 或 $\mathbf{a}(t)$ 和初始条件 $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$, 求 $\mathbf{r}(t)$, 结合初始条件积分.

4. 圆周运动

(1) 自然坐标系.

位置: 自然坐标 s , 运动方程 $s=s(t)$.

速度矢量: $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_\tau = \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_\tau$, 分量形式 $v = \frac{ds}{dt}$.

加速度分为切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n :
$$\begin{cases} a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases} .$$

加速度大小: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho} \right)^2}$.

(2) 圆周运动的角量描述.

位置: 角位置 θ (极角), 运动方程 $\theta = \theta(t)$.

角速度: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

角加速度: $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$.

(3) 圆周运动线量描述和角量描述的关系.

自然坐标 s 与角位置 θ : $s = R\theta$.

速率 v 与角速度 ω : $v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$.

切向加速度 a_τ : $a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\beta$.

法向加速度 a_n : $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$.

5. 相对运动

(1) 位置关系: $\mathbf{r}_{AP} = \mathbf{r}_{BP} + \mathbf{r}_{AB}$.

(2) 速度关系: $\mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}$.

(3) 加速度关系: $\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB} + \mathbf{a}_{BA}$.

思考题

1.1 质点轨道方程与其运动学方程有何区别?

1.2 在二维运动中, $|\Delta\mathbf{r}|$ 与 Δr 是否相同? $|\Delta\mathbf{v}|$ 与 Δv 是否相同?

1.3 回答下列问题.

(1) 位移和路程有何区别? 在什么情况下两者的量值相等? 在什么情况下并不相等?

(2) 平均速度和平均速率有何区别? 在什么情况下两者的量值相等? 瞬时速度和平均速度的关系和区别是怎样的? 瞬时速率和平均速率的关系和区别又是怎样的?

1.4 一质点作直线运动, 其平均速度总等于 $\frac{1}{2}$ (初速+末速) 吗? 用此式计算平均速度的条件是什么?

1.5 质点的运动方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$. 在计算质点的速度和加速度时, 有人先求出 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 然后根据 $v = \frac{dr}{dt}$ 和 $a = \frac{d^2r}{dt^2}$ 求出 v 和 a . 也有人先计算速度和加速度的分量, 再求出 $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 和 $a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$. 这两种方法哪一种正确? 为什么?

1.6 分析以下三种说法是否正确.

(1) 运动物体的加速度越大, 物体的速度也必定越大.

(2) 物体做直线运动时, 若物体向前的加速度减小了, 则物体前进的速度也随之减小.

(3) 物体的加速度很大时, 物体的速度大小必定改变.

1.7 回答下列问题.

(1) 一物体具有加速度而其速度为零, 是否可能?

(2) 一物体具有恒定的速率但仍有变化的速度, 是否可能?

(3) 一物体具有恒定的速度但仍有变化的速率,是否可能?

(4) 一物体具有沿 x 轴正方向的加速度而有沿 x 轴负方向的速度,是否可能?

(5) 一物体的加速度大小恒定而其速度的方向改变,是否可能?

1.8 物体做圆周运动时,速度一定沿轨迹的切向,法向分速度恒为零,因此法向加速度也一定为零.这种说法对吗?

1.9 将一小球竖直上抛,不考虑空气阻力,它上升和下降所经历的时间哪一个长?如果考虑空气阻力呢?

1.10 试回答下列问题.

(1) 匀加速运动是否一定是直线运动?为什么?

(2) 圆周运动中,加速度的方向是否一定指向圆心?为什么?

1.11 一个做平面运动的质点,它的运动方程是 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$,速度方程是 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$,若

(1) $\frac{dr}{dt} = 0, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0$,质点做什么运动?

(2) $\frac{dv}{dt} = 0, \frac{d\mathbf{v}}{dt} \neq 0$,质点做什么运动?

1.12 圆周运动中质点的加速度是否一定和速度方向垂直?任意曲线运动的加速度是否一定不与速度方向垂直?

1.13 质点沿圆周运动,且速率随时间均匀增大,问 a_t, a_n, a 三者的大小是否随时间改变?总加速度与速度之间的夹角如何随时间变化?

1.14 在一恒定速度运动的火车上竖直向上抛出一石子,此石子是否能落回人的手中?如果石子抛出后,火车以恒定加速度前进,结果又怎样?

习 题

1.1 质点在平面上运动,已知其位置矢量的表达式为 $\mathbf{r} = at^2\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j}$ (式中 a, b 为常数), 则质点做 ()

- A. 匀速直线运动 B. 变速直线运动
C. 抛物线运动 D. 一般曲线运动

1.2 某质点做曲线运动,任一时刻的矢径为 \mathbf{r} ,速度为 \mathbf{v} ,那么 ()

- A. $|\Delta \mathbf{v}| = \Delta v$
B. $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta r$

C. Δt 时间间隔内的平均速度为 $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$

D. Δt 时间间隔内的平均加速度为 $\overline{\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}}$

1.3 某质点作直线运动的运动学方程为 $x = 3t - 5t^3 + 6$ (SI), 则该质点做 ()

- A. 匀加速直线运动,加速度沿 x 轴正方向

大学物理教程

- B. 匀加速直线运动, 加速度沿 x 轴负方向
- C. 变加速直线运动, 加速度沿 x 轴正方向
- D. 变加速直线运动, 加速度沿 x 轴负方向

1.4 下列说法哪一种是正确的? ()

- A. 加速度恒定不变时, 物体运动方向也不变
- B. 平均速率等于平均速度的大小

C. 不管加速度如何, 平均速率表达式总可以写成 $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ 的形式

D. 运动物体速率不变, 速度可以变化

1.5 质点作圆周运动, r 表示位置矢量, s 表示路程, a_τ 表示切向加速度, 下列表达式中 ()

(1) $\frac{dv}{dt} = a$ (2) $\frac{dr}{dt} = v$ (3) $\frac{ds}{dt} = v$ (4) $\frac{dv}{dt} = a_\tau$

- A. 只有(1)、(4)是对的
- B. 只有(2)、(4)是对的
- C. 只有(2)是对的
- D. 只有(3)是对的

1.6 以下四种运动形式中, a 保持不变的运动是 ()

- A. 单摆的运动
- B. 匀速率圆周运动
- C. 抛物运动
- D. 圆锥摆运动

1.7 某人骑自行车的速率为 v , 向正西方向行驶, 遇到由北向南的风(设风速的大小也为 v), 则他感到风是从 ()

- A. 东北方向吹来
- B. 东南方向吹来
- C. 西北方向吹来
- D. 西南方向吹来

1.8 设质点的运动学方程为 $r = R\cos \omega t \mathbf{i} + R\sin \omega t \mathbf{j}$ (式中 R 、 ω 皆为常量), 则质点的 $v =$ _____.

1.9 一质点沿直线运动, 其运动学方程为 $x = 6t - t^2$ (SI), 则在 t 由 0 至 4 s 的时间间隔内, 质点的位移大小为 _____, 在 t 由 0 到 4 s 的时间间隔内质点走过的路程为 _____.

1.10 一质点以匀速率 π (m/s) 做半径为 5 m 的圆周运动, 则该质点在 5 s 内经过的位移大小是 _____, 经过的路程是 _____.

1.11 一质点由静止出发, 以匀速率 0.1 m/s 沿竖直圆作顺时针转向的圆周运动. 圆的半径为 1 m, 当它走过 $2/3$ 圆周时, 走过的路程是 _____. 这段时间的平均速度的大小为 _____, 其方向是 _____.

1.12 一个质点沿 x 轴作直线运动, 其运动学方程为 $x = 3 + 6t + 8t^2 - 12t^3$, 则

(1) 质点在 $t = 0$ 时刻的速度 $v_0 =$ _____, 加速度 $a_0 =$ _____.

(2) 加速度为 0 时, 该质点的速度 $v =$ _____.

1.13 两车 A 和 B, 在笔直的公路上同向行驶, 它们从同一起始线上同时出发, 并且由出发点开始计时行驶的距离 x 与行驶时间 t 的函数关系式如下.

A 为 $x_A = 4t + t^2$.

B 为 $x_B = 2t^2 + 2t^3$.

(1) 它们刚离开出发点时, 行驶在前面的一辆车是_____.

(2) 出发后, 两辆车行驶距离相同的时刻是_____.

(3) 出发后, B 车相对 A 车速度为零的时刻是_____.

1. 14 一质点从静止出发沿半径 $R=1$ m 的圆周运动, 其角坐标随时间 t 的变化规律是 $\theta = 12t^2 - 6t$ (SI), 则质点的角速度 $\omega =$ _____; 切向加速度 $a_t =$ _____.

1. 15 一质点沿 x 轴运动, 其加速度为 $a = 4t$ (SI), 已知 $t=0$ 时, 质点位于 $x=10$ m 处, 初速度 $v=0$. 试求其位置和时间的关系式.

1. 16 一物体沿 x 轴作直线运动, 加速度 $a = a_0 + kt$, a_0, k 是常数. 已知 $t=0$ 时, $v=0$, $x=0$. 求在任意时刻 t 物体的速率和位置.

1. 17 一质点沿 x 轴运动, 其加速度与位置坐标的关系为 $a = 4 + 3x^2$, 若质点在原点处的速度为零, 试求其在任意位置处的速度.

1. 18 一子弹以速度 v_0 水平射入沙土中, 设子弹所受阻力与速度反向, 忽略子弹的重力, 则子弹的加速度为 $a = -\frac{k}{m}v$, 求:

(1) 子弹射入沙土后, 速度随时间变化的函数式.

(2) 子弹进入沙土的最大深度.

1. 19 一质点沿半径为 R 的圆周运动, 质点经过的弧长与时间的关系为 $S = bt + \frac{1}{2}ct^2$, 式中, b, c 是大于零的常数. 求从 $t=0$ 开始到达切线加速度与法线加速度大小相等所经过的时间.

1. 20 一物体悬挂在弹簧上作竖直运动, 其加速度为 $a = -ky$, 式中, k 为大于零的常数, y 是以平衡位置为原点所测得的坐标. 假定振动的物体在坐标 y_0 处的速度为 v_0 , 试求速度 v 与坐标 y 的函数关系式.

第 2 章

质点动力学

引言

以牛顿运动定律为基础的经典力学,作为普适力学理论兴盛了约 300 年. 20 世纪初,在高速领域和微观领域,经典力学被相对论和量子力学所取代. 但在一般的工程技术领域,包括机械制造、土木建筑,甚至于航空航天技术中,经典力学仍然保持着充沛的活力而起着基础理论的作用. 它的这种实用性是我们进入大学阶段还要学习经典力学的一个重要原因. 而且,力学的基本原理是物理学其他分支的基础,对于其他自然科学也具有重要的意义.

在上一章中,我们重点讨论了对质点运动的描述,解决了如何描述质点做机械运动的问题,但没有涉及质点运动状态发生变化的原因. 那么,物体为何运动以及它的运动状态为什么会发生变化呢? 本章正是来解决这一问题的. 在这一章中,我们要研究物体运动状态变化的原因及其相应规律. 首先,介绍牛顿运动定律和质点系的质心定律;其次,介绍力的时间累积效应规律——动量定理和动量守恒定律;最后,介绍了功和能. 动量守恒定律及能量守恒定律是构筑经典力学的基石,其应用范围也已超出了经典力学,对于研究宇宙天体的运动和微观粒子的运动都具有重要意义.

2.1 牛顿运动定律

任何物体都具有保持静止或匀速直线运动状态不变的性质,这样的一种特性叫做**惯性**. 在研究物体相对运动时,选取的参考系是牛顿运动定律适用的参考系,这样的系统称为**惯性参考系**. 凡是相对于某一已知的惯性系,做匀速直线运动的参考系也都是惯性参考系. 地球有自转和公转,所以地球不是一个很好的惯性系. 太阳也不是一个理想的惯性系,因为太阳绕银河系的中心旋转,银河系和河外系也都在总星系中旋转. 如此说来,在宇宙中严格的惯性系并不存在. 不过,一个参考系能否被看做惯性系,只能根据观测与实验结果来判断. 实验证明,在许多情况下,地球的自转和相互作用的影响可以忽略不计,固定在地球表面上的参考系和地心参考系可以看做是近似程度相当好的惯性系;太阳绕银河系的中心旋转的角速度比地球自转和公转的角速度都小得多,因此,太阳参考系与惯性系的相似程度比地球高得多,天文观测的结果也证明了这一点. 由此可以看出,只要将参考系在宇宙中不断地扩大,就能获得越来越精确的惯性系. 严格的惯性系是参考系的一种理想模型,目前最好的实用惯性系是以选定的 1 535 颗恒星平均静止位形作为基准的参考系——FK4 系.

2.1.1 牛顿运动三定律

1. 牛顿第一定律

牛顿将伽利略的发现总结为动力学的重要定律. 1686年,他在著名的《自然哲学的数学原理》中写道:任何物体都保持静止或匀速直线运动状态,直到其他物体作用的力迫使它改变这种状态为止.这就是**牛顿第一定律**,也称为**惯性定律**.

牛顿第一定律提出了两个力学基本概念,一个是物体的惯性,另一个就是力.仅当物体受到其他物体作用时才会改变其运动状态,这种作用称之为力.也就是说,力是使物体改变运动状态的原因,而不是维持物体运动的原因.

在自然界中,完全不受其他物体作用的物体,实际上是不存在的.任何物体总要受到接触力或场力的作用,因此牛顿第一定律不能简单地直接通过实验来验证.

2. 牛顿第二定律

牛顿在1687年出版的《自然哲学的数学原理》一书中,对力与物体运动状态之间的规律,提出了下述定量关系,即

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (2-1)$$

式(2-1)表明,物体所受的力等于物体动量的瞬时变化率,其中, $m\mathbf{v}$ 为物体的动量,记为 $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$,动量 \mathbf{p} 的方向与速度 \mathbf{v} 的方向相同.

在国际单位制中,动量的单位是千克·米/秒($\text{kg}\cdot\text{m/s}$).

式(2-1)可以写为

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2-2)$$

当物体在低速情况下运动时,即物体运动的速度远远小于光速时,物体的质量可以视为不依赖于速度的常量,于是式(2-2)可以写成

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (2-3)$$

这是我们比较熟悉的牛顿第二定律的形式.当物体的质量发生变化时,如火箭在发射过程中,火箭的质量随时间减少,此时,就不能用式(2-3)来分析这类变质量物体的运动.而且,当物体的速度接近光速时,即使物体在运动过程中并不喷出质量,物体的质量也将随速度而变化,因而式(2-3)也不再适用,但式(2-1)被实验证明依然是成立的.所以,式(2-1)具有更广泛的意义.

在国际单位制中,质量的单位是千克(kg),加速度的单位是米/秒²(m/s^2),力的单位是牛(N).

牛顿第二定律是牛顿运动定律的核心,对它必须有正确的理解.

应用牛顿第二定律时,必须明确:

(1) 牛顿第二定律概括了**力的叠加原理**.实验表明,如果物体同时受到几个力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 、 \mathbf{F}_3 、 \dots 的作用,它所产生的加速度等于合外力 $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ 所产生的加速度,也等于每个力单独所产生的加速度 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 、 \dots 的矢量和.也就是说,每一个力对物体作用的结果,并不因为同时有其他力的作用而有所改变,这就是力的**叠加原理**.该原理的数学表达式为

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots = m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + \cdots = m \sum_i \mathbf{a}_i = m\mathbf{a} \quad (2-4)$$

故 \mathbf{F} 应理解为所有外力的矢量和, \mathbf{a} 就是合外力作用下物体的加速度.

(2) 矢量性. 力和加速度都是矢量, 既有大小, 又有方向, 式(2-3)是矢量关系. 因此, 在运用此定律时应采用矢量的法则来处理, 为了运算方便, 可选取适当的坐标系, 把式(2-3)分解为各坐标方向上的分量形式.

在直角坐标系下, 式(2-3)可分解为

$$\begin{cases} F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases} \quad (2-5)$$

在自然坐标系中, 式(2-3)可分解为

$$\begin{cases} F_n = ma_n = m \frac{v^2}{R} \\ F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt} \end{cases} \quad (2-6)$$

式(2-6)中, F_n 和 F_τ 分别是质点在该时刻所受合力 \mathbf{F} 在法向和切向的分力. 这两组分量形式表现了牛顿运动定律的矢量意义, 即某方向的外力只能改变该方向上物体的运动状态, 只能在该方向上使物体产生加速度.

(3) 瞬时性. 牛顿第二定律定量地表述了物体的加速度与所受合力之间的瞬时关系, \mathbf{a} 表示瞬时加速度, \mathbf{F} 表示瞬时力, 物体的加速度 \mathbf{a} 只在它受力作用时才产生, 它们同时产生, 同时消失. 如果在某一瞬间物体失去了力的作用, 则就在这一瞬间物体的加速度立即消失, 此后, 物体将以这一时刻的速度做匀速直线运动, 这正是惯性的表现.

3. 牛顿第三定律

两物体之间的作用力 \mathbf{F} 和反作用力 \mathbf{F}' , 沿同一直线, 大小相等, 方向相反, 分别作用在两个物体上, 即

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}' \quad (2-7)$$

上述规律就是**牛顿第三定律**. 这个规律中物体之间的作用总是相互的, 我们常把其中一个力称为作用力, 而把另一个力称为反作用力.

为了正确理解牛顿第三定律, 必须注意以下几点.

- (1) 作用力和反作用力总是大小相等, 方向相反, 沿同一直线.
- (2) 作用力和反作用力总是成对出现, 同时产生, 同时消失.
- (3) 作用力和反作用力一定是同一性质的力.
- (4) 作用力和反作用力分别作用在两个物体上, 因此, 绝对不是一对平衡力.

2.1.2 常见力和基本力

要应用牛顿运动定律解决问题, 首先必须能正确分析物体的受力情况. 在日常生活和工程技术中经常遇到的力有重力、弹力、摩擦力等. 关于它们的知识, 在高中物理中已经学习过, 在此只作一些简单的回顾.

1. 几种常见的力

1) 重力

地球表面附近的任何物体都要受到地球引力的作用,称为地球表面物体的**重力**,它的大小也常常称为物体的重量.若忽略地球自转的影响,物体所受的重力就等于它所受的地球对它的万有引力,其大小等于物体的质量 m 与重力加速度 g 的乘积,用 P 表示物体的重力,则

$$P=mg \quad (2-8)$$

式(2-8)中,重力加速度 g 的大小因所在地的纬度和离地面高度的不同而不同,有时还受到所在地区的矿产结构的影响,通常取 $g=9.8 \text{ m/s}^2$.

2) 弹力

物体在外力作用下发生形变,发生形变的物体,由于要恢复原状,就会对与它接触的物体产生力的作用,这种力叫做弹力.拉伸或压缩的弹簧作用于物体的力,桌面作用于放在其上的物体的力,绳子作用于系在其末端的物体的力等,都属于弹力.实际上,当两个物体直接接触时,只要物体之间发生形变,物体间就产生一种相互作用力,并且在一定的弹性限度内,形变越大,力也越大;形变消失,力也随之消失.这种与物体形变有关的力,就称为弹力.弹力是一种接触力,弹力的方向指向物体恢复原状的方向.

弹力的存在形式很多,下面只讨论三种常见的表现形式.

(1)支持力(或正压力).两个物体通过一定面积相互挤压,这种相互挤压的物体都会发生形变(即使小到难以观察,形变依然存在),为了恢复所产生的形变,便产生了支持力(或正压力),其大小取决于相互挤压的程度,其方向总是垂直于两物体的接触面指向对方.

(2)绳子对物体的拉力.这种拉力是由于绳子发生了形变而产生的,其大小取决于绳子被拉紧的程度,其方向总是沿着绳子指向绳收缩的方向.

绳子产生拉力时,其内部各段之间也有相互作用的弹力存在,这种绳子内部的弹力叫做张力.一般来说,绳中各处的张力可以是不同的,它由绳子的形变情况,同时也由绳子的质量分布及运动状态决定.在通常讨论的问题中,绳子的质量都可以忽略不计,这样,不论绳子是处于静止状态,还是做加速运动,绳子上各处的张力都是相等的,而且等于外力.一旦绳子的质量不能忽略,则当绳子做加速运动时,绳子上各处的张力就不相等了.

(3)弹簧的弹性力.当弹簧被拉伸或压缩时,弹簧发生形变,它就会对与之相连的物体产生弹力的作用,这种弹力总是要使弹簧恢复原长.

在弹性限度内,弹力的大小与形变量成正比,若以 F 表示弹力的大小,以 x 表示被拉伸或压缩的长度(即形变量),如图 2.1 所示,则根据胡克定律有

$$F=-kx \quad (2-9)$$

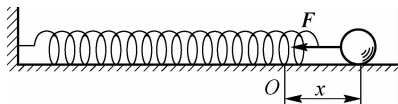


图 2.1 弹性力

其中, k 为弹簧的劲度系数,它的数值取决于弹簧本身的结构,负号表示弹力 F 的方向与形变的方向相反.当 x 为正值时,表示弹簧被拉伸,则 F 为负值,即弹力 F 的方向沿着 x 轴的负方向;当 x 为负值时,表示弹簧被压缩,则 F 为正值,即弹力 F 的方向沿着 x 轴的正方向.

可见,弹簧的弹力方向总是指向要恢复原状的方向.

3) 摩擦力

当一个物体在另一个物体表面上滑动或有滑动的趋势时,在这两个物体的接触面上就会产生阻碍物体间相对滑动的力,这种力就是摩擦力.当物体有相对滑动的趋势,但尚未运动时,物体间的摩擦力称为静摩擦力.静摩擦力的大小 f_s 因物体的外力大小的不同而不同,而且总与外力的大小相等,方向相反.另外,物体之间的静摩擦力有一个最大值,称为最大静摩擦力.实验表明,最大静摩擦力 f_{sm} 与接触面的正压力 N 的大小成正比,它们存在下面的关系

$$f_{sm} = \mu_0 N \quad (2-10)$$

静摩擦力的方向与相对运动趋势的方向相反.式(2-10)中, μ_0 称为静摩擦系数,其数值由两个物体表面状况和材料性质等因素决定,通常由实验测得.所以,静摩擦力的大小由外力决定,可以取从零到 f_{sm} 之间的任何值.

当物体有相对滑动时,两物体接触面的摩擦力称为滑动摩擦力.实验表明,滑动摩擦力 f 的大小也与正压力 N 的大小成正比,即

$$f = \mu N \quad (2-11)$$

滑动摩擦力的方向与相对运动的方向相反.式(2-11)中, μ 称为滑动摩擦系数,其数值主要由接触面的状况和材料性质等因素决定.对于给定的两个物体,其滑动摩擦系数 μ 略小于其静摩擦系数 μ_0 ,但在不严格区分的情况下,可以认为 $\mu = \mu_0$.

摩擦力是普遍存在的,是一种接触力,并在人们的生活和技术中起着重要作用,在地面上运动的物体,由于摩擦力的存在,其运动速度会逐渐减小;机床和车轮的转轴,由于摩擦力的存在,会逐渐损坏.在现代交通工具中,有 10%~30% 的功率由于要克服摩擦力而被消耗.但是,世界上若不存在摩擦力,那么我们的生活将变得无法想象,人无法行走,车无法行驶,即便将车子开动起来也无法使其停止.

2. 基本力

近代物理学证明,在自然界中,从宇宙天体到基本粒子这样广阔领域里的运动,均起因于四种基本相互作用力,它们是万有引力、电磁力、强力和弱力.下面分别对这四种相互作用力作简单介绍.

1) 万有引力

任何物体之间都存在着相互吸引力,称为万有引力.万有引力定律是牛顿在开普勒等前人研究成果的基础上总结出来的.

质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点,相距 r 时, m_1 和 m_2 间的引力为

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (2-12)$$

式中, G 称为万有引力常量,它是对任何物体都适用的普适恒量,这个规律称为万有引力定律,在国际单位制中,它的大小经测定为 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$. \mathbf{e}_r 为施力者指向受力者的单位矢量,式中的负号则表示该力的方向与 \mathbf{e}_r 的方向相反,如图 2.2 所示.

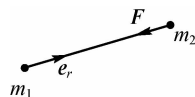


图 2.2 m_2 受 m_1 的万有引力

万有引力常量 G 的数量级很小,因此,通常地面上两物体之间的引力很小,可以忽略不

计.但是,质量很大的天体之间的引力以及天体附近物体间的引力就不可忽略了.所以只有在所涉及的物体中,至少包括一个天体时,万有引力才是重要的.

近代物理研究指出,两个物体之间的万有引力,是通过一种称为引力场的特殊物质来相互作用的.万有引力定律把天上的运动和地面上的运动统一起来,被称为“物理学的第一次伟大的综合”,它打破了自古以来人们对天体的神秘感,增强了人们认识自然界的信心.

2) 电磁力

存在于静止电荷之间的电性力以及存在于运动电荷之间的电性力和磁性力,由于它们在本质上相互联系,19世纪末,麦克斯韦把它们统一为电磁相互作用,称为电磁力.

由于分子和原子都是由电荷组成的系统,所以,它们之间的作用力基本上就是它们的电荷之间的电磁力.

从物质的微观结构看,弹力起源于构成物质的微粒之间的电磁力,而摩擦力也与分子间的引力作用和静电作用有关,它们均属于电磁力.

3) 强力

进入20世纪,人们认识到原子核由质子和中子组成.虽然质子间具有强大的电排斥作用,但却能聚集在原子核的小体积内.当人们对物质结构的探索进入比原子还小的微观领域中时,发现在核子、介子等之间存在一种强力,正是这种强力把原子内的质子和中子紧紧束缚在一起,形成原子核.强力是一种短程力,其作用范围很短,作用距离为 10^{-15} m.当粒子间的距离超过 10^{-15} m时,强力可以忽略,当粒子间的距离小于 10^{-15} m时,强力占主要支配地位.

4) 弱力

同样,进入20世纪,在微观领域中人们还发现一种短程力,称为弱力.弱力在导致 β 衰变放出电子和中微子时,显示出它的重要性.贝克勒尔和居里夫人发现了原子核的放射现象,表明即使有强力存在,原子核也会裂变,质子也会从原子核中挣脱出来.研究表明,这是一种弱相互作用,称为弱力,弱力的作用距离只有约 10^{-17} m.

综上所述,自然界中各种各样的力,就其本质而言,都归结为四种基本力——万有引力、电磁力、强力和弱力.重力属于万有引力,而弹力、摩擦力,甚至包括浮力、黏滞阻力、气体的压力等,从本质上讲都属于电磁力.

2.1.3 牛顿定律的应用

必须指出:牛顿运动定律应用的对象是质点.牛顿运动定律不但是质点动力学的基础,而且是研究一般物体机械运动的基础.因此,应该深刻领会牛顿三定律的含义,并在理解有关概念、掌握有关规律的基础上,学会应用其解决具体的力学问题.

利用牛顿运动定律解题时,最好按下述思路分析.

1. 认物体

在有关问题中选定一个物体(抽象为质点)作为分析的对象.如果问题涉及几个物体,那就一个一个地作为对象进行分析,认出每个物体的质量.

2. 看运动

分析所选定物体的运动状态,包括它的轨迹、速度和加速度.如果问题涉及几个物体,还要找出它们运动间的联系,即它们的速度和加速度之间的关系.

3. 查受力

找出被选定的物体所受的所有外力,画出简单的示意图表示物体受力的情况,这种图称为示力图.

4. 列方程

把上述分析出的质量、速度、加速度和力,用牛顿第二定律联系起来,列出方程.利用直角坐标系的分量式列式时,在图中应注明坐标轴的方向.在方程式足够的情况下,就可以求解未知量了.

在质点动力学中,一般有两类问题:第一类,已知力的作用情况,求运动;第二类,已知运动情况,求力.这两类问题的分析方法是一样的,都可以按上述步骤进行,只是未知数不同罢了.

例 2.1 如图 2.3 所示,一个质量为 m 的小球最初位于 A 点,然后沿半径为 R 的光滑圆轨道 $ABCD$ 下滑,试求小球达到 C 点时的角速度和对圆轨道的作用力.

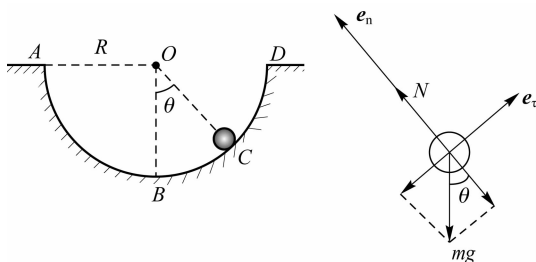


图 2.3 例 2.1 图

解: 小球在圆轨道上受两个力的作用,重力 mg 和轨道的支持力 N . 由于小球在光滑圆轨道上做变速率圆周运动,故可以建立自然坐标系. 在自然坐标系中牛顿第二定律的分量形式为

$$\text{法向分力} \quad F_n = N - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$

$$\text{切向分力} \quad F_t = -mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt}$$

上式中引入中间变量 s , 即

$$-mg \sin \theta = m \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\text{由于} \quad \frac{ds}{dt} = v, ds = R d\theta$$

因此有

$$v dv = -gR \sin \theta d\theta$$

两边取定积分,则有

$$\int_0^v v dv = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} -gR \sin \theta d\theta$$

得

$$v = \sqrt{2gR \cos \theta}$$

所以小球在 c 点的角速度为

$$\omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{2g\cos\theta}{R}}$$

由自然坐标系中牛顿第二定律的法向分量形式,可得轨道对小球的支持力为

$$N = m \frac{v^2}{R} + mg\cos\theta = 3mg\cos\theta$$

所以小球对圆轨道的作用力为

$$N' = -N = -3mg\cos\theta$$

例 2.2 研究小球在水中的沉降速度. 已知小球质量为 m , 水对小球的浮力为 C , 水对小球的黏滞阻力与其运动速度成正比, 即 $f = kv$, k 为比例系数, 设 $t=0$ 时, 小球的速度为零.

解: 如图 2.4 所示, 小球受重力 mg 、黏滞阻力 f 及水的浮力 C 三个力的作用. 选取竖直向下为正方向, 由牛顿第二定律可得

$$mg - C - f = ma$$

由于 $f = kv$, 因此小球是在做变力作用下的直线运动, a 不是恒定的, 则上式可以写成

$$mg - C - kv = m \frac{dv}{dt}$$

分离积分变量得

$$\frac{dv}{mg - C - kv} = \frac{1}{m} dt$$

两边取定积分

$$\int_0^v \frac{dv}{mg - C - kv} = \int_0^t \frac{dt}{m}$$

$$\int_0^v \frac{d(mg - C - kv)}{-k(mg - C - kv)} = \int_0^t \frac{dt}{m}$$

得

$$\ln(mg - C - kv) - \ln(mg - C) = -\frac{k}{m}t$$

所以

$$v = \frac{mg - C}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

这就是小球在水中的沉降速度随时间的变化规律, 如图 2.5 所示. 可以看出小球的运动速度随时间 t 按指数规律递增, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 小球速度趋于一极限值, $v_m = \frac{mg - C}{k} = \text{常量}$. v_m 称为终极速度或收尾速度, 然后以此速度匀速下降.

在物理学中, “当 $t \rightarrow \infty$ ” 是指时间足够长, 并不意味着无限长.

2.1.4 惯性参考系 惯性力

我们知道, 运动是绝对的, 而对运动的描述是相对的, 为了具体描述运动, 必须选择参考系, 对于不同的参考系, 同一物体的运动描述可以不同, 但是, 如果问题涉及的是运动和力的

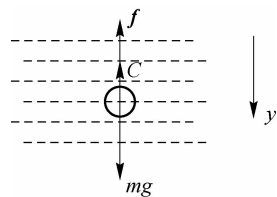


图 2.4 例 2.2 图

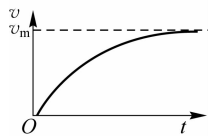


图 2.5 小球在水中沉降的 $v-t$ 曲线

关系,即要应用牛顿运动定律时,参考系就不能任意选择,因为牛顿运动定律并非在任何参考系中都成立.

1. 惯性参考系

实验表明,在有些参考系中,牛顿运动定律是成立的,而在另一些参考系中,牛顿运动定律却并不适用.例如,地面上放着一个静止的物体,人站在地面上观察该物体时,物体静止着,加速度为零,这是因为作用在它上面的力相互平衡,即合力为零的缘故.因此,以地面为参考系观察该物体,符合牛顿运动定律.如果此人坐在一辆沿路面加速行驶的汽车上观察此物体,则在车上看到的该物体的情况就大不一样了,该物体是向与汽车相反的方向做加速运动的,该物体的受力情况没有变化,合力仍然为零,但却有了加速度,这显然是不符合牛顿运动定律的.因此,以相对于地面做加速行驶的汽车作为参考系,牛顿运动定律不再成立.由此可见,牛顿运动定律并不是对任何参考系都适用.

我们把牛顿运动定律成立的参考系称为**惯性参考系**,简称**惯性系**;而牛顿运动定律不成立的参考系称为**非惯性参考系**,简称**非惯性系**.

确定一个参考系是否是惯性参考系,只能依靠观察和实验,如果在所选择的参考系中应用牛顿运动定律,所得的结果在要求的精确度范围内与实验相符合,就可以认为该参考系是惯性参考系.从天体运动的研究知道,如果选定太阳为参考系,以太阳的中心为原点,指向任一恒星的直线为坐标轴,那么所观察到的大量天文现象,都能和根据牛顿运动定律及万有引力定律所推算的结果相符合,因此,通常把太阳参考系认为是惯性参考系.实验还表明,相对于惯性参考系做匀速直线运动的参考系也都是惯性参考系,而相对于惯性参考系做变速运动的参考系不是惯性参考系.

生产实践和实验表明,地球可视为惯性参考系,但不是一个严格的惯性系,因为地球对太阳有公转和自转,也就是说地心相对于太阳以及地面相对于地心都有加速度.但是如果把地球对太阳的向心加速度和地面对地心的向心加速度计算出来,可以发现,这些向心加速度都是极其微小的,因此,在一般计算范围内,地球或静止在地面上的任一物体都可以近似看成惯性参考系.同样,在地面上做匀速直线运动的物体也可近似看成惯性参考系,但是在地面上作变速运动的物体就不能看成惯性参考系了,不能直接应用牛顿运动定律.

2. 惯性力

通过前面的学习,我们已经知道,牛顿运动定律只在惯性系中成立.然而,在实际情况下,往往要考虑非惯性系.因为,在实际问题中,需要在非惯性系中观察和处理物体的运动现象.若仍然希望能在非惯性系中运用牛顿运动定律处理动力学问题,则必须引入一种惯性力.

1) 直线加速参考系的惯性力

设有一个质点,质量为 m ,相对于某一惯性系 k ,在实际的外力 F 作用下获得加速度 a ,根据牛顿第二定律,有

$$F=ma$$

设想有另一非惯性系 k' ,相对于惯性系 k 以加速度 a_0 平动.设质点在非惯性系 k' 中的加速度为 a' .由运动的相对性可得

$$a=a'+a_0$$

以上两式联立得

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}' + m\mathbf{a}_0$$

也可写成

$$\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}_0) = m\mathbf{a}'$$

此式说明,质点受的合外力 \mathbf{F} 并不等于 $m\mathbf{a}$, 因此, 牛顿运动定律在非惯性系 k' 中不成立. 若仍要在非惯性系 k' 中应用牛顿运动定律观测该质点的运动, 则可认为质点除了受到实际的外力 \mathbf{F} 外, 还受到一个大小和方向由 $(-m\mathbf{a}_0)$ 表示的力, 称此力为惯性力, 用 \mathbf{F}_0 表示, 即

$$\mathbf{F}_0 = -m\mathbf{a}_0 \quad (2-13)$$

这个式子表明, 在直线加速参考系中, 惯性力的大小等于质点的质量和此非惯性系相对于惯性系的加速度 \mathbf{a}_0 的乘积, 而方向与此加速度 \mathbf{a}_0 的方向相反. 惯性力是为了在非惯性系中应用牛顿第二定律而必须引入的力.

引入了惯性力, 在非惯性系中就有了下述牛顿第二定律的形式

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}' \quad (2-14)$$

其中, \mathbf{F} 是实际存在的各种力(或它们的合力), 它们是物体之间的相互作用, 是前面提到的常见力和基本力, 属于真实力. 而惯性力 \mathbf{F}_0 是一种假想力, 因为惯性力并不是来自于物体间的相互作用. 所以, 惯性力无施力物体, 也就不存在相互作用力, 它只是物体的惯性在非惯性系中的表现.

2) 匀速转动参考系的惯性力

如图 2.6 所示, 长度为 r 的细绳的一端系一个质量为 m 的小球, 另一端固定于圆盘的中心. 当圆盘以匀角速度 ω 绕通过盘心并垂直于盘面的竖直轴旋转时, 小球也随圆盘一起转动. 若以地面为参考系, 绳子给予小球的拉力 \mathbf{T} 使小球做圆周运动, 这是符合牛顿运动定律的, 而且

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= m\mathbf{a}_n \\ T &= ma_n = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 r \end{aligned}$$

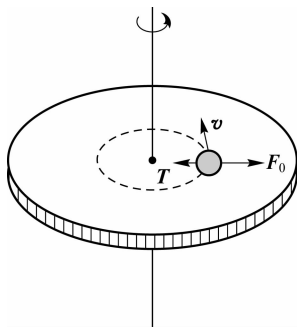


图 2.6 做匀角速度转动的参考系中的惯性力

若以转动的圆盘这个非惯性系为参考系, 小球受到细绳的拉力 \mathbf{T} 的作用, 但却是静止的, 这是不符合牛顿第二定律的. 如果还要使用牛顿第二定律, 则必须认为小球除了受到细绳的拉力 \mathbf{T} 作用外, 还受到惯性力 \mathbf{F}_0 的作用, 惯性力 \mathbf{F}_0 与拉力 \mathbf{T} 相平衡, 这样相对于圆盘非惯性系, 小球受力满足下面的关系

$$\begin{aligned} \mathbf{T} + \mathbf{F}_0 &= 0 \\ \mathbf{F}_0 &= -\mathbf{T} = -m\mathbf{a}_n \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{F}_0 = -m\mathbf{a}_n \quad (2-15)$$

显然,这种惯性力的方向总是与法向加速度 \mathbf{a}_n 的方向相反,总是背离轴心沿着半径向外,故称为惯性离心力,即把相对于转动参考系静止的物体所受的惯性力称为惯性离心力.

由前面的分析可知,惯性离心力和在惯性系中观察到的向心力大小相等,方向相反,因此常有人认为惯性离心力是向心力的反作用力,其实这是一种误解.因为我们知道,向心力是真实力作用的表现,而惯性离心力是一种假想力,它只是运动物体的惯性在参考系中的表现,它没有反作用力.因此,不能说惯性离心力是向心力的反作用力.

例 2.3 如图 2.7 所示,在刹车时卡车有一恒定的加速度 $a = 7.0 \text{ m/s}^2$,刹车一开始,原来停在上面的一个箱子就开始滑动,它在卡车车厢上滑动了 $L = 2 \text{ m}$ 后撞上了卡车的前帮,问此箱子撞上前帮时相对卡车的速度为多大? 设箱子与车厢底板之间的滑动摩擦系数 $\mu = 0.5$.

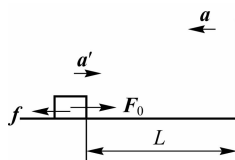


图 2.7 例 2.3 图

解:以车厢为参考系,由于车厢是非惯性参考系,因此,箱子在水平方向除了受到摩擦力 f 外,还要受到惯性力 $\mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}$ 的作用. 设箱子相对卡车的加速度为 \mathbf{a}' ,由牛顿第二定律得

$$F_0 - f = ma'$$

即

$$ma - \mu mg = ma'$$

所以

$$a' = \frac{ma - \mu mg}{m} = a - \mu g$$

再由 $v^2 = 2a'L$,得箱子碰上车厢前帮时相对于卡车的速度为

$$v = \sqrt{2a'L} = \sqrt{2(a - \mu g)L} = \sqrt{2 \times (7 - 0.5 \times 9.8) \times 2} \text{ m/s} = 2.9 \text{ m/s}$$

2.2 动量定理

我们研究了牛顿运动定律,特别是牛顿第二定律给出了力的瞬时作用规律.实际上,力对物体的作用总是要延续一段时间.在这段时间内,力的作用将积累起来产生一个总效果.揭示力的时间积累效应的规律,就是动量定理.把动量定理应用于质点系,导出一个重要的守恒定律——动量守恒定律.动量守恒定律和功能原理深刻反映了机械运动与其他运动形式之间相互转化的关系,具有普遍的意义,它们是自然界最基本、最普遍的规律.

2.2.1 质点的动量定理

1. 质点的动量定理

上一节在讲述牛顿第二定律时已经引入了动量这一物理量,引入动量后,牛顿第二定律可以写成

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

在实际生产实践中发现,仅讨论力的瞬时效应是不够的.如果作用在物体上的力持续一段时间,会产生不同于牛顿第二定律的作用效果,即力作用一段时间,将上式改写成

$$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p} \quad (2-16)$$

这一关系称为**动量定理的微分形式**,其中, $\mathbf{F}dt$ 表示质点所受合外力 \mathbf{F} 在时间 dt 内的累积量,称之为在 dt 时间内质点所受合力 \mathbf{F} 的**元冲量**,用 $d\mathbf{I}$ 表示,即

$$d\mathbf{I} = \mathbf{F} \cdot dt \quad (2-17)$$

如果合力 \mathbf{F} 持续地从 t_0 时刻作用到 t 时刻,设 t 时刻质点的动量为 \mathbf{p} , t_0 时刻质点的动量为 \mathbf{p}_0 ,则对式(2-17)积分,就可以求出这段时间力的持续作用效果为

$$\mathbf{I} = \int d\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}dt = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \quad (2-18)$$

式中, \mathbf{I} 表示在 $t \rightarrow t_0$ 时间内的冲量,即 $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}dt$,于是得到

$$\mathbf{I} = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 \quad (2-19)$$

此式表明,质点在运动过程中,作用于质点的合力的冲量等于质点动量的增量.这个结论称为**质点的动量定理**.

由 $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}dt$ 可知,冲量定义为合外力在一段时间内的积分,即冲量是描述力的时间累积效应的物理量.质点从一个状态变化到另一个状态中间要经历某种过程.有一类物理量是用来描述过程的,称为过程量;另一类物理量是用来描述状态的,称为状态量.显然,冲量是过程量,动量是状态量,动量定理表明力的持续作用的时间效果,它给出了过程量(冲量 \mathbf{I})和该过程初、末两状态的状态量(动量 $m\mathbf{v}_0$ 和 $m\mathbf{v}$)之间的定量关系.

冲量是矢量,方向与质点动量增量的方向相同,仅在恒力的情况下,冲量的方向才与合外力的方向一致,冲量的单位是牛顿·秒(N·S).

虽然动量定理与牛顿第二定律一样,都反映质点运动状态的变化与力的作用关系,但是它们是有区别的.牛顿第二定律所表示的是在力的作用下动量的瞬时变化规律,而动量定理则表示在力的作用下质点动量的持续变化情形,反映一段时间内力对质点作用的累积效果.

动量定理是直接由牛顿第二定律得到的,所以它也只在惯性参考系中成立.

动量定理在打击和碰撞等问题中实用性很强,在打击和碰撞的极短时间内质点间的相互作用力称为冲力,冲力的特点是作用时间极短,大小随时间而急剧变化,冲力随时间的变化情况往往很复杂,有时无法知道冲力与时间的函数关系,因此引入**平均冲力**的概念,如图2.8所示,冲量的大小 $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}dt$,它等于冲力随时间变化曲线下的面积.现在找出一个恒力 \mathbf{F} ,使它在同样时间($t-t_0$)内的冲量与 \mathbf{I} 相等,也就是图中所示矩形的阴影面积与冲力曲线下的面积相等,即

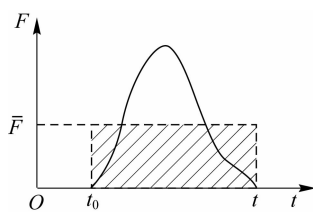


图 2.8 平均冲力示意图

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}dt = \bar{\mathbf{F}} \cdot (t - t_0)$$

称恒力为平均冲力,因此平均冲力定义为

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{t-t_0} \mathbf{I} = \frac{\int_{t_0}^t \mathbf{F} dt}{t-t_0} = \frac{m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0}{t-t_0} \quad (2-20)$$

由式(2-20)可以看出,平均冲力也是一个矢量,其方向与冲量 \mathbf{I} 的方向相同.

有了平均冲力的概念,在打击、碰撞这类问题中,可以在实验中测定物体在碰撞前后的动量,借助于动量定理来确定物体所受的冲量,从而估算冲力的平均值. 尽管这个平均冲力并不是冲力的确切描述,但在不少实际问题中,这样估算就足够了.

2. 动量定理的分量形式

动量定理是矢量方程,它表明,合力的冲量方向就是动量增量 $\Delta\mathbf{p}$ 的方向. 为了正确地找出冲量 \mathbf{I} ,就必须用矢量作图法来处理. 因此,在处理具体问题时,常使用动量定理的分量形式.

在直角坐标系中,动量定理在各坐标轴的分量形式为

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_0}^t F_x dt = \bar{F}_x(t-t_0) = mv_x - mv_{x_0} \\ I_y = \int_{t_0}^t F_y dt = \bar{F}_y(t-t_0) = mv_y - mv_{y_0} \\ I_z = \int_{t_0}^t F_z dt = \bar{F}_z(t-t_0) = mv_z - mv_{z_0} \end{cases} \quad (2-21)$$

这些分量式表明,冲量在某个方向的分量等于在该方向上质点动量分量的增量. 也就是说,冲量在任一方向的分量只能改变它自己方向的动量分量,而不能改变与它相垂直的其他方向的动量分量. 由此可以看到,如果作用于质点的冲量在某个方向上的分量等于零,尽管质点的总动量在改变,但在这个方向的动量分量却保持不变.

在应用动量定理的分量式时,应该注意各个分量都是代数量,其正负号由坐标轴的方向来确定.

例 2.4 一个小球在弹簧的作用下做简谐振动,弹力 $F = -kx$, 而位移 $x = A\cos \omega t$. 其中, k 、 A 、 ω 都是常量. 求在 $t=0$ 到 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 的时间间隔内弹力施于小球的冲量.

解: 由冲量的积分形式 $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt$ 可知所求的冲量为

$$I = \int_0^{\pi/2\omega} F dt = -k \int_0^{\pi/2\omega} A \cos \omega t dt = -\frac{kA}{\omega}$$

负号表示此冲量的方向与轴的正方向相反.

例 2.5 用棒打击水平方向飞来的小球,小球的质量为 0.3 kg,速率为 20 m/s,小球受棒击打后,竖直向上运动 10 m,即达到最高点. 若棒与球的接触时间是 0.02 s,并忽略小球的自重,求棒受到的平均冲力.

解: 以小球为研究对象,由动量定理可求得小球所受的平均冲力,再应用牛顿第三定律,即可求得棒所受的平均冲力. 如图 2.9 所示,建立坐标系,并画出打击前后动量变化的矢量图.

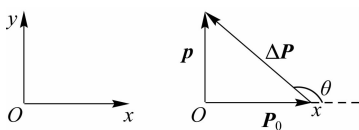


图 2.9 例 2.5 图

$$\mathbf{I} = \bar{\mathbf{F}}\Delta t \quad (1)$$

而

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} \quad (2)$$

再由动量定律的分量形式,得

$$I_x = mv_x - mv_{0x} \quad (3)$$

$$I_y = mv_y - mv_{0y} \quad (4)$$

已知 $v_{0x} = 20 \text{ m/s}$, $v_x = 0$, $v_{0y} = 0$, 打击后瞬间小球向上飞行的速率为

$$v_y = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 10} \text{ m/s} = 14 \text{ m/s}$$

将已知量代人(3)和(4),得

$$I_x = (0 - 0.3 \times 20) \text{ m/s} = -6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$I_y = (0.3 \times 14 - 0) \text{ m/s} = 4.2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

将 I_x 、 I_y 代人(2)式,并由(1)式得

$$\bar{\mathbf{F}} = \sqrt{\frac{(-6)^2 + (4.2)^2}{0.02}} \text{ N} = 366.2 \text{ N}$$

小球所受冲量的方向就是棒施于小球的平均冲力的方向

$$\tan \theta = \frac{I_y}{I_x} = \frac{4.2}{-6} = -0.7$$

得

$$\theta = 180^\circ - 49^\circ 36' = 130^\circ 24'$$

即棒施于小球的平均冲力的方向与 x 轴正向间的夹角为 $130^\circ 24'$ 。

由牛顿第三定律知,小球施于棒的平均冲力的大小为 366.2 N ,方向与小球所受平均冲力的方向相反,与 x 轴正向的夹角为 $49^\circ 36'$ 。

2.2.2 质点系的动量定理

1. 质点系内力和外力

前面所讨论的都是一个质点的运动,今后还要讨论一组质点的运动。在分析运动问题时,常可以把有相互作用的若干物体作为一个整体加以考虑。当这些物体都可以看成质点时,这一组质点称为一个系统,简称质点系,一个质点系由两个或更多的质点构成。

在一个质点系构成的力学系统中,我们把系统外的物体对系统内的各质点的作用力称为外力,把系统内各质点间的相互作用力称为内力。一个力是内力还是外力,取决于所取系统的范围。例如,把地球和下落的重物看成一个质点系,它们之间的引力是系统的内力,而空气作用在下落重物上的阻力则属于外力;如果把地球、重物和空气看成一个质点系,则空气阻力也是内力。因此,同一个力,在一种情况下是内力,在另一种情况下就有可能是外力。今

后的讨论将表明,对内力和外力加以区分是很有必要的.

2. 质点系的动量定理

一个质点的动量定理已经明确,那么一个质点系的动量定理就可以由每个质点满足的动量定理矢量叠加得到.

系统由 N 个质点组成,在系统中任取一质点 i ,其质量为 m_i . 设该质点受到的外力 \mathbf{F}_i 和系统内其他质点 j 对 i 质点施加的内力作用 \mathbf{f}_{ij} ,则该质点的动量定理微分形式为

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{ij} = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}$$

质点系中的每一个质点都可以列出这样一个方程,将 N 个方程相加,就可以得到质点系满足的动力学方程,即

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{f}_{ij} = \frac{d(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i)}{dt} \quad (2-22)$$

设 $\mathbf{F}_{\text{外}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}_{\text{内}} = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{f}_{ij}$, $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$. 其中,系统内力由很多成对作用力和反作用力组成. 如图 2.10 所示,由牛顿第三定律可知, \mathbf{f}_{12} 和 \mathbf{f}_{21} 是一对作用力和反作用力, $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$, 可得系统的内力之和 $\mathbf{F}_{\text{内}} = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{f}_{ij} = 0$. 因此,式 (2-22) 可写为

$$\mathbf{F}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (2-23)$$

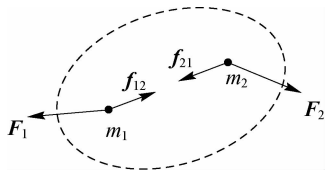


图 2.10 质点系的内力和外力

式(2-23)称为质点系的动力学方程. 这个方程与质点的牛顿第二定理类似,但它不同于牛顿动力学方程. 这个方程也可称为质点系动量定理的微分形式. 考虑 $\mathbf{F}_{\text{外}}$ 持续作用 dt 时间间隔,质点系动量定理的微分形式可写为

$$\mathbf{F}_{\text{外}} dt = d\mathbf{p}$$

其中,等式左端 $\mathbf{F}_{\text{外}} dt$ 是质点系所受合外力在 dt 时间内累积的元冲量,等式右端是质点系的总动量变化. 若 $\mathbf{F}_{\text{外}}$ 从 t_0 持续作用到末时刻 t ,那么

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}_{\text{外}} dt = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{i0} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \quad (2-24)$$

式中, \mathbf{p} 和 \mathbf{p}_0 分别表示系统的末动量和初动量.

式(2-24)表明,作用于质点系的外力矢量和的冲量等于质点系动量的增量,这就是质点系的动量定理,式(2-24)也可写成直角坐标系的分量形式.

从上面的讨论可知,系统的内力可以改变系统内单个质点的动量,但不能改变系统的总动量.

3. 质心动量

质心是力学一个重要的概念,涉及质点系动力学问题都回避不了这个概念.质点系动量可以表示为质心的动量.

由质点系动量定义

$$\boldsymbol{p} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \quad (2-25)$$

以 m 表示质点系的总质量, $m = \sum_i m_i$, 则质点系的动量可表示为

$$\boldsymbol{p} = m \frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt} \quad (2-26)$$

其中,

$$\boldsymbol{r}_c \equiv \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (2-27)$$

式(2-27)为质心矢径的定义. \boldsymbol{r}_c 与参考系有关,可以证明由式(2-27)所确定的质心 c 点,相对于一定质量分布的质点系是完全确定的.质心是质点系的物理量,它是由质点系的质量决定的,与其质量分布有关,是质点的位矢对质量的加权平均.式(2-26)中的 $\frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt}$ 是质心运动速度,用 \boldsymbol{v}_c 表示,则

$$\boldsymbol{p} = m \boldsymbol{v}_c \quad (2-28)$$

因此,可以把质点系的动量看成这样一个“质点”的动量,这个“质点”集中了质点系全部质量并以质心速度运动.

4. 质心运动定律

有了质心的概念,式(2-23)可以表达为

$$\boldsymbol{F}_{\text{外}} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m \frac{d\boldsymbol{v}_c}{dt} = m\boldsymbol{a}_c \quad (2-29)$$

其中, \boldsymbol{a}_c 是质心加速度,作用在质点系上的合外力等于质点系质量 m 与质心加速度 \boldsymbol{a}_c 的乘积,这就是质心运动定律.从以上推导过程,可以看出质心运动定律就是质点系动量定律的微分形式.

例 2.6 一根质量为 m , 长度为 L 的均匀链条被竖直悬挂起来,其下端恰好与地面接触,今释放链条,求链条给予地面的最大压力.

解: 此链条可看成由无相互作用的圆环组成,各圆环下落时,均做自由落体运动,任一圆环与地面碰撞后,立即停止运动而不反弹.链条对地面的压力由两部分组成,一部分是已落地的圆环,此部分对地面的作用力在数值上等于重力;另一部分是圆环与地面碰撞时给予地面的冲力.

由于链条质量均匀分布,其质量密度 $\lambda = \frac{m}{L}$, 如图 2.11 所示.取向向上为正方向,任选 y 高度处质元 dm , 其质量 $dm = \lambda dy = \frac{m}{L} dy$, 该质元自由落下 y 高度时,由

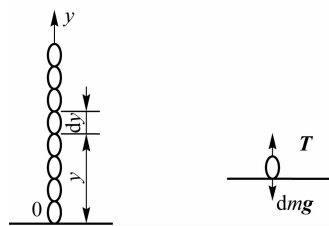


图 2.11 例 2.6 图

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

可得此时速度 $v = \sqrt{2gy}$, 设落地时受地面的冲力为 T , 碰撞时间为 dt , 由质点的动量定理得

$$(T - dmg)dt = 0 - dm(-v)$$

由于 $T \gg dmg$, 所以

$$Tdt = vdm = v \frac{m}{L} dy$$

$$T = v \frac{m}{L} \frac{dy}{dt} = v^2 \frac{m}{L} = 2gy \frac{m}{L}$$

显然, 当 $y=L$ 时

$$T_{\max} = 2gL \frac{m}{L} = 2mg$$

即链条最上端的圆环与地面碰撞时的冲力最大, 再考虑已落地链条的重力, 可得链条给予地面的最大压力为

$$N = mg + T_{\max} = mg + 2mg = 3mg$$

2.2.3 动量守恒定律

1. 动量守恒定律的内容

由质点系的动量定理可以看出, 合外力的冲量使系统的动量发生变化, 当系统不受外力或外力的矢量和为零时, 系统的总动量保持不变.

由式(2-24)可见, 若 $F_{\text{外}} = 0$, 则有

$$\sum_{i=1}^n m_i v_i - \sum_{i=1}^n m_i v_{i0} = 0$$

或

$$\sum_{i=1}^n m_i v_i = \sum_{i=1}^n m_i v_{i0} = \text{常矢量} \quad (2-30)$$

式(2-30)表明, 如果系统所受外力的矢量和为零, 则系统的总动量保持不变, 这就是**动量守恒定律**.

如果质点系由两个质点组成, 则动量守恒定律可表示为

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20}$$

将上式移项, 可得

$$m_1 v_1 - m_1 v_{10} = -(m_2 v_2 - m_2 v_{20})$$

上式表明, 这两个质点的动量都有改变, 但它们各自的动量增量大小相等, 方向相反, 即一个质点的动量增量恰等于另一个质点动量的减少量, 动量在两个质点之间进行了交换. 所以, 一般来说, 当系统动量守恒时, 系统内各质点的动量都可以发生变化, 但这种变化只能是动量守恒系统内各个质点之间动量的交换, 而系统内动量的交换是通过系统内各质点相互作用的内力实现的, 系统中内力的作用可以使动量在系统内各个质点之间交换, 但不改变系统的总动量, 系统的总动量保持不变.

2. 动量守恒定律的分量形式

动量守恒定律是一个矢量守恒式, 在实际应用动量守恒定律时, 常利用动量守恒定律的

分量形式. 在直角坐标系中, 动量守恒定律的分量式如下.

当 $\sum F_{ix} = 0$ 时, $\sum m_i v_{ix} = p_x = \text{常量}$;

当 $\sum F_{iy} = 0$ 时, $\sum m_i v_{iy} = p_y = \text{常量}$;

当 $\sum F_{iz} = 0$ 时, $\sum m_i v_{iz} = p_z = \text{常量}$.

上述式子说明, 若系统所受合外力不为零, 但外力在某个方向上的代数和为零, 则系统的总动量虽然不守恒, 但在该方向上动量的分量守恒.

为了正确理解和应用动量守恒定律, 需注意以下几点.

(1) 动量守恒定律成立的条件是系统所受的合外力等于零, 即 $F_{\text{外}} = 0$;

(2) 若系统所受的合外力不为零, 但在某一方向上外力分量的代数和等于零, 则在该方向上动量的分量守恒;

(3) 若系统所受的合外力不为零, 但外力远小于内力, 也可以近似认为动量守恒;

(4) 动量守恒定律比牛顿运动定律更加普遍, 是物理学最普遍、最基本的定律之一;

(5) 动量守恒定律是由牛顿运动定律推导出来的, 因此它只适用于惯性参考系.

虽然动量守恒定律是从牛顿运动定律出发推导出来的, 但物理学的发展进入高速运动和微观粒子运动的领域之后, 如大到天体间的相互作用, 小到质子、中子、电子等基本粒子间的相互作用, 动量守恒定律都适用; 而在原子、原子核等微观领域中, 牛顿运动定律却不适用了, 因此动量守恒定律比牛顿运动定律更加广泛.

应用动量守恒定律解决具体问题时, 式中的动量都应是相对于同一惯性参考系的. 应用动量守恒定律解决动力学问题时, 可以不考虑系统在内力作用下的复杂变化, 只需考虑变化前后系统的总动量, 因此可以带来很大方便. 所以, 只要满足守恒条件, 可以不必过问过程中系统内质点动量变化的细节, 只需考虑过程始末状态系统总动量的关系, 这是应用动量守恒定律求解问题比用牛顿运动定律的优越之处.

例 2.7 两球质量分别是 $m_1 = 20 \text{ g}$, $m_2 = 50 \text{ g}$, 在光滑桌面上运动, 速度分别为 $v_1 = 10\mathbf{i} \text{ cm/s}$, $v_2 = (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \text{ cm/s}$, 碰撞后合为一体, 求碰撞后的速度.

解: 以 v 表示碰撞后的速度, 对两球应用动量守恒定律可得

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= (m_1 + m_2) v \\ 20 \times 10\mathbf{i} + 50 \times (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) &= (20 + 50)(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}) \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{20 \times 10 + 50 \times 3}{20 + 50} \text{ cm/s} = 5 \text{ cm/s} \\ v_y &= \frac{50 \times 5}{20 + 50} \text{ cm/s} = 3.57 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

碰后速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{5^2 + 3.57^2} \text{ cm/s} = 6.14 \text{ cm/s}$$

速度和 x 轴的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{3.57}{5} = 35^\circ 32'$$

例 2.8 运载火箭的最后一级以 $v_0 = 7\,600 \text{ m/s}$ 的速率飞行. 这一级火箭由一个质量为

大学物理教程

$m_1 = 290.0 \text{ kg}$ 的火箭壳和一个质量为 $m_2 = 150.0 \text{ kg}$ 的仪器舱扣在一起. 当扣松开后, 两者间的压缩弹簧使二者分离. 这时二者的相对速度为 $u = 910.0 \text{ m/s}$. 设所有速度都在同一直线上, 求两部分分开后各自的速度.

解: 对于太空惯性系, 取 v_0 的方向为正方向, 以 v_1 和 v_2 分别表示火箭壳和仪器舱分开后各自的速度. 对于火箭壳和仪器舱组成的系统来说, 动量守恒, 因此

$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1v_1 + m_2v_2$$

由于仪器舱应在前, 所以

$$u = v_2 - v_1$$

即

$$v_2 = u + v_1$$

所以

$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1v_1 + m_2(u + v_1)$$

于是得火箭壳的速度为

$$v_1 = v_0 - \frac{m_2 u}{m_1 + m_2} = (7\,600 - \frac{150 \times 910}{150 + 290}) \text{ m/s} = 7\,290 \text{ m/s}$$

仪器舱的速度为

$$v_2 = u + v_1 = (910 + 7\,290) \text{ m/s} = 8\,200 \text{ m/s}$$

2.3 功和能 机械能守恒定律

在前两节, 我们讨论了牛顿运动定律和动量定理. 牛顿运动定律给出了质点受力和它的运动状态变化之间的瞬时关系. 动量定理则从力的时间累积作用入手, 讨论冲量和动量. 本节将在前面内容的基础上, 从力的空间累积作用入手, 讨论功和能及它们之间的转换关系. 能量守恒定律是自然界最基本的定律之一, 从能量关系分析问题, 是物理学中的一种重要方法. 因此, 本节的内容对学习物理学是十分重要的.

2.3.1 功和功率

1. 功

功是在人类长期的生产实践中逐渐形成的概念. 下面先讨论恒力做功的情形.

1) 恒力的功

如图 2.12 所示, 设一质点做直线运动, 在恒力 F 的作用下, 发生一段位移 Δr , 则恒力 F 所做的功 A 为

$$A = F |\Delta r| \cos \theta \quad (2-31)$$

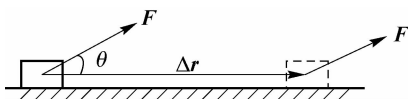


图 2.12 恒力的功

力做的功等于力的大小与位移沿力的方向的分量的乘积. 由此看出, 功是力的空间累积作用. 功也可以用力 F 与位移 Δr 的标积表示, 即

$$A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (2-32)$$

功是一个标量,但有正负之分,功的正负由 \mathbf{F} 与 $\Delta \mathbf{r}$ 之间的夹角 θ 决定.

在国际单位制中,功的单位是牛·米,称为焦耳(J).

2) 变力的功

式(2-32)为恒力做功的定义式,但在一般情况下作用在物体上的力不一定是恒力,质点也不一定做直线运动.这时,不能直接用式(3-32)来讨论变力的功,那么如何计算变力的功呢?

设有一质点,在大小和方向都随时间变化的力 \mathbf{F} 作用下,沿任意曲线从 a 点运动到 b 点,如图 2.13 所示.可以把整个曲线分成许多小段,任取一小段位移,称为位移元,用 $d\mathbf{r}$ 表示.只要每一段都足够短,就可以把这段路程近似看成直线,可以认为质点在 $d\mathbf{r}$ 这一段上移动的过程中,作用在它上面的力仍为恒力.这样,对这段位移 $d\mathbf{r}$,可按照式(2-32)计算力所做的元功为

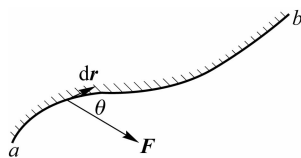


图 2.13 变力的功

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}| \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \cos \theta = F ds \cos \theta \quad (2-33)$$

其中, $|d\mathbf{r}| = ds$, ds 是与 $|d\mathbf{r}|$ 相对应的路程元.

那么,在质点由位置 a 沿曲线路径运动到位置 b 的整个过程中,力 \mathbf{F} 做的总功应当是各段位移元上的元功之和.当 $d\mathbf{r}$ 无限小时,总功就是对元功的积分,即

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F ds \cos \theta \quad (2-34)$$

式(2-34)称为变力做功的表达式.

在直角坐标系中,变力做功可表示为

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F_x dx + \int_a^b F_y dy + \int_a^b F_z dz$$

功的计算是积分运算,功的几何意义为 $F-r$ 图中曲线下所包围的面积,如图 2.14 所示.

如果一个质点同时受到几个力的作用,设质点所受的各力分别为 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$,沿任一路径由 a 运动到 b 时,合力为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}_i$$

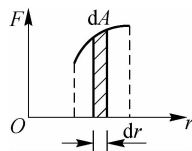


图 2.14 变力做功图

则合力的功为

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_a^b \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_a^b \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r}$$

所以

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

由上式可知,合力的功等于每个分力功的代数和.

2. 一对相互作用力的功

如果我们的研究对象是由若干质点构成的质点系,我们已经知道,可以把作用在这些质点上的力分为内力和外力,根据牛顿第三定律,内力总是成对出现的.那么,在质点系范围内考察,这些成对出现的内力所做的功具有怎样的特征?是不是也和内力的冲量一样,一定等于零呢?

设有两个质点 m_1 和 m_2 相互作用,把它们看成一个系统,若 m_1 受到 m_2 的作用力是 f_1 ,发生的位移为 dr_1 , m_2 受到 m_1 的作用力是 f_2 ,发生的位移为 dr_2 ,则这一对相互作用的内力的功为

$$dA = dA_1 + dA_2$$

因为

$$f_1 = -f_2$$

所以

$$\begin{aligned} dA &= f_1 \cdot dr_1 + f_2 \cdot dr_2 = f_1 \cdot dr_1 - f_1 \cdot dr_2 \\ &= f_1 \cdot (dr_1 - dr_2) = f_2 \cdot dr_{12} \end{aligned} \quad (2-35)$$

式(2-35)中, dr_{12} 是 m_1 相对 m_2 的位移,此相对位移与参考系的选择无关.由式(2-35)分析可知,系统内的质点没有相对位移时,一对相互作用力的功等于零;若系统内质点间有相对位移,但是相互作用力与相对位移垂直,则一对相互作用力的功也为零,除此之外,一对相互作用力的功不等于零.

可见,一对相互作用力所做的功只与作用力及相对位移有关,而与各个质点各自的运动无关.也就是说,任何一对相互作用力所做的功具有与参考系选择无关的不变性质,只要是一对作用力和反作用力,无论从什么参考系去计算,其做功的结果都一样,这是个很重要的性质.例如,若把人体看成一个质点系,一举手、一投足,都使构成人体的质点有了相对位移,而在这些相对位移发生的同时,人体各部分之间的内力都做了功.从而消耗了存储于身体的能量,转换为人体运动的机械能和热能等.

3. 功率

在实际问题中,不仅要知道做功的大小,而且要知道做功的快慢.我们把单位时间内所做的功称为**功率**,用 P 表示,则有

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (2-36)$$

由式(2-33)得

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2-37)$$

即力对质点的瞬时功率等于作用力与质点在该时刻速度的标积.

在国际单位制中,功率的单位是瓦特(W).

例 2.9 在轴上运动的物体速度 $v = 4t^2 + 6$,作用力 $F = t - 3$ (其中, v 以 m/s 为单位, t 以 s 为单位, F 以 N 为单位)沿 x 轴方向,试求在 $t_1 = 1$ s 至 $t_2 = 5$ s 期间,力 F 对物体所做的功.

解:当质点沿 x 轴做直线运动时,如果外力是时间 t 的函数 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$,根据功的定义 $A = \int_{x_1}^{x_2} F(t) dx$,无法直接积分计算,通常可利用微分关系式 $dx = \frac{dx}{dt} dt = v dt$ 将积分变量转换为时间 t 进行计算.积分变量代换后,积分的上下限也要做相应的代换.

由功的定义式得

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} F(t) dx = \int_{t_1}^{t_2} F(t) v dt = \int_{t_1}^{t_2} (t - 3)(4t^2 + 6) dt = \int_1^5 (4t^3 - 12t^2 + 6t - 18) dt = \\ &[t^4 - 4t^3 + 3t^2 - 18t]_1^5 = 128 \text{ J} \end{aligned}$$

所以,力 F 对物体所做的功为 128 J.

例 2.10 一人从 10 m 深的井中提水,开始时桶中装有 10 kg 的水.由于水桶漏水,每提升 1.0 m 要漏去 0.2 kg 的水.求水被提升到井口时,此人所做的功?

解:依题意,竖直方向可以建立 y 轴坐标系, $t=0$ 时水桶内水的质量 $m_0=10$ kg.在提水的过程中,设匀速向上拉时,任何时刻拉力在不断改变,所以变力函数 $F(y)=mg-0.2gy$.由变力做功的定义,人所做的功为

$$A = \int_0^{10} (m - 0.2y)g dy = g \left(my - \frac{0.2}{2}y^2 \right) \Big|_0^{10} = 882 \text{ J}$$

2.3.2 动能 动能定理

1. 质点的动能定理

在前面的学习中,我们知道,力的时间累积效应,即冲量引起了质点的动量变化.那么,力的空间累积效应,做功将产生怎样的效果呢?下面就来讨论这个问题.

设质量为 m 的质点在合外力 \mathbf{F} 的持续作用下从 a 点运动到 b 点,如图 2.15 所示.同时,它的速度从 v_0 变为 v ,则当质点产生位移元 $d\mathbf{r}$ 时,相应地合外力所做的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

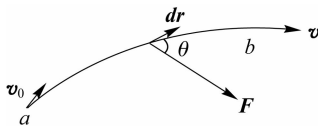


图 2.15 质点的动能定理

则质点从 a 点运动到 b 点的过程中,合外力 F 做的总功为

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{v_0}^v d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2-38)$$

式(2-38)中, $\frac{1}{2}mv^2$ 就是动能 E_k ,它是质点由于运动而具有的能量,式(2-38)可改写为

$$A = E_k - E_{k0} \quad (2-39)$$

式(2-39)说明,合外力对质点所做的功等于质点动能的增量,这个结论称为质点的动能定理.

下面我们就有关问题作进一步说明.

(1)质点的动能定理适用于质点的任何运动过程.物体在合外力的持续作用下,在某一段路程中,不管力是恒力还是变力,也不管物体运动状态的变化情况如何复杂,合外力对物体做的功总是等于质点动能的增量;如果知道了物体动能的变化,也可以说,合外力所做的功总是决定于质点的末动能与初动能之差.这样,动能定理就可以用于讨论一个过程中力对质点做的功与质点始末状态的动能之间的关系,而不需详细分析过程中的细节,这对于解决某些力学问题比直接应用牛顿运动定律要方便得多.

以上分析也说明一个重要概念,功不是与动能 E_k 相联系,而是与动能的增量 ΔE_k 相联系的.物体动能的变化是通过做功的过程来实现的,动能是描述物体运动状态的量,而功则是一个与状态变化过程相联系的过程量.

(2) 对于一个质量为 m , 以速度 v 运动的质点, 可以用两个物理量来描述它, 一个是动量, 另一个是动能. 这两个量都是由物体的质量和速度决定的, 它们也都是运动状态的函数, 但是它们的物理意义是不同的.

动量是矢量, 不但有大小, 而且有方向, 这是机械运动的性质; 动能是标量, 而且永远为正, 它是能量的一种形式, 能量并不限于机械运动. 除了动能外, 还有其他各种形式的能量, 如电能、热能、光能、原子能等. 动能与这些能量是可以相互转化的.

另外, 与动量变化相联系的是力的冲量, 冲量是力的时间累积作用, 其效果是使物体的动量发生变化. 而与动能变化相联系的是力所做的功, 功是力的空间累积作用, 其效果是使物体的动能发生变化. 这两个物理量各自遵从一定的规律, 它们是从不同侧面来描写物体机械运动的物理量.

当然, 动量和动能还是有联系的, 动量 $p = mv$, 动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. 因为它们都是物体运动状态的函数, 所以, 不难看出, 这两个物理量在数量上的关系为

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

动量和动能还具有共同的特征, 力的冲量与经历的时间有关, 但是由它所造成的动量改变却仅由物体的始末状态决定; 同样, 力做的功与物体经历的空间有关, 但是由功所造成的动能的改变也仅由物体的始末状态决定.

(3) 由于动能定理是从牛顿运动定律导出的, 所以动能定理只在惯性参考系中才成立.

2. 质点系的动能定理

质点系由很多质点组成, 对其中每一个质点应用动能定理, 就可以得出质点系的动能定理.

为简单起见, 先研究由两个相互作用的质点 m_1 和 m_2 组成的质点系, 如图 2.16 所示. 设 F_1 和 F_2 分别表示作用于 m_1 和 m_2 的合外力, f_{12} 和 f_{21} 分别表示两质点的相互作用内力, 这两个内力对每个质点而言, 仍属外力, 对每个质点应用动能定理, 即

$$\text{对 } m_1: \int_{a_1}^{b_1} F_1 \cdot dr_1 + \int_{a_1}^{b_1} f_{12} \cdot dr_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_{10}^2$$

$$\text{对 } m_2: \int_{a_2}^{b_2} F_2 \cdot dr_2 + \int_{a_2}^{b_2} f_{21} \cdot dr_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_2v_{20}^2$$

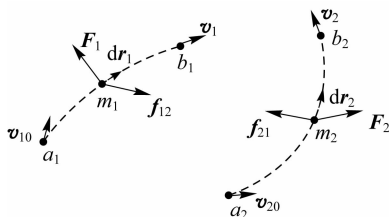


图 2.16 质点系的动能定理

两式相加, 可得

$$\int_{a_1}^{b_1} F_1 \cdot dr_1 + \int_{a_2}^{b_2} F_2 \cdot dr_2 + \int_{a_1}^{b_1} f_{12} \cdot dr_1 + \int_{a_2}^{b_2} f_{21} \cdot dr_2$$

$$= \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \right)$$

上式中, 令 $A_{\text{外}} = \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{a_2}^{b_2} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$, 表示外力对质点系所做的功之和; 令 $A_{\text{内}} = \int_{a_1}^{b_1} f_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{a_2}^{b_2} f_{21} \cdot d\mathbf{r}_2$, 表示质点系内力所做功之和; 令 $E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$, $E_{k0} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$, 分别表示质点系的末状态和初状态动能, 这样就有

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_k - E_{k0} \quad (2-40)$$

如果把质点系从两个质点扩大为 n 个质点, 式(2-40)依然成立. 这就是说, 一切外力对质点系做的功和一切内力对质点系做的功之和等于质点系动能的增量, 这个结论称为质点系的动能定理.

在式(2-40)中, $A_{\text{内}} = \int_{a_1}^{b_1} f_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{a_2}^{b_2} f_{21} \cdot d\mathbf{r}_2$, 尽管根据牛顿第三定律, $f_{12} = -f_{21}$. 但是, 由于系统内各质点的位移元一般不相同, 即 $d\mathbf{r}_1 \neq d\mathbf{r}_2$, 因此系统内力做功的代数和并不一定为零, 即 $A_{\text{内}} \neq 0$, 因而可以改变系统的总动能. 比较质点系的动能定理和上一章讨论的质点系的动量定理, 可以看到, 系统动量的改变仅仅决定于系统所受的外力, 而系统动能的变化则不仅与外力有关, 而且与内力有关. 例如, 地雷爆炸后, 弹片向四面八方飞散, 它们的总动能显然比爆炸前增加了. 在这里, 火药的爆炸力也就是内力对各个弹片做了正功. 因此, 内力能够改变系统的总动能, 但不能改变系统的总动量.

2.3.3 保守力 势能 功能原理

1. 保守力的功

我们知道, 无论什么性质的力做功, 均会引起物体动能的变化, 但进一步研究发现, 不同性质的力所做的功, 有不同的特点, 因此根据做功的特点, 可以把作用力分为保守力和非保守力.

1) 重力的功

设一个质量为 m 的物体, 在重力作用下, 从点 a 沿任意路径 acb 运动到点 b , 点 a 和点 b 距地面的高度分别为 y_1 和 y_2 , 如图 2.17 所示, 我们把曲线 acb 分成许多位移元, 在位移元 $d\mathbf{r}$ 中, 重力所做的元功为

$$dA = \mathbf{mg} \cdot d\mathbf{r} = mg |d\mathbf{r}| \cos \theta = mg dr \cos \theta = -mg dy$$

式中, θ 为 \mathbf{mg} 与 $d\mathbf{r}$ 的夹角, 所以 $dr \cos \theta = -dy$. 那么, 质点由 a 到 b , 重力做的总功为

$$A = \int dA = \int_{y_1}^{y_2} -mg dy = -(mgy_2 - mgy_1) \quad (2-41)$$

不论质点从 $a \rightarrow c \rightarrow b$ 还是从 $a \rightarrow d \rightarrow b$, 或者是其他路径, 只要始末位置不变, 重力做的功都是上述结果. 这就是说重力所做的功与路径无关, 只与始末位置有关.

同重力一样, 若某种力做的功与路径无关, 只与始末位置有关, 则这种力称为保守力, 不具有这种特性的力, 称为非保守力或耗散力. 因此, 重力属于保守力.

若某一个力 \mathbf{F} 为保守力, 则它沿任一闭合路径的功可表示为

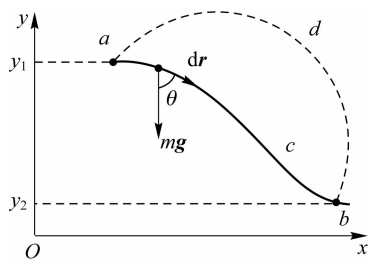


图 2.17 重力的功

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2-42)$$

式(2-42)中,符号 \oint 表示沿闭合曲线的积分,即质点沿任一闭合路径绕行一周,保守力对其所做的功恒为零.

如果力所做的功与路径有关,或者说,沿闭合路径的功不为零,即不满足式(2-42)的力,称为非保守力.例如,摩擦力所做的功与路径有关.当我们把放在地面上的物体从一处拉到另一处时,若经历的路径不同,摩擦力所做的功则不同.因此,摩擦力属于非保守力.

2) 弹力的功

将劲度系数为 k 的轻弹簧一端固定,另一端与一质量为 m 的物体相连,当弹簧在水平方向不受外力作用时,它将不发生形变,此时,物体位于 O 点,即 $x=0$ 处,这一位置为平衡位置,如图 2.18 所示.

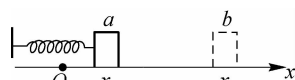


图 2.18 弹力的功

当弹簧被拉伸或压缩时,物体将受到弹簧所产生的弹力作用,根据胡克定律可表示为

$$F = -kx$$

负号表示弹性力的方向总是指向原点 O . 在物体由位置 a 运动到位置 b 的过程中,弹性力为变力,但弹簧伸长 dx 时的弹力可近似看成不变的. 于是,物体发生位移 dx 时,弹力做的元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -kx dx$$

那么,在物体由 a 到运动 b 的整个过程中,弹力做的总功为

$$A = \int dA = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) \quad (2-43)$$

式(2-43)说明,弹簧的弹性力所做的功只与弹簧的始末位置有关,而与弹簧形变的过程无关. 因此,弹力也是保守力.

3) 万有引力的功

人造地球卫星运动时受到地球对它的万有引力,太阳系的行星运动时,受到太阳的万有引力,这类问题可归结为运动质点受到来自另一个固定质点的万有引力作用,现在来计算万有引力对运动质点所做的功.

如图 2.19 所示,设有两个质量分别为 M 和 m 的质点,假定质点 M 固定不动, m 在万有引力作用下由点 a 沿任意路径 acb 运动到点 b , m 相对于固定质点 M 的位矢为 \mathbf{r} , \mathbf{e}_r 为沿位矢 \mathbf{r} 的单位矢量, a 、 b 两点相对 M 的位矢分别为 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 . 在质点运动过程中,它所受到的万有引力的大小和方向都在改变,当 m 沿路径移动位移元 $d\mathbf{r}$ 时,万有引力做的元功为

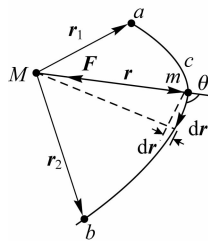


图 2.19 万有引力的功

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{mM}{r^2} |d\mathbf{r}| \cos \theta$$

因为

$$|d\mathbf{r}| \cos \theta = dr$$

所以

$$dA = -G \frac{mM}{r^2} dr$$

在质点 m 由 a 运动到 b 的过程中, 万有引力所做的总功为

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} -G \frac{mM}{r^2} dr = -GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

即

$$A = - \left[\left(-G \frac{mM}{r_2} \right) - \left(-G \frac{mM}{r_1} \right) \right] \quad (2-44)$$

式(2-44)表明, 万有引力做功同样与质点运动路径无关, 只取决于物体的始末位置. 因此, 万有引力也属于保守力.

2. 势能

我们已经知道, 动能是机械运动形式中能量的一种, 它由运动的状态决定. 现在我们将引入与位置有关的另一种机械运动的能量——势能. 前面已讨论, 重力、弹性力和万有引力都具有做功与路径无关, 而仅取决于质点始末位置的特点, 从这一特点出发分别引出重力势能、弹性势能和万有引力势能的概念.

势能是由物体之间的相互作用和相对位置决定的能量.

前面已经讨论过, 有关重力做功、弹性力做功和万有引力做功的公式分别为

$$\begin{aligned} A_{\text{重}} &= -(mgy_2 - mgy_1) \\ A_{\text{弹}} &= -\left(\frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2 \right) \\ A_{\text{引}} &= - \left[\left(-G \frac{mM}{r_2} \right) - \left(-G \frac{mM}{r_1} \right) \right] \end{aligned}$$

上面三个式子表明了保守力做功的特点, 它们等号的右边有着相似的形式, 都是两个与位置有关的函数之差, 可以共同地写成

$$A_{\text{保}} = (E_{p1} - E_{p2}) = -\Delta E_p \quad (2-45)$$

其中, E_p 是一个与位置有关的函数, 称它为**势能**. E_{p1} 和 E_{p2} 分别是物体在初位置和末位置的势能. 式(2-45)表明, 保守力对物体做的功等于势能增量的负值. 保守力做正功, 势能减少; 保守力做负功, 势能增加. 不同的保守力, 各自势能的函数形式不同.

式(2-45)定义了两个位置的势能之差与保守力做功的关系. 如果选定质点在某一位置的势能为零, 即 $E_{p2} = 0$, 于是三个保守力对应的势能形式分别为

$$\text{重力势能} \quad E_p = mgy \quad (2-46)$$

此式是选取某一位置为势能零点, 质点相对于势能零点的高度为 y 时的重力势能.

$$\text{弹性势能} \quad E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2-47)$$

此式是选取弹簧自然长度时的位置为势能零点, 弹簧发生形变 x 时的弹性势能.

$$\text{引力势能} \quad E_p = -G \frac{Mm}{r} \quad (2-48)$$

此式是选取无限远为势能零点, 物体 m 与 M 相距 r 时的引力势能.

势能是一个标量, 单位是焦耳(J).

由于势能的概念反映了保守力做功与路径无关的特性. 因此, 只能对保守力引入势能, 对非保守力不能引入势能.

为了正确理解势能的概念,需说明以下几点.

1) 势能是状态的函数

我们知道,质点在某时刻的位置及速度表示该时刻质点的运动状态,而势能只与位置有关.因此,势能是状态的函数,即

$$E_p = E_p(x, y, z)$$

2) 势能的物理意义

式(3-16)表明,在保守力做功的过程中,只要质点的始末位置确定了,保守力做的功就确定了.如果质点长期处于保守力场中的某个位置,那么,势能便会长期保持恒定.可见势能是一种可以长期储存的能量.如果保守力做正功,说明势能减少,表明保守力做功是以势能的减少为代价的;如果保守力做负功,说明势能增加,表明外力做正功并以势能的形式储存了起来.

3) 势能具有相对性

势能的数值与势能零点的选取有关,在式(2-46)、式(2-47)和式(2-48)中,势能的公式就已经事先选定了势能零点.实际上,势能零点可以任意选取,但选取不同的势能零点,势能的值将有所不同.所以,势能具有相对意义.但是,不论势能零点的位置如何选取,任意两个给定位置的势能之差却是一定的,与势能零点的选择无关.

4) 势能属于系统

势能是由于系统内各物体间具有保守力作用而产生的.因此,它是属于系统的,单独谈单个物体的势能是没有意义的.例如,由 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ 可知,弹性势能是由物体间的形变决定的.所以,弹性势能不属于某一个质点,而是属于由保守力相互作用的质点所组成的系统的能量.我们通常说:“质点 m 的势能”是省略了“系统”等字的简称.

例 2.11 有一种说法认为地球上的一次灾难性物种(如恐龙)绝灭是由于 6 500 万年前一颗大的小行星撞入地球引起的.设小行星的半径是 10 km,密度为 $6.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,它撞入地球时将释放多少引力势能?这能量是唐山地震估计能量(唐山地震释放的能量约 10^{18} J)的多少倍?

解: 设地球的质量为 M ,小行星的质量为 m ,地球的半径为 R ,小行星的半径为 r ,小行星的运行轨道半径为 R' ,则小行星落到地面上所释放的能量是

$$\Delta E = \left(-\frac{GMm}{R'}\right) - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$$

由于小行星运行的轨道半径 R' 比地球半径 R 大得多,所以有

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{GMm}{R} = \frac{GM}{R} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \\ &= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times 4 \times \pi \times (10^4)^5 \times 6.0 \times 10^5}{6400 \times 10^3 \times 3} \text{ J} \\ &= 1.6 \times 10^{24} \text{ J} \end{aligned}$$

此能量约为唐山地震释放能量的 10^6 倍.

2.3.4 功能原理 机械能守恒定律

1. 功能原理

在 2.3.2 节中我们已经得出了质点系的动能定理公式,即

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_{\text{k}} - E_{\text{k}0}$$

现在,我们对质点系的动能定理作进一步讨论, $A_{\text{外}}$ 表示系统的外力对各物体做功之和, $A_{\text{内}}$ 表示系统的内力对各物体做功之和.而 E_{k} 和 $E_{\text{k}0}$ 分别表示系统末状态和初状态的总动能.而对于 $A_{\text{内}}$ 这一项,我们知道,在系统的内力中可能既有保守力,也有非保守力.因此,内力的功 $A_{\text{内}}$ 可以写成保守内力的功 $A_{\text{保内}}$ 和非保守内力的功 $A_{\text{非保内}}$ 之和.于是有

$$A_{\text{内}} = A_{\text{保内}} + A_{\text{非保内}}$$

那么,质点系的动能定理公式可以改写成

$$A_{\text{外}} + A_{\text{保内}} + A_{\text{非保内}} = E_{\text{k}} - E_{\text{k}0} \quad (2-49)$$

根据保守力做功的特点,我们定义了势能的概念,即有

$$A_{\text{保内}} = -\Delta E_{\text{p}} = E_{\text{p}0} - E_{\text{p}}$$

将 $A_{\text{保内}} = -\Delta E_{\text{p}} = E_{\text{p}0} - E_{\text{p}}$ 代入式(2-49)中,可得

$$A_{\text{外}} + (E_{\text{p}0} - E_{\text{p}}) + A_{\text{非保内}} = E_{\text{k}} - E_{\text{k}0}$$

移项整理后,得

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = (E_{\text{k}} + E_{\text{p}}) - (E_{\text{k}0} + E_{\text{p}0}) \quad (2-50)$$

我们把系统的动能与势能之和称为系统的机械能,用符号 E 表示,则

$$E = E_{\text{k}} + E_{\text{p}} \quad (2-51)$$

用 E_0 和 E 分别表示系统在初、末两个状态时的机械能,则式(2-50)可表示为

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = E - E_0 \quad (2-52)$$

式(2-52)表明,质点系在运动过程中,它所受的所有外力与系统内非保守力做功的代数和,等于系统机械能的增量.这一结论称为**质点系的功能原理**.功能原理指出:外力和非保守内力做功的代数和等于系统机械能的增量.这就全面概括了力学中的功能关系.因为它把力学中所有类型的力的功和所有类型的能量都考虑到了.为了进一步理解功能原理的物理定义,需说明以下几个问题.

(1)功能原理表明,外力和系统的非保守力做功都可以引起系统机械能的变化.外力对系统做功是外界物体的能量与系统的机械能之间的传递或转化,外力做正功时则有能量由外界传入系统,使系统的机械能增加;外力做负功时,则有外界从系统吸收能量,使系统的机械能减少.而系统内非保守力做功则反映了系统内部机械能与其他形式能量的转化.非保守内力做正功时,其他形式的能量转化为机械能;非保守内力做负功时,机械能转化为其他形式的能量.因此,非保守力做功意味着发生了机械能与其他形式能量的转化过程.例如,用升降机提升重物,重物由静止开始上升到某高度并且具有了一定的机械能.若将地球和重物看成一个质点系,那么系统机械能的增加是由于升降机对系统做正功的结果.又如,若将电动机的定子和转子看成一个质点系.通电后,转子从静止转动起来,系统的机械能增加,这是由于电动机内的电流产生磁场力(属于非保守内力)做正功的结果;断电后,电动机的转子慢慢停止转动,系统的机械能减少,这是由于摩擦力(非保守内力)做了负功的结果.

(2) 功能原理是在质点系的动能定理中引入势能而得出的. 因此, 它们的物理本质是一致的, 功能原理和质点系的动能定理都给出了系统的能量改变与功的关系. 它们的区别在于从不同的角度来处理保守内力. 在质点系的动能定理中, 反映的是动能的变化与功的关系, 应当把所有力的功都计算在内, 包括保守内力, 强调了保守内力做功引起了系统动能的变化; 在功能原理中, 反映的是机械能的变化与功的关系, 保守内力的作用体现在势能的变化中. 保守内力的功通过势能的变化表现了出来. 因此, 只有外力和非保守内力才会改变系统的机械能. 所以, 应用功能原理解决问题时, 只需要考虑除保守内力之外其他力的功.

(3) 功能原理和质点系的动能定理一样, 在惯性参考系中才成立.

例 2.12 一链条总长为 l , 质量为 m , 放在桌面上, 并使其下垂到桌面一侧的长度为 a ($a > \frac{\mu}{\mu+1}l$), 如图 2.20 所示. 设链条与桌面之间的滑动摩擦系数为 μ , 令链条由静止开始运动, 设链条质量均匀分布, 问:

(1) 链条从开始运动到链条全部离开桌面的过程中, 摩擦力做了多少功?

(2) 链条离开桌面时的速率是多少?

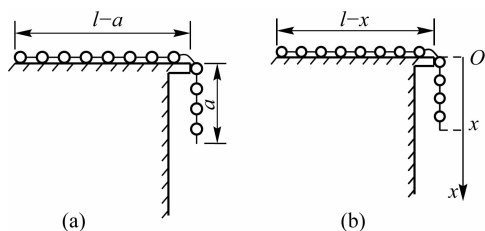


图 2.20 例 2.12 图

解: 链条在下落过程中, 由于在桌面上发生长度的变化, 因而受到的摩擦力发生变化, 所以摩擦力做功为变力做功, 而从开始到链条离开桌面, 可由功能原理求得离开桌面的动能, 从而求得速率.

(1) 建立坐标系如图所示, 设任意时刻, 链条下垂的长度为 x , 则摩擦力的大小为

$$f = \mu \frac{m}{l} (l-x) g$$

摩擦力的方向与位移方向相反, 故整个过程中摩擦力做功为

$$A_f = \int f \cdot dx = \int_a^l f \cos 180^\circ dx = \int_a^l -\mu \frac{m}{l} (l-x) g dx = -\frac{\mu mg}{2l} (l-a)^2 \quad (1)$$

(2) 以链条和地球作为系统, 取坐标原点为重力势能的零点, 设链条离开桌面时的速率为 v , 应用功能原理得

$$A_f = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0}) \quad (2)$$

其中

$$E_{k0} = 0 \quad (3)$$

$$E_{p0} = -\frac{m}{l} a g \frac{a}{2} = -\frac{mga^2}{2l} \quad (4)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (5)$$

$$E_p = -mg \frac{l}{2} \quad (6)$$

将(1)、(3)、(4)、(5)、(6)式代入(2)式得

$$-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2 = -mg \frac{l}{2} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mga^2}{2l}$$

链条离开桌面时的速率为

$$v = \sqrt{\frac{[l^2 - a^2 - \mu(l-a)^2]g}{l}}$$

2. 机械能守恒定律

由功能原理 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = E - E_0$ 可以看出,一个系统的机械能可以通过外力对系统做功而发生变化,也可以通过系统的非保守内力做功而发生变化,即

若 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} > 0$, 系统的机械能增加;

若 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} < 0$, 系统的机械能减少.

那么,当 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = 0$, 也就是说,在外力和非保守内力都不做功或者说两者做的总功等于零,即只有保守力做功的情况下,有

$$E = E_0 = \text{常量} \quad (2-53)$$

或者

$$E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} = \text{常量}$$

上式表明,在外力和非保守内力都不做功或所做功的代数和为零的情况下,系统动能和势能之和保持不变,即系统的机械能保持恒定,这个结论称为**机械能守恒定律**.

机械能守恒定律还有进一步的物理意义,如果将式 $E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$ 改写为

$$E_k - E_{k0} = E_{p0} - E_p$$

即

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

上式表明,在机械能守恒的情况下,系统动能的增加量等于势能的减少量,也就是说,系统内各物体的动能和势能相互转换,但是这种能量转换是通过保守力做功来实现的.

应用机械能守恒定律解决相关问题时,应注意要满足的条件,即只有保守力做功或者 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = 0$.

在机械运动范围内,所涉及的能量只有动能和势能.由于物质运动形式的多样性,我们还将遇到其他形式的能量,如热能、电磁能、化学能、原子能等.如果系统内有非保守力做功,则系统的机械能必将发生变化,但在机械能增加或减少的同时,必然有等值的其他形式的能量在减少或增加.在总结各种自然过程中,得出一个更为普遍的**能量守恒定律**.能量既不能消灭,也不能创生,它只能从一个物体传递给另一个物体,或从物体的一部分传递给另一部分,由一种形式转化为另一种形式,但总的能量保持不变.

机械能守恒定律是能量守恒定律的一个特例,它是由牛顿运动定律推导出来的,只适用于惯性系.

例 2.13 如图 2.21 所示,计算第二宇宙速度 v_2 .

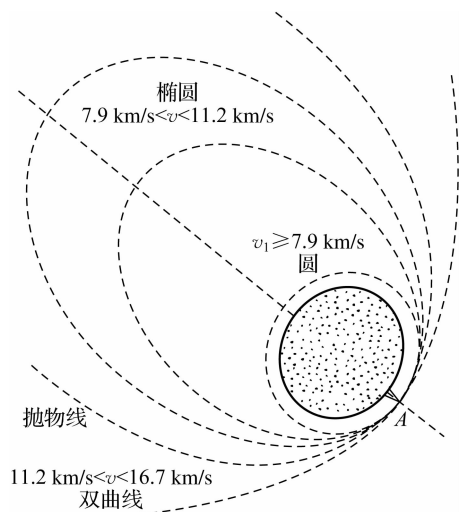


图 2.21 例 2.13 图

解:第二宇宙速度 v_2 ,是指能使地面上的物体脱离地球引力场而做宇宙飞行所需的最小初速度.这是一道系统内的功能转换问题——应用势能、动能的概念和动能定理,问题迎刃而解.

(1)解法一:动能定理.

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_{\text{k}} - E_{\text{k}0}$$

因为 $F_{\text{外}} = 0$,则 $A_{\text{外}} = 0$,当物体从初始位置(地球表面 $r_a = R$)运动到末位置(脱离地球的引力, $r_b = \infty$)时,万有引力的功为

$$A_{\text{内}} = -G \frac{mM}{R}$$

而 $E_{\text{k}} = \frac{1}{2}mv_2^2$,所以

$$-G \frac{mM}{R} = -\frac{1}{2}mv_2^2$$

即

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11.2 \times 10^3 \text{ m/s}$$

(2)解法二:机械能守恒定律.

取无限远为零势能点, $v_{\infty} \approx 0$,由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \left(-G \frac{mM}{R}\right) = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 + 0$$

得

$$G \frac{mM}{R} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

则第二宇宙速度为

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11.2 \times 10^3 \text{ m/s}$$

本章提要

1. 牛顿运动定律

牛顿第一定律:任何物体都将保持静止或匀速直线运动状态,直到外力迫使它改变这种状态为止.

牛顿第二定律: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. 当 m 变化时, $\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$.

牛顿第二定律在直角坐标系中的分量式为

$$\begin{cases} F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

牛顿第二定律在自然坐标系中的分量式为

$$\begin{cases} F_n = ma_n = m \frac{v^2}{R} \\ F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

牛顿第三定律: $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$.

2. 几种常见的力

重力: $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$.

弹簧的弹性力: $F = kx$.

最大静摩擦力: $f = \mu_0 N$, μ_0 为静摩擦系数.

滑动摩擦力: $f = \mu N$.

万有引力: $\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$.

3. 惯性系和非惯性系

牛顿运动定律成立的参考系称为惯性系,牛顿运动定律不成立的参考系称为非惯性系.

惯性力: $\mathbf{F}_0 = -m\mathbf{a}$.

4. 动量

动量: $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$.

冲量: $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt$.

质点的动量定理: $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$.

质点系动量定理: $\int_{t_0}^t \mathbf{F}_{\text{外}} dt = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{i0} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$.

质点系动量定理的微分形式: $\mathbf{F}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}_c$ (质心运动定律).

大学物理教程

动量守恒定律: $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = 0$ 时, $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i = \sum m_i \mathbf{v}_i =$ 常矢量.

5. 功

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}| \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \cos \theta = F ds \cos \theta$$

$$A = \int dA = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F ds \cos \theta$$

6. 动能

质点的动能: $E_k = \frac{1}{2} m v^2$.

质点的动能定理: $A = E_k - E_{k0}$.

质点系的动能定理: $A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_k - E_{k0}$.

7. 功能原理

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = E - E_0$$

8. 保守力

保守力的功: $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

9. 势能

$$A_{\text{保内}} = -\Delta E_p = E_{p0} - E_p$$

重力势能: $E_p = mgy$ (以 $y=0$ 处为势能零点).

弹性势能: $E_p = \frac{1}{2} kx^2$ (以弹簧原长为势能零点).

万有引力势能: $E_p = -G \frac{Mm}{r}$ (以 $r \rightarrow \infty$ 为势能零点).

10. 机械能守恒定律

只有保守力做功或者 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = 0$.

$$E = E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} = \text{常量}$$

思考题

2.1 举例说明以下两种说法是否正确.

- (1) 物体受到的摩擦力的方向总是与物体的运动方向相反;
- (2) 摩擦力总是阻碍物体的运动.

2.2 如图 2.22 所示, 一个用绳子悬挂着的物体在水平面上做匀速圆周运动, 有人在重力的方向上求合力, 写出 $T \cos \theta - mg = 0$, 另有人沿绳子的拉力方向上求合力, 写出 $T - mg \cos \theta = 0$. 显然, 两者不能同时成立, 哪一个式子是错误? 为什么?

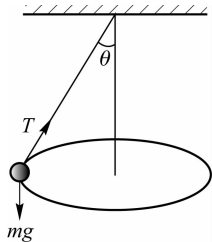


图 2.22 思考题 2.2 图

2.3 用天平测出的物体的质量,是引力质量还是惯性质量?两汽车相撞时,其撞击力的产生是源于引力质量还是惯性质量?

2.4 质量为 m 的小球,在距地面某高度处,以速度 v 平抛出去,触地后反跳,在抛出 t 秒后,小球又跳回原高度,速度也恢复到原来的 v . 试求小球与地面碰撞过程中地面作用于小球的冲量.

2.5 质心运动定理和牛顿第二定律在形式上相似,试比较它们所代表的意义有何不同?

2.6 如图 2.23 所示,没有动力的小车通过弧形桥面时受几个力的作用?它们的反作用力在哪里?若 m 为小车的质量,小车对桥面的压力是否等于 $mg\cos\theta$? 小车能否做匀速率运动?

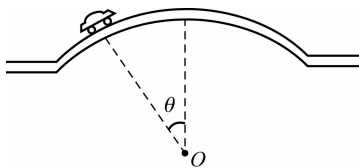


图 2.23 思考题 2.6 图

2.7 放烟火时,一朵五彩缤纷的烟火的质心运动轨迹如何(忽略空气阻力与风力)?为什么在空中以球形逐渐扩大?

2.8 用细线把球挂起来,球下端系一同样的丝线,拉扯球下端的细线,逐渐加大力量,哪段细线先断?如用较大力量突然拉球下细线,哪段细线先断?为什么?

2.9 有一个弹簧,其一端连有一铁球,你能否做一个在汽车内测量汽车加速度的“加速度计”?

2.10 在惯性系中,质点受到的合力为零,该质点是否一定处于静止状态?

2.11 牛顿运动定律的适用范围是什么?

2.12 胡克定律 $F=-kx$ 中,负号所反映的物理意义是什么?

2.13 在下列情况下,说明质点受合力的特点.

- (1) 质点做匀速率圆周运动;
- (2) 质点做匀加速圆周运动;
- (3) 质点做匀速率曲线运动;
- (4) 质点做匀减速曲线运动.

2.14 如果一个质点在做直线运动,那么质点相对于哪些点的角动量守恒?

2.15 在匀速圆周运动中,质点的动量是否守恒?角动量呢?

2.16 质点在有心力场中的运动具有什么性质?

2.17 下列系统的角动量守恒吗?

- (1) 圆锥摆;
- (2) 冲击摆;
- (3) 荡秋千;
- (4) 在空中翻筋斗的京剧演员;
- (5) 在水平面上匀速滚动的车轮;
- (6) 从旋转着的砂轮边缘上飞出的碎屑.

2.18 一物体可否只具有机械能而无动量？一个物体可否只有动量而无机械能？试举例说明。

2.19 判断下列说法是否正确，并说明理由。

- (1) 不受外力作用的系统，它的动量和机械能都守恒；
- (2) 内力都是保守力的系统，当它的合外力为零时，其机械能守恒；
- (3) 只有保守内力作用而没有外力作用的系统，它的动量和机械能都守恒。

2.20 “由于作用于质点系内的所有质点上的一切内力的矢量和恒等于零，所以内力不能改变质点系的总动能”。这句话对吗？你能否举出内力可以改变质点系总动能的例子？

2.21 作用在质点系各质点上的非保守力在运动过程中所做功的总和为零。问该质点系的机械能是否一定守恒？

2.22 内力可以改变质点系的动能，但不能改变质点系的动量，为什么？

2.23 为什么重力势能有正负，弹性势能只有正值，而引力势能只有负值？

2.24 合外力对物体所做的功等于物体动能的增量，而其中某一分力做的功，能否大于物体动能的增量？

2.25 重力、弹性力、万有引力这三种力做功有什么共同点？

2.26 一质点沿图 2.24 所示的路径从 A 到 C 和从 B 到 C 的过程中，保守力所做的功分别是 -30 J 和 30 J ，试问当质点从 A 到 B 的过程中，此保守力做的功是多少？

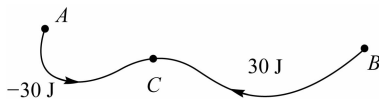


图 2.24 思考题 2.26 图

习 题

2.1 一质量为 0.5 kg 的质点在平面上运动，其运动方程为 $x=2\cos \pi t, y=4t$ 。求 $t=2\text{ s}$ 时该质点所受的合力 \boldsymbol{F} 是多少？

2.2 设作用在一质量为 2 kg 的物体上的力 F 在 5 s 内均匀地从 0 增加到 40 N ，开始时物体处于静止状态，求 5 s 时物体的速度。

2.3 将质量 $m=800\text{ g}$ 的物体，以初速 $\boldsymbol{v}_0=20\boldsymbol{i}\text{ m/s}$ 抛出，取 \boldsymbol{i} 水平向右， \boldsymbol{j} 竖直向下，忽略阻力， g 取 10 m/s^2 ，试计算（并做出矢量图）：

- (1) 物体抛出后第 2 s 末和第 5 s 末的动量；
- (2) 第 2 s 末至第 5 s 末的时间间隔内，物体的重力冲量。

2.4 质量为 m 的小球在水平面内做速率为 v_0 的匀速率圆周运动，试求小球在经过下列过程中的动量改变。

- (1) $\frac{1}{4}$ 圆周；(2) $\frac{1}{2}$ 圆周；(3) $\frac{3}{4}$ 圆周；(4) 整个圆周。

2.5 一质量为 $m=10\text{ kg}$ 的物体受到一个水平方向的力的作用, 力的大小 $F=(30+4t)\text{ (N)}$, 试求:

(1) 在开始 2 s 内此力的冲量;

(2) 若冲量为 $300\text{ N}\cdot\text{s}$, 此力作用的时间为多少?

(3) 若物体的初速度 $v_1=10\text{ m/s}$, 方向与 F 的方向相同, 在 $t=6.86\text{ s}$ 时, 此物体速度 v_2 为多少?

2.6 一粒子弹由枪口飞出的速度是 300 m/s , 在枪管内子弹受的合力为 $F=400-\frac{4\times 10^5}{3}t$. 求:

(1) 子弹行径枪管所需的时间(假定子弹到枪口时受力变为零);

(2) 该力的冲量;

(3) 子弹的质量.

2.7 一个质点的运动函数为 $\mathbf{r}=5t\mathbf{i}$, $\mathbf{F}=3t\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j}$ 是作用在质点上的一个力. 求 $t=0\text{ s}$ 到 $t=2\text{ s}$ 这一过程此力使质点获得的动能.

2.8 一物体按 $x=ct^3$ 的规律做直线运动. 设空气对物体的阻力正比于速度的平方, 比例系数为 k . 求物体从 $x_0=0$ 运动到 $x=1\text{ m}$ 时阻力所做的功.

2.9 用铁锤将一铁钉钉进木板, 设木板对钉的阻力与钉进木板的深度成正比, 在第一次锤击时钉子被钉进木板 1 cm 深. 问第二次锤击时, 钉子被钉进木板多深? 假设每次锤击铁钉的速度相等, 且锤与铁钉的碰撞为完全非弹性碰撞.

2.10 用 $v_0=20\text{ m/s}$ 的初速度将一质量为 $m=0.5\text{ kg}$ 的物体竖直上抛, 所达到的高度为 $h=16\text{ m}$, 求空气对它的平均阻力.

2.11 质量 $m_1=2.0\times 10^{-2}\text{ kg}$ 的子弹, 击中质量为 $m_2=10\text{ kg}$ 的冲击摆, 使摆在竖直方向升高 $h=7\times 10^{-2}\text{ m}$, 子弹嵌入其中. 求:

1) 子弹的初速度 v_0 是多少?

2) 击中后的瞬间, 系统的动能为子弹初动能的多少倍?

2.12 如图 2.25 所示, A 和 B 两物体的质量 $M_A=M_B$, 物体 B 与桌面间的滑动摩擦系数 $\mu=0.2$, 滑轮摩擦不计, 试求物体 A 自静止落下 $h=1.0\text{ m}$ 时的速度.

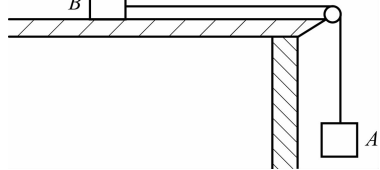


图 2.25 习题 2.12 图

2.13 质量为 m 的人造地球卫星沿圆形轨道运动, 离开地面的高度等于地球半径 R 的 2 倍. 试以 m 、 R 、引力恒量 G 、地球质量 M 表示出:

(1) 卫星的动能;

(2) 卫星在地球引力场中的引力势能;

(3) 卫星的总机械能.

第 3 章

刚体力学基础

对于机械运动的研究,只局限于质点的情况是很不够的.质点的运动只代表物体的平动.物体是有形状和大小的,它可以做平动、转动,甚至更为复杂的运动;而且在运动中,物体的形状也可能发生变化.本章讨论的刚体,只考虑其形状和大小,但是不考虑其形变,仍然是一个理想模型.

前两章我们介绍了力学的基本概念和原理,如质点、位矢、位移、速度和加速度,牛顿定律、动量和冲量、功和能等概念以及动量、角动量和能量守恒定律.我们知道,这些概念和定理、定律,不仅适用于质点,也适用于质点系.本章将介绍一种特殊的质点系——刚体及刚体所遵从的力学规律.这些规律实际上是前两章的基本概念和原理在刚体上的应用.本章重点讨论刚体的定轴转动这种简单的情况.重要的概念有转动惯量、力矩、角速度和角动量等,守恒定律同样适用于包括刚体的系统.角动量定理和角动量守恒定律在现代物理学和航天科技中有着特别重要的意义.

3.1 刚体运动的描述

一般物体在外力作用下,其形状和大小都要发生变化.但如果在外力作用下,物体的形状和大小保持不变,即物体内任意两点之间的距离不因外力而改变,这样的物体称为**刚体**.刚体可以看成由无数个连续分布的质点组成的质点系,每一个质点称为刚体的一个质量元,这样刚体的每个质量元都服从质点力学规律.不同于质点,刚体这个特殊的质点系的力学规律有自己特殊的表现形式.

3.1.1 刚体的平动和转动

1. 刚体的平动

刚体在运动过程中,如果刚体上任意两点间所连的直线始终保持平行,则这种运动称为刚体的平动.例如,汽缸中活塞的运动,车床上车刀的运动,升降机运动等,都属于平动.显然,刚体做平动时,刚体上任意一条直线在刚体平动过程中始终保持平行,如图 3.1 所示.直线上所有的点应有完全相同的位移、速度和加速度.在平动过程中,刚体上所有点的运动是完全相同的,它们都具有相同的位移、速度和加速度.因此,可以用刚体上任意一点的运动来代表整个刚体的平动.前两章质点运动的描述和质点力学的规律,实际上是刚体的平动

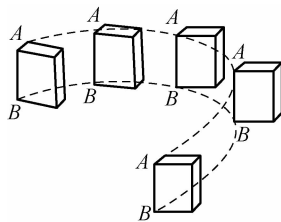


图 3.1 刚体的平动

规律.

2. 刚体的转动

刚体在运动过程中,如果刚体上所有的点都绕同一条直线做圆周运动,则这种运动称为转动,这条直线称为**转轴**.如果转轴的位置或方向随时间变化,这种转动称为非定轴转动;如果转轴的位置或方向是固定不动的,这种转动称为**定轴转动**.本章主要研究刚体的定轴转动.

刚体的平动和转动是刚体运动中两种基本的形式,无论刚体做多么复杂的运动,都可以把它看成平动和转动的叠加.例如,车轮的滚动,如图 3.2 所示.不难看出,轮子的中心 O (质心)是在平动,而整个轮子绕通过质心 O 垂直地面的转轴在转动.可见,车轮的滚动可看成车轮随着转轴的平动和整个车轮绕转轴的转动的叠加.因此,刚体的平动和转动的规律是研究刚体复杂运动的基础.



图 3.2 车轮的滚动

3.1.2 刚体的定轴转动

定轴转动是刚体转动中最简单的运动形式.

刚体做定轴转动时,刚体上各点都绕同一转轴做圆周运动,而转轴本身在空间的位置不动,轴上各点始终静止不动.例如,门的开或关、机器上飞轮的转动等都是定轴转动.如图 3.3 所示,刚体上 P 点处任一个质元都将在通过该点且与转轴垂直的平面内做圆周运动,该平面称为**转动平面**,圆心 O 点是转轴与转动平面的交点.显然,这种转动平面可以有无数个,对于刚体的转动而言,它们是等价的,在研究刚体转动时可任选一个.因此可以看出,刚体的定轴转动实质上就是刚体上各个质元在垂直于转轴的转动平面内的圆周运动.

由于刚体是个特殊的质点系,各个质元之间没有相对位移.因此,在相同的一段时间内,各质元的半径扫过的角度相同,它们的角位移、角速度、角加速度都相同,但各质元到轴的距离不同.因此,各质元的线量即位移、线速度、线加速度不同.这样在描述刚体的定轴转动时,用角量较为方便.

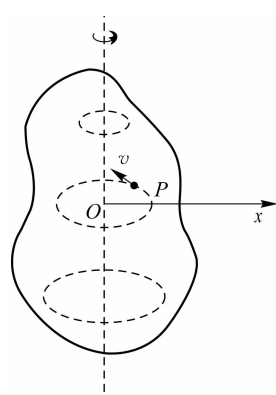


图 3.3 刚体的定轴转动

3.1.3 描述刚体定轴转动的物理量

我们已经知道,用角量来描述刚体的定轴转动比较方便.那么以前讨论过的角位移、角速度和角加速度以及有关公式,角量和线量的关系,对刚体的定轴转动都适用.

设一刚体绕 z 轴做定轴转动,取轴的指向为正方向,如图 3.4 所示.刚体做定轴转动时,刚体上到转轴的距离为 r 的一点的速度、切向加速度和法向加速度的大小与角速度、角加速度的关系为

$$v = \omega r$$

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = r\beta$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

刚体作匀变速转动时,可用下面的相应公式进行讨论.

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0)$$

为了充分反映刚体转动的情况,常用矢量表示角速度及角加速度.在第一章中,我们把角速度的大小定义为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

角速度的方向是这样规定的:让右手四指螺旋转动的方向与刚体的转动方向一致,那么拇指所指的方向就是角速度矢量的方向.

同样,我们把角速度的大小定义为

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

角加速度 β 的方向应当根据角速度的方向及刚体转动的情况共同决定,当刚体加速转动时, β 的方向与角速度方向相同;当刚体减速转动时,角加速度 β 的方向与角速度方向相反.

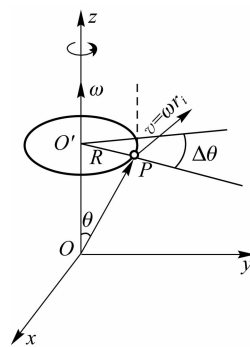


图 3.4 刚体的角量描述

3.2 刚体的定轴转动定律

3.2.1 力对转轴的力矩

对于刚体的定轴转动而言,若作用在刚体上 p 点的力 \mathbf{F} 在转动平面内,力的作用点 p 相对转轴的位矢为 \mathbf{r} ,力臂为 d ,则力 \mathbf{F} 对转轴的力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

其中,力矩的大小 $M = Fr \sin \theta$,如图 3.5 所示.

如果作用在刚体上 p 点的力 \mathbf{F} 不在转动平面内,如图 3.6 所示,设 p 点在转动平面内的位矢为 \mathbf{r} ,将力分解为垂直于转轴 z 的分量 \mathbf{F}_{\perp} 和平行于转轴 z 的分量 \mathbf{F}_{\parallel} ,力 \mathbf{F} 平行于转轴的分量 \mathbf{F}_{\parallel} 只能使刚体翻转,不能使刚体绕定轴转动,因此, \mathbf{F}_{\parallel} 不能改变刚体的转动状态,对转轴不产生力矩.使刚体绕定轴转动的力只能是在转动平面内,力 \mathbf{F} 垂直于转轴的分量 \mathbf{F}_{\perp} ,它产生的力矩与图 3.5 所示的情况相同,即

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\perp} \quad (3-1)$$

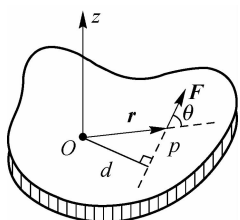


图 3.5 力在转动平面内

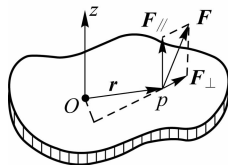


图 3.6 力不在转动平面内

由分析可知,在讨论刚体的定轴转动中力矩的作用时,用到的只是 F_{\perp} 这个分量,因此,只需考虑垂直于转轴的作用力或分力.既然如此,可以约定:以下所涉及的外力都认为是位于转动平面内的.

可以证明,一对相互作用力对同一转轴的力矩之和为零.如图 3.7 所示,设刚体上任意两质元 Δm_1 和 Δm_2 的相互作用力分别为 f_{12} 和 f_{21} , $f_{12} = -f_{21}$, 它们对转轴的力矩大小分别为

$$M_1 = f_{12}d, M_2 = f_{12}d$$

而

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{12}, \text{方向沿转轴向下};$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{21}, \text{方向沿转轴向上}.$$

所以,它们对同一转轴的合力矩为零.

例 3.1 一条缆索绕过一定滑轮拉动一升降机,如图 3.8(a) 所示. 滑轮半径 $r = 0.5 \text{ m}$, 如果升降机从静止开始以加速度 $a = 0.4 \text{ m/s}^2$ 匀加速度上升,求:

- (1) 滑轮的角加速度;
- (2) 开始上升后, $t = 5 \text{ s}$ 末滑轮的角加速度;
- (3) 在 5 s 内滑轮转过的圈数;
- (4) 开始上升后, $t' = 1 \text{ s}$ 末滑轮边缘上一点的加速度(假设缆索和滑轮之间不打滑).

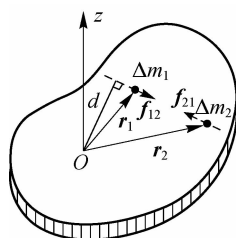


图 3.7 一对内力的力矩

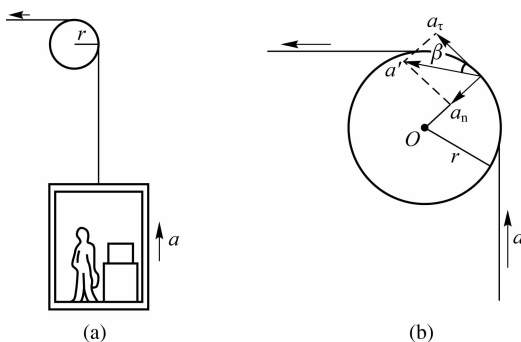


图 3.8 例 3.1 图

解:(1) 由于升降机的加速度和轮缘上一点的切向加速度相等,根据 $a_{\tau} = r\beta$, 则

$$\beta = \frac{a_{\tau}}{r} = \frac{a}{r} = \frac{0.4}{0.5} \text{ rad/s}^2 = 0.8 \text{ rad/s}^2$$

(2) 由 $\omega = \beta t$, 得

$$\omega = 0.8 \times 5 \text{ rad/s} = 4 \text{ rad/s}$$

(3) 根据 $\theta = \frac{1}{2}\beta t^2$, 则

$$\theta = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 5^2 \text{ rad} = 10 \text{ rad}$$

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = 1.6 \text{ (圈)}$$

(4) 如图 3.8(b) 所示, 已知 $a_\tau = a = 0.4 \text{ m/s}^2$, 有

$$\omega' = \beta t' = 0.8 \times 1 \text{ rad/s} = 0.8 \text{ rad/s}$$

法向加速度为

$$a_n = r\omega'^2 = 0.5 \times 0.8^2 \text{ m/s}^2 = 0.32 \text{ m/s}^2$$

所以

$$a' = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{0.32^2 + 0.4^2} \text{ m/s}^2 = 0.51 \text{ m/s}^2$$

加速度的方向与轮缘切线方向的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{a_n}{a_\tau} = \arctan \frac{0.32}{0.4} = 38.7^\circ$$

3.2.2 刚体定轴转动的转动定律

刚体的质量可以是连续分布的质点系, 也可以是离散分布的质点系. 对于质量连续分布的质点系, 可将其看成由无数多个质元组成的, 其中每一个质元都服从牛顿运动定律. 把构成刚体的全部质点的运动加以综合, 就可以得出刚体的整个运动所服从的规律. 下面我们由牛顿第二定律出发推导出刚体做定轴转动的规律.

如图 3.9 所示, 假设一个刚体绕固定轴 Oz 轴转动, 将此刚体分成许多质元, 每个质元都在各自的转动平面上做圆周运动, 它们各自的转动平面不尽相同, 各自做圆周运动的圆心也不相同. 但是, 这些圆心都在 z 轴上. 在刚体中取一质元 i , 其质量为 Δm_i , Δm_i 离转轴的距离为 r_i , 设该质元受到的合外力为 F_i , 来自刚体内其他质元对它的合内力为 f_i , 并假设合外力 F_i 和内力 f_i 都位于质元 Δm_i 所在的转动平面内 (即都与转轴垂直). 设质元的加速度为 a_i , 则有

$$F_i + f_i = (\Delta m_i) a_i$$

将 F_i 和 f_i 分别分解为切向分力和法向分力, 由于法向分力通过转轴, 不产生力矩. 因此, 我们只考虑切向分力, 由牛顿第二定律得

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = (\Delta m_i) a_{i\tau}$$

设刚体绕定轴转动的角速度为 ω , 角加速度为 β , 因为 $a_{i\tau} = r_i \beta$, 所以上式变为

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = \Delta m_i r_i \beta$$

两边同乘以 r_i , 得

$$r_i F_{i\tau} + r_i f_{i\tau} = \Delta m_i r_i^2 \beta$$

其中, $r_i F_{i\tau}$ 与 $r_i f_{i\tau}$ 分别是外力 F_i 和内力 f_i 对转轴的力矩, 对组成刚体的每一个质元都可以列出这样的方程, 把它们相加后得到

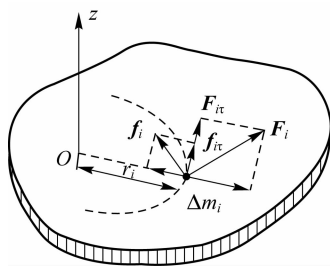


图 3.9 转动定律

$$\sum (r_i F_{i\tau} + r_i f_{i\tau}) = \sum \Delta m_i r_i^2 \beta$$

其中, $\sum r_i f_{i\tau} = 0$, $M = \sum r_i F_{i\tau}$ 为刚体内所有质元受到的外力对转轴的力矩之和. 于是, 可得到

$$M = \left(\sum \Delta m_i r_i^2 \right) \beta$$

令

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 \quad (3-2)$$

称为刚体对转轴的转动惯量, 于是有

$$M = J\beta \quad (3-3)$$

式(3-3)表明, 刚体做定轴转动时, 在合外力矩 M 的作用下, 所获得的角加速度 β 与合外力矩 M 成正比, 与转动惯量 J 成反比. 这一结论称为刚体定轴转动的转动定律.

刚体定轴转动的转动定律 $M = J\beta$ 与牛顿第二定律 $F = ma$ 在数学形式上是相似的, 合外力矩 M 与合外力 F 相对应, 转动惯量 J 与质量 m 相对应, 角加速度 β 与加速度 a 相对应. 可见, 转动定律在刚体定轴转动中的地位与牛顿第二定律的地位是相当的, 也是瞬时性的规律. 外力矩与外力、角量与线量、转动惯量与质量这三对对应关系, 贯穿了整个刚体的定轴转动. 转动定律是解决刚体定轴转动问题的基本定律.

3.2.3 转动惯量

由转动定律的表达式 $M = J\beta$ 可以看出, 在相同的外力矩作用下, 刚体的转动惯量 J 越大, 刚体所获得的角加速度 β 越小, 则刚体的转动状态不易改变; 刚体的转动惯量 J 越小, 刚体所获得的角加速度 β 越大, 刚体的转动状态容易发生变化. 转动惯量 J 是和质量 m 相对应的物理量, 物体的质量 m 是质点的平动惯性的量度, 而刚体的转动惯量 J 是刚体转动惯性的量度.

由转动惯量的定义式 $J = \sum \Delta m_i r_i^2$ 可知, 刚体相对于某转轴的转动惯量, 是组成刚体的各部分质元与它们各自到该转轴距离平方的乘积之和, 即

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 = \sum \Delta m_1 r_1^2 + \sum \Delta m_2 r_2^2 + \cdots + \sum \Delta m_n r_n^2 \quad (3-4)$$

式(3-4)是刚体的质量离散分布时的转动惯量.

如果刚体的质量是连续分布的, 只需要将上式的求和号改为积分形式即可, 即

$$J = \int r^2 dm \quad (3-5)$$

在国际单位制中, 转动惯量的单位是千克·米² ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

下面举几个计算刚体转动惯量的例子.

例 3.2 如图 3.10 所示, 在无质轻杆的 b 处和 $3b$ 处各系上质量为 $2m$ 和 m 的质点, 可绕 O 轴转动, 求质点系的转动惯量 J .

解: 这是一个质量不连续分布的刚体, 根据(3-4)式, 刚体的转动惯量为

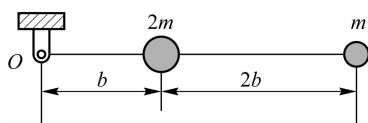


图 3.10 例 3.2 图

$$J = \sum_{i=1}^2 \Delta m_i r_i^2 = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 \\ = 2mb^2 + m(3b)^2 = 11mb^2$$

如果将图 3.10 中刚体质元 $2m$ 和 m 的位置交换, 则刚体的转动惯量为

$$J = 2m(3b)^2 + m(b)^2 = 19mb^2$$

两种情况刚体的总质量不变, 但是转动惯量却是不同的. 这说明, 刚体的转动惯量不仅与质量有关, 还与刚体的质量分布有关.

例 3.3 求质量为 m 、长为 l 的均匀细棒在下面两种给定的转轴的转动惯量.

(1) 转轴通过细棒的中心 O 并与棒垂直;

(2) 转轴通过细棒的一端 O' 并与棒垂直.

解: 细棒的质量可以认为是连续分布的, 引入质量线密度 λ , 即单位长度的质量 $\lambda = \frac{m}{l}$.

应用公式 $J = \int r^2 dm$ 来计算细棒对定轴的转动惯量.

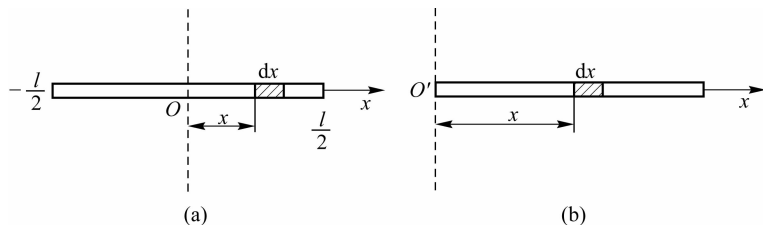


图 3.11 例 3.3 图

(1) 如图 3.11(a) 所示, 取棒的中心为坐标原点 O , x 轴方向如图所示. 在细棒上任意位置处取一长度为 dx 的线元, 其质量为 $dm = \lambda dx$, 则该细棒绕转轴 O 的转动惯量为

$$J_O = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \lambda dx = \frac{1}{12} ml^2$$

(2) 对于当转轴通过细棒的一端 O' 并与棒垂直时, 建立如图 3.11(b) 所示的坐标轴, 则细棒绕该轴的转动惯量为

$$J_{O'} = \int_0^l x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} ml^2$$

同一刚体, 有相同的质量, 对于不同转轴的转动惯量不同. 实际上, 两种转轴的转动惯量之间是有联系的, 即

$$J_{O'} = J_O + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

这个关系式可归纳为**平行轴定理**, 即刚体对任一转轴的转动惯量 J 等于刚体对通过质心 C 并与该轴平行的转动惯量 J_C 加上刚体质量 m 与两轴间距离 d 的二次方的乘积, 如图 3.12 所示. 平行轴定理可表达为

$$J = J_C + md^2 \quad (3-6)$$

在实际应用中, 经常遇到由几部分不同形状和大小的刚体构成的一个整体. 根据转动惯量的定义, 其转动惯量应等于各部分刚体对同一转轴的转动惯量之和.

综上所述, 刚体的转动惯量与以下因素有关.

(1) 刚体的质量. 各种形状的刚体, 总质量越大, 转动惯量越大.

(2) 刚体质量的分布. 总质量相同的刚体, 质量分布不同, 即刚体的形状不同, 转动惯量也不同. 质量分布离转轴越远, 转动惯量越大.

(3) 转轴的位置. 同一刚体, 转轴的位置不同, 质量对转轴的分布也不同. 因而转动惯量也不同.

以上例子是根据转动惯量的定义式(3-5)计算规则几何形状的刚体的转动惯量, 对于几何形状较复杂的刚体通常要用实验测定. 表 3.1 列出几种几何形状简单、规则、密度均匀的物体对通过质心的不同转轴的转动惯量.

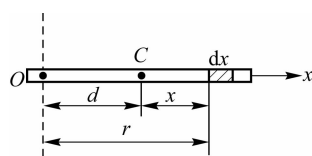


图 3.12 平行轴定理

表 3.1 几种常见形状刚体的转动惯量

<p>圆环</p> $J = mR^2$	<p>圆筒</p> $J = \left(\frac{m}{2}\right)(R_1^2 + R_2^2)$
<p>圆柱体</p> $J = \frac{mR^2}{2}$	<p>圆标体</p> $J = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$
<p>细棒</p> $J = \frac{ml^2}{12}$	<p>细棒</p> $J = \frac{ml^2}{3}$
<p>球体</p> $J = \frac{2mR^2}{5}$	<p>薄球壳</p> $J = \frac{2mR^2}{3}$

3.2.4 转动定律的应用举例

应用刚体定轴转动的转动定律解题要特别注意以下问题.

首先,定轴转动定律是合外力矩对刚体的瞬时作用规律,表达式 $M=J\beta$ 中各个物理量均是同一时刻对同一刚体和同一转轴而言。

其次,在定轴转动中,由于力矩和角加速度包括角速度在内,它们的方向均沿转轴,通常用代数表示。

在实际应用中,对一个力学系统而言,有的物体做平动,有的物体做转动,处理此类问题仍然采用隔离法.对于平动的物体利用牛顿第二定律列出动力学方程,对于定轴转动的物体利用定轴转动的转动定律列出动力学方程,然后,对这些方程综合求解。

例 3.4 如图 3.13 所示,质量 $m_1=16\text{ kg}$ 的定滑轮 A,其半径为 $r=15\text{ cm}$,可以绕其固定水平轴转动,忽略一切摩擦.一条轻的柔绳绕在定滑轮上,其另一端系一个质量 $m_2=8.0\text{ kg}$ 的物体 B,求:

- (1)物体 B 由静止开始下降 1.0 s 后的距离;
- (2)绳子的张力.

解:在质点动力学中,涉及滑轮的问题时,为简单起见,都假设滑轮的质量忽略不计.但若考虑滑轮的质量,就必须考虑滑轮的转动.此例中,物体 B 做平动,而滑轮做定轴转动,属于刚体的定轴转动和质点平动相结合的综合问题.因此,要分别应用转动定律、牛顿运动定律列方程。

分别对滑轮 A 和物体 B 进行受力分析,如图 3.13(b)所示,对物体 B,应用牛顿第二定律,可得

$$m_2 g - T = m_2 a$$

对滑轮,应用转动定律,可得

$$Tr = J\beta$$

其中,滑轮的转动惯量 $J = \frac{1}{2} m_1 r^2$. 绳相对于滑轮无滑动,在滑轮边缘上一点的切向加速度与绳和物体的加速度大小相等,则有

$$a = a_\tau = r\beta$$

联立以上式子得

$$a = \frac{2m_2 g}{m_1 + 2m_2}$$

(1) $t=1.0\text{ s}$ 时,物体下落的距离为

$$S = \frac{1}{2} at^2 + \frac{1}{2} \frac{2m_2 g}{m_1 + 2m_2} t^2 = \frac{8 \times 9.8 \times 1^2}{16 + 2 \times 8} \text{ m} = 2.45 \text{ m}$$

(2)绳子的张力为

$$T = m_2 (g - a) = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + 2m_2} = \frac{16 \times 8 \times 9.8}{16 + 2 \times 8} \text{ N} = 39.2 \text{ N}$$

例 3.5 一根长为 l ,质量为 m 的均匀细杆,可绕通过其一端且与杆垂直的光滑水平轴转动,如图 3.14 所示,将杆由水平位置静止释放,求它下摆到角度为 θ 时的角加速度和角速度。

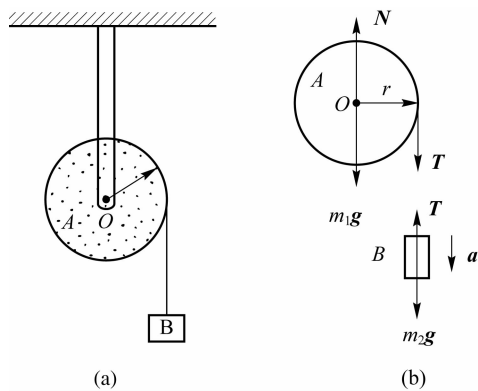


图 3.13 例 3.4 图

解:杆的下摆运动属于刚体的定轴转动,可用转动定律求解.对杆进行受力分析,杆受到轴对它的支撑力及重力的作用,但只有重力对杆有力矩的作用,而重力对杆的合力矩就和全部重力集中作用于质心所产生的力矩一样,即杆下摆到角度为 θ 时重力矩为

$$M = mg \times \frac{1}{2} l \cos \theta$$

由转动定律

$$M = J\beta$$

可得杆下摆到角度为 θ 时的角加速度为

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{\frac{1}{2} mg l \cos \theta}{\frac{1}{3} ml^2} = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

又因为

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega d\theta}{d\theta dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

所以有

$$\omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

即

$$\omega d\omega = \frac{3g \cos \theta}{2l} d\theta$$

两边积分

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3g \cos \theta}{2l} d\theta$$

可得杆下摆到角度为 θ 时角速度为

$$\omega^2 = \frac{3g \sin \theta}{l}$$

即

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}}$$

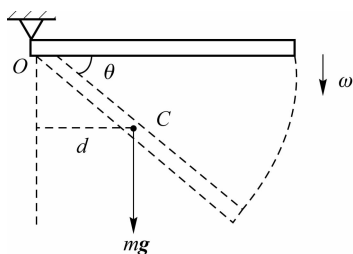


图 3.14 例 3.5 图

3.3 刚体定轴转动的角动量定理 角动量守恒定律

在第二章中,我们用动量来量度物体的机械运动量.当我们把这种量度方法用于物体的转动问题,如研究均质飞轮绕通过其中心并垂直于飞轮平面的定轴转动时,我们发现,虽然飞轮在转动,但它的质心保持静止.按质点系动量的定义,飞轮的总动量为零.这说明用动量来量度物体的转动运动量是不恰当的.因此,与在描述转动运动时引入与速度和加速度相对应的角量(角速度和角加速度)相类似,我们引入与动量相对应的角量——角动量,也称动量矩.

角动量的概念提出较晚,18世纪才定义,19世纪人们才把它视为力学中最基本的概念

之一. 由于大到星系, 小到电子、中微子都有旋转运动, 发现微观粒子的角动量具有量子化的重要特征, 角动量遵守守恒定律, 20 世纪以来, 角动量在物理学中的地位日益重要. 角动量及其守恒定律已经成为物理学中最重要的概念和定律之一.

3.3.1 角动量定理

1. 角动量

1) 质点的角动量

我们先给出角动量的定义. 设质量为 m 的质点某一时刻的运动速度为 v , 该时刻相对于参考点 O 的位置矢量为 r , 如图 3.15 所示. 质点的动量为 $p = mv$, 我们定义质点相对于参考点 O 的角动量为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (3-7)$$

上式表明, 一个质点相对于参考点 O 的角动量等于质点的位置矢量与其动量的矢积. 质点的角动量 L 是一个矢量, 其大小为

$$L = rmv \sin \theta \quad (3-8)$$

式中, θ 为位矢 r 与动量 p 之间的夹角, L 的方向由右手螺旋定则确定, 把右手大拇指伸直, 其余四指由位矢 r 通过小于 180° 的角转到矢量 p 的方向, 大拇指所指的方向就是角动量 L 的方向, 如图 3.16 所示. 显然, 角动量 L 的方向垂直于由矢量 r 和 p 所决定的平面.

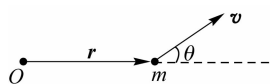


图 3.15 质点的角动量

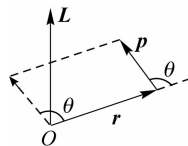


图 3.16 角动量的方向确定

在国际单位制中, 角动量的单位是 $\text{千克} \cdot \text{米}^2 \cdot \text{秒}^{-1} (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$.

从角动量的定义式(3-7)可以看出, 质点的角动量 L 与位矢 r 有关, 也就是与参考点 O 的选择有关. 同一质点对不同参考点的位矢不同, 因而角动量也不同. 因此在表示质点的角动量时, 必须指明是对哪一点的角动量. 为了表示角动量 L 是相对于参考点 O 的, 所以一般总把角动量 L 画在参考点 O 上.

若质量为 m 的质点做半径为 r 的圆周运动, 如图 3.17 所示. 某一时刻质点位于 a 点, 速度为 v . 若以圆心 O 为参考点, 那么 r 与 v 总是相垂直的, 则质点对圆心 O 的角动量 L 的大小为

$$L = rmv = mr^2\omega$$

式中, ω 为质点绕 O 点转动的角速度. L 的方向平行与 Oz 轴.

如果质点以恒定速度 v 做直线运动时, 对空间某一给定点也可能有角动量. 如图 3.18 所示, 当选取参考点 O 时, 质点对 O 点的角动量大小如下:

$$a \text{ 点} \quad L_a = mvr_a \sin \theta_1$$

$$b \text{ 点} \quad L_b = mvr_b \sin \theta_2$$

因为

$$r_a \sin \theta_1 = r_b \sin \theta_2 = r$$

所以

$$L_a = L_b$$

这说明质点在匀速直线运动过程中对某一定点的角动量是恒定的,其方向始终垂直纸面向内.

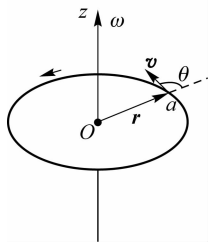


图 3.17 质点做圆周运动的角动量

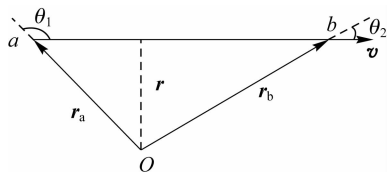


图 3.18 匀速直线运动的质点对参考点 O 的角动量

但当参考点选在该质点运动的直线上时,由于 $\sin \theta = 0$,那么质点在运动过程中的角动量就是零.所以,这些做直线运动的质点,只有对不在此直线上的参考点才有角动量.

2) 刚体对定轴的角动量

刚体是一个质点系,刚体对定轴的角动量就是所有质点对轴角动量的矢量和.

如图 3.19 所示,设刚体绕定轴 Oz 轴以角速度 ω 转动,刚体上每一个质元都以相同的角速度 ω 绕 Oz 轴在各自的转动平面内做圆周运动.设刚体中第 i 个质元的质量为 Δm_i ,该质元到转轴的距离为 r_i ,根据质点对参考点的角动量的大小的定义式,该质元对定轴的角动量为

$$L_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

由于组成刚体的每个质元对转轴的角动量都可以用上式表示,并且每一个质点的角动量的方向都沿 Oz 轴.所以,整个刚体对转轴的角动量应是刚体中所有质元对转轴的角动量大小之和,即

$$L = \sum \Delta m_i r_i^2 \omega$$

式中, $\sum \Delta m_i r_i^2$ 为刚体绕 Oz 轴的转动惯量 J ,于是刚体对定轴 oz 轴的角动量大小为

$$L = J\omega \quad (3-9)$$

方向沿 Oz 轴指向.式(3-9)表明,刚体定轴转动的角动量等于刚体的转动惯量与角速度的乘积,其方向与角速度的方向相同.在刚体定轴转动中,角动量的方向可用正负号表示.刚体的角动量 $L = J\omega$ 与质点的动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 在形式上相互对应.

2. 力矩

对于一个静止的质点来说,当它受到外力的作用,将开始运动;但对于一个能够转动的物体而言,当它受到外力作用时,可能转动也可能不转动,这取决于此力是否产生力矩.外力对物体产生力矩,物体就会转动起来,反之,如果外力对物体不产生力矩,物体就不会转动.因此,力矩反映了力对物体的转动效果.

力矩是相对于一个参考点定义的.如图 3.20 所示,设在某一时刻质点 m 对某一参考点的位矢为 \mathbf{r} ,作用在质点上的力为 \mathbf{F} ,则位矢 \mathbf{r} 与作用力 \mathbf{F} 的矢积定义为力对参考点 O 的力

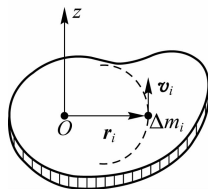


图 3.19 刚体的角动量

矩 M , 即

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3-10)$$

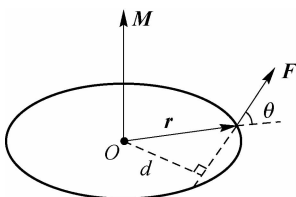


图 3.20 力对参考点 O 的力矩

力矩是矢量, 其大小为 $M = Fr \sin \theta = Fd$, 其中, θ 是 \mathbf{r} 与 \mathbf{F} 之间的夹角, d 为力对参考点的力臂. 力矩 \mathbf{M} 的方向用右手螺旋法则来判定: 把右手大拇指伸直, 其余四指由位矢 \mathbf{r} 通过小于 180° 的角转到矢量 \mathbf{F} 的方向, 这时大拇指所指的方向就是力矩 \mathbf{M} 的方向. 由此可以判定, \mathbf{M} 的方向垂直于位矢 \mathbf{r} 与 \mathbf{F} 所决定的平面.

在国际单位中, 力矩的单位是牛顿·米 ($\text{N} \cdot \text{m}$).

由式(3-10)可知, 力矩 \mathbf{M} 与位矢 \mathbf{r} 有关, 也就是与参考点 O 的选取有关. 对于同样的作用力 \mathbf{F} , 选择不同的参考点, 力矩 \mathbf{M} 的大小和方向都会不同.

3. 角动量定理

1) 质点的角动量定理

以上定义了角动量和力矩这两个物理量, 现在就来导出它们之间的定量关系, 从而说明力矩的作用效果.

设质量为 m 的质点, 在合力 \mathbf{F} 的作用下, 某一时刻的动量为 $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$, 该质点相对于某参考点 O 的位置矢量为 \mathbf{r} , 那么此时质点相对于参考点 O 的角动量为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

将上式对时间 t 求导, 可得

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v}$$

根据牛顿第二定律, 应有

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

又由于

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

所以

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{v} \times m\mathbf{v}$$

根据矢积的性质 $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$, 而 $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$, 于是有

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (3-11)$$

上式表明, 作用在质点上的合外力对某参考点的力矩, 等于质点对同一参考点的角动量的时间变化率.

式(3-11)还可以写成

$$\mathbf{M}dt = d\mathbf{L} \quad (3-12)$$

式中, $\mathbf{M}dt$ 是质点在运动过程中力矩对时间的累积量, 称为冲量矩. 对式(3-12)两边取积分, 可得

$$\int_{t_0}^t \mathbf{M}dt = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 \quad (3-13)$$

式(3-13)表明, 质点所受到的冲量矩, 等于质点角动量的增量. 这个结论称为**质点的角动量定理**.

我们常把式(3-11)和式(3-12)称为质点角动量定理的微分形式, 把式(3-13)称为角动量定理的积分形式. 质点的角动量定理告诉我们, 力矩使物体的角动量发生改变.

关于质点的角动量定理, 需要注意以下几个问题.

- (1) 角动量定理中的角动量 \mathbf{L} 和力矩 \mathbf{M} 必须是相对于同一参考点的.
- (2) 角动量定理与牛顿第二定律在数学形式上相互对应, 即

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

可见, 力矩 \mathbf{M} 和角动量 \mathbf{L} 是描述转动的物理量.

2) 刚体对定轴的角动量定理

当刚体绕固定轴做定轴转动时, 刚体对轴的转动惯量不随时间变化. 所以, 由刚体定轴转动的转动定律可得

$$M_{\text{外}} = J\beta = J \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt}$$

引入刚体的角动量后, 可得

$$M_{\text{外}} = \frac{dL}{dt} \quad (3-14)$$

即刚体所受到的合外力矩等于刚体的角动量对时间的变化率. 将上式变形可得

$$M_{\text{外}} dt = dL = d(J\omega)$$

如果刚体从 t_0 到 t 的时间内受到外力矩的作用, 使它绕定轴转动的角速度由 ω_0 变为 ω , 则可对上式积分得到

$$\int_{t_0}^t M_{\text{外}} dt = J\omega - J\omega_0 \quad (3-15)$$

式(3-15)表示, 作用在刚体上的合外力矩的时间积累, 称为 t_0 到 t 时间间隔内的冲量矩. 式(3-15)表明, 作用于刚体上的合外力矩的冲量矩等于刚体角动量的增量. 这个结论称为**刚体定轴转动的角动量定理**. 不难看出, 这个定理与质点的动量定理非常相似, 它把过程量(冲量矩)和状态量(角动量)联系起来.

另外, 与刚体定轴转动的转动定律 $M_{\text{外}} = J\beta$ 相比, 式 $M_{\text{外}} = \frac{dL}{dt}$ 是转动定律的另一表达式, 其适用范围更为广泛. 在刚体的转动惯量发生变化时, 式 $M_{\text{外}} = J\beta$ 已不再适用, 但 $M_{\text{外}} = \frac{dL}{dt}$ 仍然是成立的.

3.3.2 角动量守恒定律

1. 质点的角动量守恒定律

前面我们讨论了质点的角动量定理,即

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

如果作用于质点的合外力对参考点的力矩等于零,即 $\mathbf{M}=0$,则有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

或者说

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \text{常矢量} \quad (3-16)$$

上式表明,相对于某一参考点,如果质点所受的合外力矩等于零,则质点的角动量保持不变.这个结论称为质点的角动量守恒定律.

我们必须明确,质点的角动量守恒条件是合外力矩为零,即

$$\mathbf{M} = 0$$

力矩为零有以下三种情况.

(1) $\mathbf{F}=0$,即质点不受外力作用时,质点的角动量守恒.

(2) $\mathbf{r}=0$,表示质点处于参考点而静止不动时,质点的角动量守恒.

(3) \mathbf{r} 与 \mathbf{F} 都不为零,但是 $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$,即 $\sin \theta = 0$,也就是 \mathbf{r} 与 \mathbf{F} 平行,这时力的作用线通过参考点,那么质点的角动量也是守恒的.

在第(3)种情况中,质点并非不受外力,而是力的作用线始终通过参考点而已.我们把这样的力称为有心力,参考点称为力心.所以不能笼统地认为,凡是受力作用的质点其角动量都不守恒,而是要看此力是否是有心力.只要作用于质点的力是有心力,那么此力对力心的力矩总等于零.所以,在有心力作用下质点对力心的角动量都是守恒的.例如,恒星绕太阳转动时,太阳对它们的引力指向太阳的中心;原子核对核外电子的静电力总是指向原子核.在这里,行星受到的引力,核外电子受到的静电力都属于有心力,因此,行星绕太阳转动的过程中,对太阳的角动量守恒,同样的道理,核外电子绕核转动过程中,电子对核的角动量守恒.

从以上的分析可以得出,质点的角动量守恒定律是物理学的一条很重要的基本规律,在研究天体及微观粒子的运动时,角动量守恒定律都起着极为重要的作用.

例 3.6 质量为 m 的小球系于细绳的一端,绳的另一端绑在一根竖直放置的细棒上,如图 3.21 所示.小球被约束在水平面内绕细棒旋转,某时刻角速度为 ω_1 ,细绳的长度为 r_1 .当旋转了若干圈后,由于细绳缠绕在细棒上,绳长变为 r_2 ,求此时小球绕细棒旋转的角速度 ω_2 .

解: 在小球绕细棒做圆周运动的过程中,小球受到三个力的作用:竖直向下的重力 mg ,水平面对小球的向上的支持力 N ,绳子对小球的拉力 T .重力和支持力相平衡,而绳子对小球的拉力 T 属于有心力,因此小球对细棒的角动量守恒.

根据质点对轴的角动量守恒定律,应有

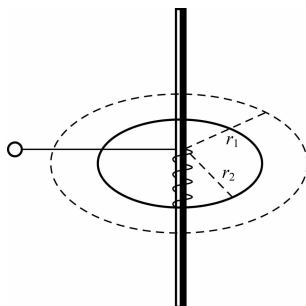


图 3.21 例 3.6 图

$$m_1 v_1 r_1 = m v_2 r_2$$

式中, v_1 是半径为 r_1 时小球的线速度, v_2 是半径为 r_2 时的线速度, 并且

$$v_1 = \omega_1 r_1$$

$$v_2 = \omega_2 r_2$$

将 v_1 、 v_2 代入上式, 可得

$$m r_1^2 \omega_1 = m r_2^2 \omega_2$$

因此

$$\omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \omega_1$$

可见, 由于细绳越转越短, $r_2 < r_1$, 因此小球的角速度必定越转越大, 即 $\omega_2 > \omega_1$.

2. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

在刚体的定轴转动中, 如果刚体所受的外力对定轴的合力矩为零, 即

$$M_z = 0$$

那么由式(3-14), 可得

$$J\omega = J\omega_0$$

或

$$J_\omega = \text{常量} \quad (3-17)$$

式(3-17)表明, 如果刚体所受的合外力矩等于零, 则刚体的角动量保持不变, 这一结论称为刚体的角动量守恒定律.

必须指出, 上面在推导角动量守恒定律的过程中, 虽然受到了刚体、定轴等条件的限制, 但是它的适用范围远远地超过了这些限制.

关于刚体的角动量守恒定律, 需要说明以下几点.

(1) 对于绕固定轴转动的刚体, 由于转动惯量 J 为一常数. 因此, 在角动量守恒的情况下, 刚体将以恒定的角速度绕定轴转动.

(2) 对于转动惯量可变的物体(如非刚体), 在角动量守恒的情况下, 如果使转动惯量减小, 则角速度增加; 反之, 若使转动惯量增大, 则角速度减小, 转动惯量和角速度的乘积保持不变, 即 $J_0 \omega_0 = J\omega$. 利用改变转动惯量来达到改变旋转角速度的例子很多. 例如, 花样滑冰运动员(非刚体)做旋转动作时, 往往先把两臂张开旋转(改变质量分布)以增大转动惯量, 由于没有外力矩的作用, 角动量守恒, 这时的角速度较小; 当运动员迅速收拢两臂靠近身体, 使相对身体中心的转动惯量减小, 结果使旋转角速度增大. 又如, 跳水运动员为在空中实现快速翻转, 在起跳后, 就必须将手和腿尽量蜷缩起来, 以改变质量分布, 减小转动惯量, 从而增大翻转的角速度, 入水前, 为了能竖直进入水中减小水的阻力, 使水花最小, 又必须把手臂和腿逐渐展开, 以增大转动惯量, 减小角速度, 如图 3.22 所示.

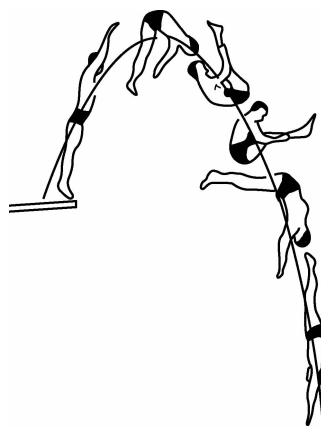


图 3.22 运用角动量守恒的跳水运动员

以上结论还可通过站在转台上、双手握哑铃的人的表演给予定性证明, 如图 3.23 所

示,若忽略转台轴间的摩擦力矩和空气阻力矩等,则人和转台组成的系统对转轴的角动量守恒.开始时,先使人和转台一起转动,当人将握哑铃的手逐渐收回时,对转轴的转动惯量减小,角速度变大;当人伸平双臂时,转动惯量增大,转动的角速度变小.

(3)对于由多个物体组成的系统,系统内既有平动也有转动的现象,若对某一定轴的合外力矩为零,则此系统对该轴的角动量守恒,即

$$\sum j\omega + \sum r \times mv = \text{常矢量}$$

如果此系统由两个物体组成,则有

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = \text{常矢量}$$

也就是说,当系统内的一个物体的角动量发生变化时,则另一物体的角动量必须等值异号的改变,从而使总的角动量保持不变.

除了日常生活中有许多现象可用角动量守恒定律来解释外,无数事实已经证明,在宏观领域可利用角动量守恒来研究天体的演化;在微观领域也可利用角动量守恒研究微观粒子的运动特征.可见,角动量守恒定律不仅适用于刚体,还适用于非刚体;不仅适用于天体运动,还适用于微观粒子的运动.因此,角动量守恒定律与动量守恒定律、能量守恒定律一样,是自然界中的普遍规律,虽然它们都是在经典牛顿力学的基础上导出的,但适用范围远远超出了原有条件的限制,它们不仅适用于牛顿力学所研究的宏观、低速领域,而且适用于牛顿力学失效的微观、高速领域.这三条守恒定律是比牛顿运动定律更基本、更普遍的物理定律.

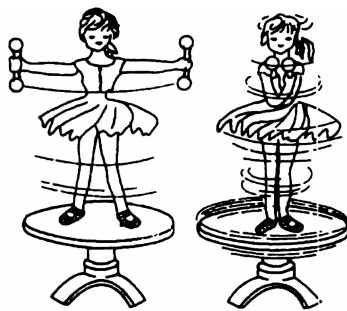


图 3.23 角动量守恒

3.4 刚体定轴转动的动能定理

3.4.1 刚体的转动动能

刚体定轴转动时,其每个质元都绕转轴做圆周运动,都具有一定的动能.那么,所有质元的动能之和就是刚体的转动动能.

设刚体以角速度 ω 绕定轴转动,其中每一个质元都在各自的转动平面内以角速度 ω 做圆周运动,若第 i 个质元的质量为 Δm_i ,它到转轴的距离为 r_i ,其速度的大小 $v_i = r_i\omega$,那么第 i 个质元的动能是

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

于是整个刚体的动能是

$$E_k = \sum E_{ki} = \frac{1}{2} \left(\sum \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

由于

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

则刚体绕定轴的转动动能为

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (3-18)$$

由式(3-18)可以看出,刚体的转动动能 $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$ 与物体的平动动能(质点的动能) $\frac{1}{2} m v^2$ 相比较,两者形式上十分相似,角速度 ω 与线速度 v 相对应,转动惯量 J 与质量 m 相对应,再次说明转动惯量是反映刚体转动惯性的物理量.

在国际单位制中,刚体的转动动能的单位是焦耳(J).

3.4.2 刚体的重力势能

如果刚体受到保守力的作用,也可以引入势能的概念.例如,在重力场中刚体就具有一定的重力势能.一个质量为 m 的刚体,它的重力势能应当是组成刚体的所有质元重力势能之和.若取地面坐标系来计算势能,如图 3.24 所示,刚体的重力势能为

$$E_p = \left(\sum \Delta m_i h_i \right) g$$

根据质心的定义,此刚体的质心高度为

$$h_c = \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

因此,上式改写为

$$E_p = m g h_c \quad (3-19)$$

上述结果表明,刚体的重力势能相当于它的全部质量 m 集中在质心处的质点的重力势能.无论刚体如何放置,都能得出式(3-19),也就是说,刚体势能仅取决于质心的高度,与刚体的方位无关.这也体现了质心的概念在刚体力学中的重要性.

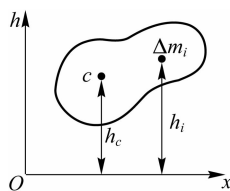


图 3.24 刚体的重力势能

3.4.3 力矩做的功

在质点力学中,当质点在合力作用下沿力的方向发生位移时,力就对质点做了功,并且功可由作用力与质点沿力的方向移动的位移的乘积来表示.与之相似,当刚体在外力矩作用下转动时,力矩也对刚体做了功,做功的结果是使刚体的角速度发生变化.

现在来计算力矩做的功.由于刚体是个特殊的质点系,质点之间的相对位置保持不变,所以内力是不做功的,只需考虑外力的功.如图 3.25 所示,刚体绕固定轴 Oz 轴转动,设在转动平面内的外力作用在刚体上的 p 点, p 点相对 O 点的位矢是 r ,当刚体绕 Oz 轴转过一个微小的角位移 $d\theta$ 时, p 点的位移就是 dr , dr 的大小 $|dr| = ds = r d\theta$,在这个过程中,力 F 做的功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_{\tau} ds = F_{\tau} r d\theta$$

式中, F_{τ} 是力 F 在位移 dr 方向上的分量,它与位矢 r 垂直,所以 $F_{\tau} r$ 是力 F 对转轴的力矩 M ,因此,上式可以写成

$$dA = M d\theta \quad (3-20)$$

式(3-20)表明,定轴转动的刚体在转过 $d\theta$ 角的过程中,外力对刚体做的元功等于相应的力矩与角位移元的乘积,称为力矩的功.

如果刚体在力矩 M 的作用下绕固定轴从 θ_0 位置转到 θ 位置,则力矩对刚体做的功为

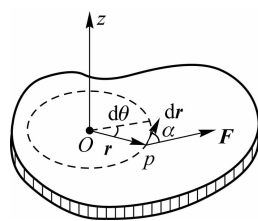


图 3.25 力矩所做的功

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta \quad (3-21)$$

如果刚体受到几个力的共同作用,则式中的外力矩应表示为合力矩.

3.4.4 定轴转动的动能定理

当外力矩对刚体做功时,力矩的空间累积效应就是刚体的转动动能会发生变化.下面讨论力矩做的功与刚体的转动动能之间的变化关系.设刚体做定轴转动,在合外力作用下绕定轴转过角位移 $d\theta$,合外力矩对刚体所做的元功为

$$dA = M d\theta$$

将转动定律 $M = J\beta = J \frac{d\omega}{dt}$ 代入上式,得到

$$dA = M d\theta = J \frac{d\omega}{dt} d\beta = J \omega d\omega$$

如果刚体在合外力矩 M 作用下绕定轴转动时,角速度由 ω_0 变为 ω ,则在此过程中合外力矩对刚体做的总功为

$$A = \int dA = \int_{\omega_0}^{\omega} J \omega d\omega$$

即

$$A = \frac{1}{2} J \omega^2 - \frac{1}{2} J \omega_0^2 \quad (3-22)$$

式中, $\frac{1}{2} J \omega_0^2$ 和 $\frac{1}{2} J \omega^2$ 分别为刚体在初末状态的转动动能.

式(3-22)表明,合外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量.这就是**刚体定轴转动的动能定理**.

刚体绕定轴转动的动能定理在工程上有很多应用.在工程上,很多机器都配有飞轮,转动的飞轮可以把能量以转动动能的形式储存起来,在需要做功的时候又释放出来.例如,冲床在冲孔时,冲力是很大的,如果由电动机直接带动冲头,电动机将无法承受这样大的负荷.因此,中间要装上减速箱和飞轮储能装置,电动机通过减速箱带动飞轮转动,使飞轮储有转动动能 $\frac{1}{2} J \omega_0^2$.在冲孔时,由飞轮带动冲头对钢板冲孔做功,使飞轮转动动能减少到 $\frac{1}{2} J \omega^2$.这样利用转动的飞轮释放能量,可以大大减少电动机的负荷,这就是动能定理的应用.

3.4.5 定轴转动的机械能守恒定律

比较刚体定轴转动的动能定理 $A = \frac{1}{2} J \omega^2 - \frac{1}{2} J \omega_0^2$ 与质点的动能定理 $A = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$,可以看出,它们在形式上非常相似,转动惯量 J 与质量 m 相对应,用速度 ω 与线速 v 相对应,这就是说,有关刚体定轴转动的功和能的特点与质点系统的功和能的特点,在形式上是完全相同的,下面就来讨论关于刚体定轴转动的功和能的问题.

1. 刚体定轴转动的功能原理

如果刚体在定轴转动中除受到外力矩外,还受到保守力矩的作用,而在刚体的定轴转动

中,涉及的势能主要是重力势能. 所以,保守力只考虑重力,当系统取地球和刚体时,式(3-22)可写为

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{外}} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{保内}} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{非保内}} d\theta = \frac{1}{2} j\omega^2 - \frac{1}{2} j\omega_0^2 \quad (3-23)$$

在质点系动力学中保守力的功等于势能增量的负值,在刚体转动中保守力矩的功,就是保守力的功,即

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{保}} \cdot d\theta = -\Delta E_p$$

因此

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{保内}} d\theta = -\Delta E_p = mgh_{C0} - mgh_C$$

式中, h_{C0} 和 h_C 分别为刚体在初末状态时质心距离零势能面的高度,将上式代入式(3-23)得到

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{外}} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{非保内}} d\theta = (mgh_C + \frac{1}{2} J\omega^2) - (mgh_{C0} + \frac{1}{2} J\omega_0^2) = E_2 - E_1 = \Delta E \quad (3-24)$$

上式表明,在刚体定轴转动中,合外力矩的功与非保守力矩做功的代数和,等于刚体系统机械能的增量,这个结论称为**刚体定轴转动的功能原理**.

2. 刚体定轴转动的机械能守恒定律

由式(3-24)可以看出,若

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{外}} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{非保内}} d\theta = 0$$

则

$$\Delta E = 0$$

即

$$E = mgh_C + \frac{1}{2} J\omega = \text{常量} \quad (3-25)$$

式(3-25)表明,在只有保守力矩做功的情况下,系统的转动动能和势能相互转化,而总的机械能保持不变. 这就是**刚体定轴转动的机械能守恒定律**.

对于包含刚体在内的系统,如果在运动过程中,只有保守内力做功,则该系统的机械能守恒,这样,既要考虑质点的动能、重力势能、弹性势能,还要考虑刚体定轴转动的转动动能及重力势能.

例 3.7 如图 3.26 所示,一个质量为 M , 半径为 R 的定滑轮上绕有细绳. 绳的一端固定在滑轮边上,另一端挂一个质量为 m 的物体而下垂. 忽略轴处摩擦,求物体 m 由静止下落 h 高度时的速度和此刻滑轮的角速度.

解: 选取滑轮、物体和地球为研究系统,在质量为 m 的物体下降的过程中,外力有滑轮轴对滑轮的作用力,其做功为零. 因此,系统只有保守内力,即重力做功,所以机械能守恒.

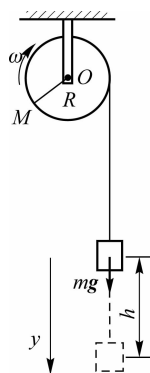


图 3.26 例 3.7 图

大学物理教程

滑轮的重力势能不变, 可以不考虑. 取物体的初始位置为零势能点, 则系统初态的机械能为零, 末态的机械能为

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mg(-h)$$

由机械能守恒定律, 得

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mg(-h) = 0$$

将关系式 $J = \frac{1}{2}MR^2$ 和 $\omega = \frac{v}{R}$ 代入上式, 可得

$$\frac{1}{4}MR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$v^2\left(\frac{M+2m}{4}\right) = mgh$$

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$$

滑轮的角速度为

$$\omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{4mgh}{(2m+M)R^2}}$$

例 3.8 质量 m' , 长度 l 的匀质细杆, 可绕垂直于棒的一端的水平轴 O 无摩擦地转动. 开始时, 细杆静止于铅直位置, 如图 3.27 所示. 今有一质量为 m 的子弹沿水平方向飞来, 射入细杆的下端, 并与杆一起摆到最大角度 θ 处. 求子弹射入细杆前的速度. 不计轴与细杆之间的摩擦.

解: 子弹射入细杆过程, 把子弹和细杆作为一个系统, 系统所受的外力有重力 $(m+m')g$ 、轴对细杆的支撑力 N , 这两个力对轴 O 的力矩为零, 因此系统的角动量守恒. 设子弹射入细杆前的速度为 v_0 , 则有

$$mv_0l = (ml^2 + \frac{1}{3}m'l^2)\omega$$

$$\omega = \frac{3mv_0}{(3m+m')l} \quad (1)$$

在子弹和细杆一起摆动的过程中, 取子弹、细杆与地球作为系统, 此过程只有重力做功, 因此系统的机械能守恒, 取细杆在铅直位置时的质心 C 处为重力势能零点, 则初、末位置的机械能分别为

$$E_0 = \frac{1}{2}(J_{\text{杆}} + J_{\text{弹}})\omega^2 - mg\frac{l}{2}$$

$$E = mgl(1 - \cos\theta) - mg\frac{l}{2} + m'g\frac{l}{2}(1 - \cos\theta)$$

由机械能守恒定律, 得

$$\frac{1}{2}(J_{\text{杆}} + J_{\text{弹}})\omega^2 = mgl(1 - \cos\theta) + m'g\frac{l}{2}(1 - \cos\theta) \quad (2)$$

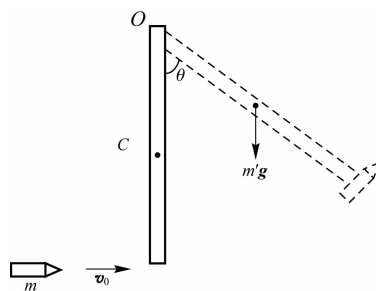


图 3.27 例 3.8 图

联立(1)式和(2)式,而且 $J_{\text{杆}} = \frac{1}{3}m'l^2$, $J_{\text{弹}} = ml^2$, 可得子弹射入细杆前的速度为

$$v_0 = \sqrt{\frac{gl(1 - \cos \theta)(2m + m')(3m + m')}{3m^2}}$$

本章提要

刚体的平动运动规律和定轴转动规律对比.

刚体的平动	刚体的定轴转动
速度 $v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$	角加速度 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
力 \mathbf{F}	力矩 $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
质量 m	转动惯量 $J = \int r^2 dm$
运动定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	转动定律 $M = J\beta$
动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, 动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	动量 $\mathbf{p} = \sum_i \Delta m_i \mathbf{v}_i$, 动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$	角动量 $L = J\omega$
动量定理 $\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$	角动量定理 $M = \frac{d(J\omega)}{dt} = J\beta$
动量守恒 $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$, $\sum_i m_i \mathbf{v} = \text{恒量}$	角动量守恒 $M = 0$, $\sum_i J\omega = \text{恒量}$
动能定理 $A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$	动能定理 $A = \frac{1}{2}J\omega_B^2 - \frac{1}{2}J\omega_A^2$

思考题

- 3.1 对静止的刚体施以外力的作用,如果合外力为零,刚体会不会运动?
- 3.2 一个转动着的飞轮,如不供给它能量,最终将停下来,试用转动定律解释这个现象.
- 3.3 一个刚体在某一力矩作用下绕定轴转动.当力矩增加时,角速度怎样变化?角加速度怎样变化?当力矩减小时,角速度和角加速度又怎样变化?
- 3.4 当刚体转动的角速度很大时,作用在它上面的力及力矩是否一定很大?
- 3.5 就自身来讲,你相对于什么轴时选择什么样的姿势,转动惯量最小或最大?
- 3.6 一个圆盘和一个圆环的半径相同,质量也相同,都可绕过中心而垂直盘面和环面的轴转动,当用同样的力矩从静止开始作用时,问经过相同的时间后,哪一个转得更快?

3.7 如果一个质点在做直线运动,那么质点相对于哪些点的角动量守恒?

3.8 在匀速圆周运动中,质点的动量是否守恒?角动量呢?

3.9 质点在有心力场中的运动具有什么性质?

3.10 为什么质点系动能的改变不仅与外力有关,而且也与内力有关,而刚体绕定轴转动时动能的改变只与外力矩有关,而与内力矩无关?

3.11 下列物理量中,哪些与参考点的选择有关,哪些与参考点的选择无关?

(1)位矢;(2)位移;(3)速度;(4)动量;(5)角动量;(6)力;(7)力矩.

3.12 两个质量相同的球分别用密度为 ρ_1 和 ρ_2 的金属制成,今分别以角速度 ω_1 和 ω_2 绕通过球心的轴转动,试问这两个球的动能之比是多少?

3.13 将一个生鸡蛋和一个熟鸡蛋放在桌上使它们旋转,如何判断它们的生熟?理由是什么?

3.14 圆筒内装有薄厚均匀的冰,绕圆筒中心的轴线转动,不受任何力矩,若冰融化成水,圆筒的角速度如何变化?

3.15 旋转着的芭蕾舞演员要加快旋转时,总要把两臂收拢靠近身体,这样做的目的是什么?当旋转加快时,转动动能有无变化?

习 题

3.1 如图 3.28 所示,在边长为 a 的正方形的顶点上,分别有质量为 m 的四个质点,求此系统绕下列转轴的转动惯量.

(1)通过质点 A 平行于对角线 BD 的转轴;

(2)通过质点 A 垂直于质点所在平面的转轴.

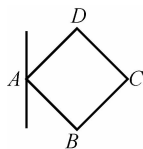


图 3.28 习题 3.1 图

3.2 用落体观察法测定飞轮的转动惯量.如图 3.29 所示,将半径为 R 的飞轮支撑于 O 点上,忽略转轴摩擦.然后在绕过飞轮的绳子的一端挂一质量为 m 的重物,令重物由静止开始下落,带动飞轮转动,记下重物下落的距离 h 和时间 t ,就可计算出飞轮的转动惯量,试写出它的表达式.

3.3 质量为 1.0 kg 的质点在力 $\mathbf{F} = (2t-3)\mathbf{i} + (3t-2)\mathbf{j}$ 的作用下运动,其中 t 是时间,单位为 s , \mathbf{F} 的单位为 N ,质点在 $t=0$ 时位于坐标原点,且速度等于零,求此质点在 $t=2.0 \text{ s}$ 时所受的相对坐标原点 O 的力矩.

3.4 如图 3.30 所示,用轻绳系一质量为 m 的小球,使之在光滑水平面上做圆周运动,开始时,半径为 r_0 ,速率为 v_0 ,绳的另一端穿过平面上的光滑小孔,现用力 \mathbf{F} 向下拉绳,使小球运动半径逐渐减小.试求:

(1)当运动半径缩小至 r 时,小球的速率 v 是多少?

(2)若以速度 \mathbf{u} 匀速向下拉绳,求角速度与时间的关系 $\omega(t)$ 和绳中张力与时间的关系 $\mathbf{F}(t)$.

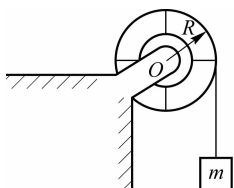


图 3.29 习题 3.2 图

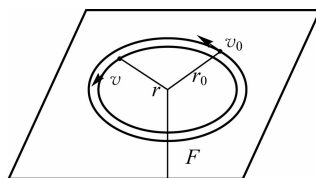


图 3.30 习题 3.4 图

3.5 一转动惯量为 J 的圆盘绕一固定轴转动,起初角速度为 ω_0 ,设它所受的阻力矩与转动角速度成正比,即 $M = -k\omega$ (k 为正的常数),求圆盘的角速度从 ω_0 变为 $\omega_0/2$ 所用的时间.

3.6 质量为 0.5 kg ,长为 0.4 m 的均匀细棒,可绕垂直于棒的一端水平轴在竖直平面内转动. 如果将棒放在水平位置,然后任其自由落下,求:

- (1) 当棒转过 60° 时的角加速度和角速度;
- (2) 下落到竖直位置时的动能;
- (3) 下落到竖直位置时的角速度.

3.7 如图 3.31 所示,刚体由长为 l ,质量为 m 的均匀细杆和一个质量为 m 的小球牢固联结在杆的一端而成,可绕杆的另一端 O 点的水平轴转动. 先将杆拉至水平然后让它自由转下,若轴处摩擦可以忽略. 求:

- (1) 刚体绕 O 轴的转动惯量;
- (2) 当杆与竖直线成 θ 角时,刚体的角速度 ω .

3.8 如图 3.32 所示,圆柱体的质量为 M ,半径为 R ,可绕通过其中心线的固定水平轴转动,原来处于静止状态. 现在有一颗质量为 m 、速度为 v 的子弹击入圆柱体的边缘,求子弹嵌入圆柱体后,圆柱体的角速度 ω .

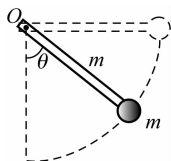


图 3.31 习题 3.7 图

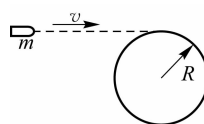


图 3.32 习题 3.8 图

3.9 如图 3.33 所示,长为 l 的均匀细杆,一端悬于 O 点,自由下垂,在 O 点同时挂一单摆,摆长 l ,摆球的质量为 m ,单摆从水平位置由静止开始自由下摆,与自由下垂的细杆作完全弹性碰撞,撞后单摆恰好静止,求:

- (1) 细杆的质量 M ;
- (2) 细杆摆动的最大角度.

3.10 在杂技节目跷板中,演员甲从 h 高的跳台上自由下落到跷板的一端 A ,并把跷板另一端的演员乙弹了起来. 设跷板是匀质的,长度为 l ,质量为 m' ,支撑点在中部 C 点,跷板可绕点 C 在竖直平面内转动,如图 3.34 所示. 演员甲、乙的质量均为 m . 假定演员甲落到跷板上,与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞. 试求:

- (1) 碰后跷板的角速度 ω (也是甲、乙的角速度);

(2) 演员乙被弹起的高度 h' .

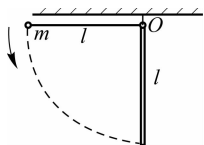


图 3.33 习题 3.9 图

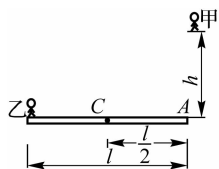


图 3.34 习题 3.10 图

3.11 如图 3.35 所示, 有一半径为 R 的水平圆转台, 可绕通过其中心的竖直光滑轴转动, 转动惯量为 J , 开始时转台以匀角速度 ω_0 转动, 此时有一质量为 m 的人站在转台中心, 随后人沿半径向外跑去, 当人到达转台边缘时转台的角速度为多少?

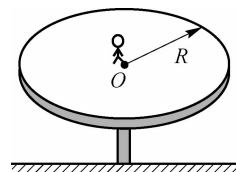


图 3.35 习题 3.11 图

3.12 两滑冰运动员, 质量分别为 $M_A = 60 \text{ kg}$, $M_B = 70 \text{ kg}$, 它们的速率 $v_A = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_B = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 在相距 1.5 m 的两平行线上相向而行, 当两人最接近时, 便拉起手来, 开始沿质心做圆周运动并保持两人之间距离为 1.5 m , 求:

- (1) 系统的总角动量;
- (2) 系统的角速度;
- (3) 两人拉手前、后的总动能. 这一过程中能量是否守恒, 为什么?