第六章

空间向量与空间解析几何简介

在中学数学中，我们已经学习了平面向量和平面解析几何的内容. 比如，方程 $x^2+y^2=1$ 在平面坐标系中，它表示一个单位圆，那么在空间坐标系中，它又表示什么呢?这正是本章将要学习的知识.

本章主要介绍空间直角坐标系、空间向量的概念及运算，重点讲解平面与直线的各种方程及其相互关系，简单介绍空间曲线和曲面的有关知识. 要求掌握空间曲线和曲面的投影曲线，特别是要掌握一些特殊的二次曲面的方程及图形，为学习多元函数的微积分做好准备.

第一节　向　　量

空间向量的知识在工程技术实践中有着广泛的应用，它也是学习空间解析几何的重要工具. 本节将介绍向量的概念、线性运算及坐标表示，并引入空间直角坐标系.

一、向量的概念

在实际生活中我们经常会遇到两种量，一种是只用数值大小表示的量，叫做**数量**或**标量**，如路程、功、质量、温度、长度、面积、体积等. 另一种是既要用数值大小还要用其方向才能表示的量，即既有大小又有方向的量，我们称作**向量**(或**矢量**)，如位移、速度、加速度、力、力矩等.

关于向量的表示，我们采用图 6-1 所示的带有箭头的有向线段表来示，记为$\overrightarrow{AB}$，

称 A,B 依次为向量$\overrightarrow{AB}$ 的始点、终点. 有时向量还可用黑体字母或上方加箭头的字母来表示,如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$(见图 6-2) 或 $\vec{a},\vec{b}$.

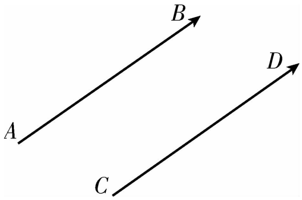

图 6-1

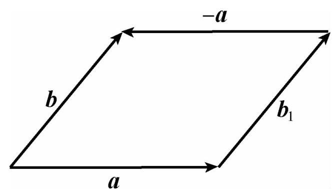

图 6-2

有向线段的长度表示向量的大小,我们称作向量的**模**,向量$\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{a}$ 的模分别记为 $|\overrightarrow{AB}|$,$|\boldsymbol{a}|$. 有向线段的方向表示向量的方向. 在数学上我们只研究与始点无关的向量,并称这种向量为**自由向量**,所以我们将具有相同方向与相等模长的任意两个向量定义为**相等的向量**,它们与向量的始点和终点无关. 如图 6-1 中的向量$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$,虽然它们的始点或终点并不重合,但它们的模相等且方向相同,按定义被认为是两个相等向量,记为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

模为 1 的向量叫做**单位向量**,记为$\overrightarrow{AB}^0$ 或 $\boldsymbol{a}^0$. 模为 0 的向量称为**零向量**,记为 $\boldsymbol{0}$ 或$\vec{0}$. 零向量的方向是不确定的,可看做是任意方向. 若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等,方向相反,就称向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 互为**负向量**,记为 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$. 如图 6-1 中,$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$;如图 6-2 中的 $-\boldsymbol{a}$.

按上面的规定,我们知道两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 只要大小相等、方向相同,它们就是两个相等的向量,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 如图 6-2 中 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1$,也就是说向量在空间中可以任意平行移动.

两向量**平行**:两个非零向量的方向相同或相反.

规定:零向量平行于任何非零向量.

两向量**共线**:把两个向量的始点放在同一点时,这两个向量的终点和公共始点在同一条直线上.

注 两向量平行又称两向量共线.

$k(k\geqslant 3)$ 个向量**共面**:把 k 个向量的始点放在同一点时,这 k 个向量的终点和公共始点在同一个平面上.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,我们定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法运算如下:以空间某一定点为始点

作向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,再以这两个向量为邻边作平行四边形,从始点到这个平行四边形对角的顶点所构成的向量,称为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**和**,记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图6-3).

这种用平行四边形的对角线向量来定义两向量的和的方法,叫做向量加法的**平行四边形法则**.

由于平行四边形的对边平行且相等,所以从图6-3可以看出,还可以有另一种求两个向量和的方法,即先作向量$\boldsymbol{a}$,以$\boldsymbol{a}$的终点为始点作向量$\boldsymbol{b}$,则从$\boldsymbol{a}$的始点到$\boldsymbol{b}$的终点所构成的向量,就是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图6-4),这一方法叫做向量加法的**三角形法则**.

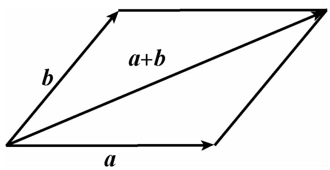

图 6-3

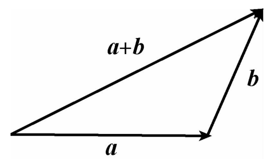

图 6-4

如果两向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$在同一直线上,那么规定它们的和为:当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相同时,和向量的方向与原来两向量的方向相同,其模等于两向量模的和;当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相反时,和向量的方向与较长的向量方向相同,而模等于两向量模之差的绝对值.

如果三个及以上的向量相加,可采用以上的方法分步来求,也可采用多边形法则综合来求.**多边形法则**就是把所有的向量首尾相连,那么,第一个始点与最后一个终点联结所形成的向量就是所求结果.因最后图形为多边形,所以称其为**多边形法则**(如图6-5表示的$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$).

容易验证向量加法满足以下运算规律:

(1) **交换律**:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(见图6-3).

(2) **结合律**:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$(见图6-6).

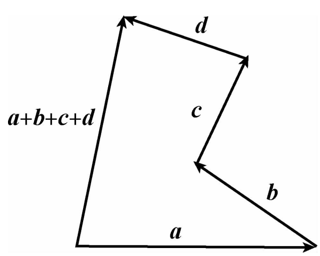

图 6-5

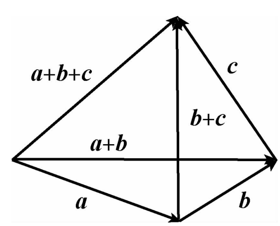

图 6-6

2. 向量的减法

结合负向量的概念,我们规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 同样我们可以通过平行四边形法则和三角形法则来表示两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

在以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形中,以两向量的终点连线、方向指向被减向量的有向线段(即平行四边形的另一对角线)表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(见图 6-7).

在三角形法则中,把向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的始点放在一起,联结两向量的终点、方向指向被减向量的有向线段(即三角形的一条边)表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(见图 6-8).

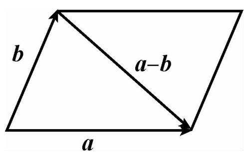

图 6-7

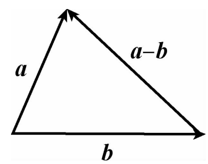

图 6-8

注 向量的减法不适合交换律和结合律.

3. 向量与数的乘法(数乘)

设 λ 是一个数,$\boldsymbol{a}$ 为一向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍为一向量,我们规定:

当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向,$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$;

当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反,$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

由定义即可得向量的数乘满足以下运算规律:

(1) **结合律**:$\lambda(k\boldsymbol{a})=k(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda k)\boldsymbol{a}$.

(2) **分配律**:$(\lambda+k)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}$;$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时,λ 取正值;当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时,λ 取负值,即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减,便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\text{即 }|\lambda-\mu|\cdot|\boldsymbol{a}|=0,$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,故 $|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$.

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，则与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量**，记为 $\boldsymbol{a}^0$，则有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\text{，即 }\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0. \tag{6-1}$$

例 1　设平行四边形 $ABCD$，其中 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$O$ 是对角线的交点. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OD}$（见图 6-9）.

解　$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，

$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

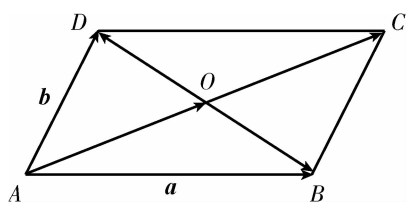

图 6-9

例 2　设等腰梯形 $ABCD$，其中 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\angle A=60°$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{AC}$（见图 6-10）.

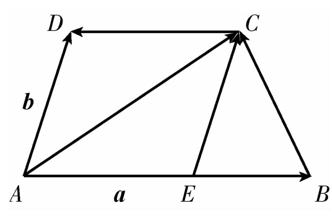

图 6-10

解　作 $EC//AD$ 交 AB 于点 E，因为等腰梯形 $ABCD$，且 $\angle A=60°$，所以 $\triangle BCE$ 为等边三角形，因此有 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{EB}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}^0=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，于是

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EB}=\boldsymbol{b}-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EA}=-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EB})=-\left(\boldsymbol{a}-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right)=\frac{|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}+\frac{|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

三、向量的坐标表示

为了用坐标来表示空间向量,我们首先引入空间直角坐标系.

1. 空间直角坐标系

在平面解析几何中,为了确定平面上任意一点的位置,我们建立了平面直角坐标系,现在,我们为了确定空间任意一点的位置,需要相应地引入空间直角坐标系.

在空间取一定点 O,过点 O 作三条互相垂直的直线 Ox,Oy,Oz. 并按右手系法则规定 Ox,Oy,Oz 的正方向,即右手的大拇指、食指和中指互相垂直,若大拇指指向 Ox 正向,食指指向 Oy 正向,那么,中指就指向 Oz 的正向(见图 6-11). 再规定一个相同的单位长度,这样的三条坐标轴就构成了一个空间直角坐标系,记为 $O-xyz$.

点 O 称为坐标原点,三条直线分别称为 x 轴、y 轴、z 轴. 每两条坐标轴确定一个平面,称为**坐标平面**. 由 x 轴和 y 轴确定的平面称为 ***xOy* 平面**,由 y 轴和 z 轴确定的平面称为 ***yOz* 平面**,由 z 轴和 x 轴确定的平面称为 ***zOx* 平面**. 通常 xOy 平面放置在水平面上,z 轴放在铅直位置,而且由下向上为 z 轴方向. 三个坐标平面将空间分成八个部分,称为八个**卦限**,这八个卦限如图 6-12 所示.

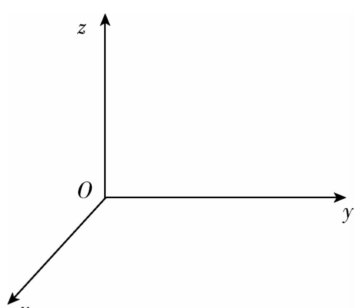

图 6-11

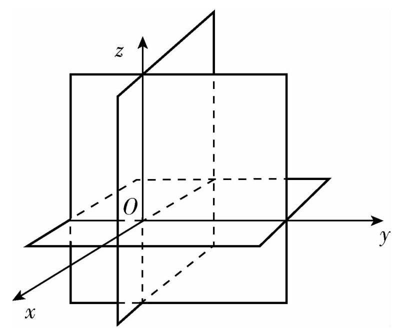

图 6-12

对于空间任意一点 M,过点 M 作三个平面,分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴,且与这三个轴分别交于 P,Q,R 三点(见图 6-13),设这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上依次取坐标为 x,y,z,于是空间一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z). 反之,若已知一有序数组 (x,y,z) 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上依次取坐标为 x,y,z 的点 P,Q,R,并过 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面,则这三个平面交于唯一的一点 M,这样就

建立了空间的点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系，这组数 (x,y,z) 称为点 M 的**坐标**，坐标为 (x,y,z) 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$，又称 x,y,z 分别为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

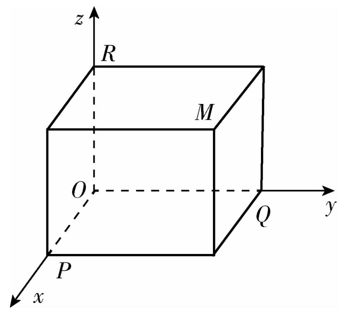

图 6-13

显然坐标原点的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$ 或 $(a,0,0)$；y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$ 或 $(0,b,0)$；z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$ 或 $(0,0,c)$.

给定空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 6-14).

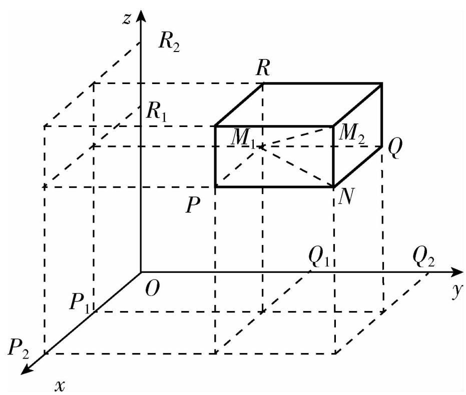

图 6-14

由于 $\triangle M_1NM_2$ 是直角三角形，$\angle M_1NM_2$ 是直角，所以

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2,$$

又 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形，且 $|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$，所以

$$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.$$

而 $|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$，$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$，$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$，于是空间两点 M_1M_2 之间的距离公式：

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{6-2}$$

特别地,点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 间的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{6-3}$$

例 3 求两点 $A(1,0,1)$ 与 $B(2,1,3)$ 之间的距离.

解 $|AB| = \sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(3-1)^2} = \sqrt{6}$.

例 4 在 x 轴上求一点 C,使其与 $A(1,0,1)$,与 $B(2,1,3)$ 的距离相等.

解 设所求点为 $C(x,0,0)$,由已知条件知 $|CA| = |CB|$,即

$$\sqrt{(x-1)^2+(0-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(0-1)^2+(0-3)^2}.$$

化简后得 $x=6$. 所以,C 点的坐标为$(6,0,0)$.

2. 向量的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}$ 为直角坐标系 $O-xyz$ 中的一个向量,将 $\boldsymbol{a}$ 平行移动,使其始点与坐标原点 O 重合,这时终点记为 $M(x,y,z)$. 过点 M 分别作与 x,y,z 轴垂直的三个平面,其交点分别为 P,Q,R(见图 6-15),于是

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

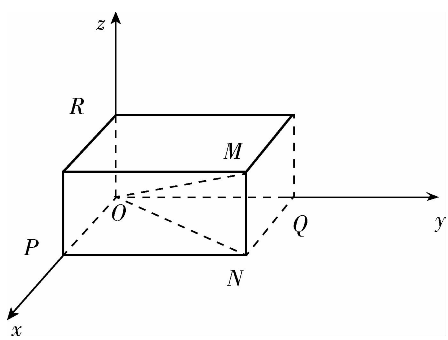

图 6-15

记 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为 x,y,z 轴正向的单位向量,我们称为**坐标向量**,由于点 M 的坐标为(x,y,z),因此,$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$,所以 $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 此式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标分解式**,由空间点与坐标的一一对应关系,我们可以证明 $\boldsymbol{a}$ 的分解式是唯一的,我们把 x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**,记为 $\boldsymbol{a} = \{x,y,z\}$.

若向量为 $\overrightarrow{M_1M_2}$,其始点与终点的坐标分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$. 我们把向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 分别向坐标轴 x,y,z 轴投影(见图 6-14),向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴上的分量为 $\overrightarrow{P_1P_2}$,则 $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ 称为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴上的投影,记作 $\mathrm{Prj}_x\,\overrightarrow{M_1M_2} = |\overrightarrow{P_1P_2}|$,在 y 轴上的投影记作 $\mathrm{Prj}_y\,\overrightarrow{M_1M_2} = |\overrightarrow{Q_1Q_2}|$,在 z 轴上的投影记作 $\mathrm{Prj}_z\,\overrightarrow{M_1M_2} = |\overrightarrow{R_1R_2}|$.

关于向量在轴上投影我们有以下定理.

定理 2　向量$\overrightarrow{AB}$在u轴上的投影等于向量的模乘以轴与向量夹角φ的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi. \tag{6-4}$$

证　如图 6-16 所示，过A引轴u'与u轴平行且有相同的正方向，那么，$\overrightarrow{AB}$与u'轴的夹角也等于φ，且有 $\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB}$，

$$\mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = AB_2 = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi.$$

所以有

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi.$$

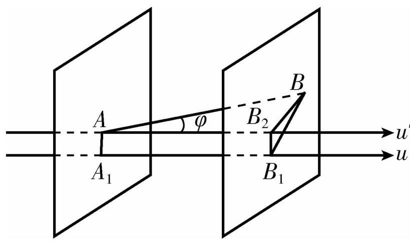

图 6-16

注　① 向量在轴上的投影是一个数，当向量和轴的夹角为锐角时，投影为正；当向量和轴的夹角为钝角时，投影为负；当向量和轴的夹角为直角时，投影为零.

② 两向量相等，它们在轴上的投影也相等.

由图 6-14 可知

$$\mathrm{Prj}_x \overrightarrow{M_1M_2} = |\overrightarrow{P_1P_2}| = x_2 - x_1,$$
$$\mathrm{Prj}_y \overrightarrow{M_1M_2} = |\overrightarrow{Q_1Q_2}| = y_2 - y_1,$$
$$\mathrm{Prj}_z \overrightarrow{M_1M_2} = |\overrightarrow{R_1R_2}| = z_2 - z_1.$$

所以

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \tag{6-5}$$

上式称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标分解式. $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ 称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标，把表达式

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的**坐标表达式**，即

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \tag{6-6}$$

由此可知，向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标就是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在三个坐标轴上的投影. 如果向量的始点和终点坐标已知，则向量的坐标等于终点的坐标减去始点的坐标.

若两向量相等，当且仅当它们的坐标对应相等；若两向量平行，当且仅当它们的

坐标对应成比例.

由于向量与它的坐标一一对应,所以向量的运算可通过向量坐标的代数运算来进行.

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=\{x_1,y_1,z_1\}$,$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=\{x_2,y_2,z_2\}$,$\lambda$ 为常数,由向量定义的几何表示直观得到

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\},\tag{6-7}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\\&=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}.\end{aligned}\tag{6-8}$$

例 5 已知 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,M 分$\overrightarrow{M_1M_2}$ 为定比 λ,即

$$\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}=\lambda\quad(\lambda\neq-1),$$

求 $M(x,y,z)$ 的坐标.

解 因为$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$,而

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\},\overrightarrow{MM_2}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}.$$

于是

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),y-y_1=\lambda(y_2-y),z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

故

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.\tag{6-9}$$

特殊地,当 $\lambda=1$ 时,得中点坐标公式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.\tag{6-10}$$

例 6 已知 $A(1,-2,4)$,$B(-3,1,6)$,求$\overrightarrow{AB}$ 在三个坐标轴上的投影、分向量和坐标表达式.

解 向量$\overrightarrow{AB}$ 的坐标表达式为

$$\overrightarrow{AB}=\{-4,3,2\}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

故向量$\overrightarrow{AB}$ 在三个轴上的投影分别为 $-4,3,2$,分向量依次为 $-4\boldsymbol{i},3\boldsymbol{j},2\boldsymbol{k}$.

下面利用向量的坐标来表示向量的模与向量的方向余弦.

设 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$,如图 6-15 所示,由两点间的距离公式,得向量的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向我们用向量 $\boldsymbol{a}$ 分别与 x,y,z 轴正方向的夹角 α,β,γ 来确定,并将 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**.

在图 6-15 中,由直角 $\triangle POM$,$\triangle OQM$ 及 $\triangle ORM$ 易得

$$\begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{x}{|\overrightarrow{OM}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\beta = \dfrac{y}{|\overrightarrow{OM}|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\gamma = \dfrac{z}{|\overrightarrow{OM}|} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{cases} \tag{6-11}$$

我们称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 容易验证

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{6-12}$$

因为 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\left\{\dfrac{x}{|\boldsymbol{a}|},\dfrac{y}{|\boldsymbol{a}|},\dfrac{z}{|\boldsymbol{a}|}\right\}$,所以 $\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$. 因此,具体计算时常常先算出 $\boldsymbol{a}^0$,便得到 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向余弦,也就知道了 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.

若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间的两个点,则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦为

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\beta=\dfrac{a_y}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\dfrac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\dfrac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.\end{cases} \tag{6-13}$$

例 7　设有两点 $A(1,-1,2)$,$B(-2,1,3)$,求向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 的模和三个方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$.

解　因为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=\{-2-1,1-(-1),3-2\}=\{-3,2,1\}$,所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}.$$

又因为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\sqrt{14}}\{-3,2,1\}=\left\{\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right\},$$

所以 $\cos\alpha=\dfrac{-3}{\sqrt{14}},\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

例 8　已知两点 $A(1,1,1)$,$B(1,2,3)$,求:

(1) $\overrightarrow{AB}$,$|\overrightarrow{AB}|$ 及 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦;

(2) $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量.

解 (1) $$\overrightarrow{AB}=\{1-1,2-1,3-1\}=\{0,1,2\},$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(1-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5},$$

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{0}{\sqrt{5}}=0,\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(2) $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量为

$$\overrightarrow{AB}^0=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{0,1,2\}=\left\{0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

思考

(1) 与三个坐标轴正向夹角相等的向量,其方向角为$\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$,对吗?

(2) 本节我们学习了两个向量的加法和数与向量的乘法运算,那么,两个向量的乘法运算又该如何定义呢?两个向量能进行除法运算吗?为什么?

习题 6-1

(1) 回答下列问题.

① 在空间坐标系中,在坐标轴和坐标面上的点的坐标(原点除外)各有什么特点?

② 点 $M(x,y,z)$ 不在坐标面上,它关于 xOy 面、yOz 面、zOx 面、x 轴、y 轴、z 轴、原点的对称点的坐标各是什么?

③ 向量能比较大小吗?

④ 向量$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$ 与点 $M(x,y,z)$ 是同一概念吗?

⑤ 不等式 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 是否一定成立?为什么?

⑥ 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,下列等式什么时候成立?为什么?

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

(2) 求 A,B 两点间距离.

① $A(1,-2,3)$ 和 $B(2,0,1)$; ② $A(-1,2,1)$ 和 $B(1,1,3)$.

(3) 求点 $M(-1,4,-5)$ 到 x 轴的距离.

(4) 用向量法证明:对角线互相平分的四边形是一个平行四边形.

(5) 设三角形 $\triangle ABC$ 的重心为 O,已知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,求$\overrightarrow{AO}$.

(6) 设一向量始点为 $A(-2,3,0)$,终点为 $B(2,-1,7)$,求它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.

(7) 已知点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

(8) 从点 $A(2,4,7)$ 沿方向 $\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 取 $|\overrightarrow{AB}|=35$，求点 B 的坐标.

第二节　数量积 向量积

关于向量与向量的乘法，根据实际问题的需要，我们定义了向量的两种乘积，即向量的数量积和向量积.

一、向量的数量积

设有一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿直线由点 A 移动到点 B，求力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所作的功 W（见图 6-17).

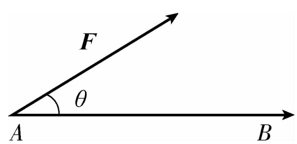

图 6-17

由物理学知识得

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{AB}$ 的夹角.

由上例可见，这是一个由两个向量确定一个数量的运算，关于这一类运算，在实际问题中很多，为此，给出向量数量积的定义.

定义 1　设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们正向间的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则称 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$ 为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（又称**点积**），记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta. \tag{6-14}$$

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\mathrm{Prj}_{a}\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\mathrm{Prj}_{b}\boldsymbol{a}$，所以两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(6-14)式又可表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{a}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{b}\boldsymbol{a}. \tag{6-15}$$

容易验证两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积符合下列运算规律：

(1) **交换律**：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) **分配律**：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) **结合律**：$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

此外,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积还具有如下性质:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 任意两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3) 两个非零向量的夹角余弦可用点积表示,即

$$\cos\theta=\frac{1}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}. \tag{6-16}$$

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

事实上,对于坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,有 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot x_2\boldsymbol{i}+(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot y_2\boldsymbol{j}+(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot z_2\boldsymbol{k}\\&=x_1x_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+y_1y_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+z_1z_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{6-17}$$

从而 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦还可表示为

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{6-18}$$

例 1 已知 $M_1(0,2,-1),M_2(1,0,1),M_3(1,3,2)$,求$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}$.

解 因为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-0,0-2,1-(-1)\}=\{1,-2,2\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{1-0,3-2,2-(-1)\}=\{1,1,3\},$$

所以$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=1\times1+(-2)\times1+2\times3=5$.

例 2 设力 $\boldsymbol{F}=\{1,3,5\}$ 作用在一物体上,物体的位移是 $\boldsymbol{s}=\{2,-1,3\}$,求力 $\boldsymbol{F}$ 对物体做的功 W.

解 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=1\times2+3\times(-1)+5\times3=14$.

例 3 已知三角形的三个顶点为 $A(1,2,2),B(1,1,1),C(1,2,0)$,求证:$\triangle ABC$ 为直角三角形,并求 $\angle A$.

解 $\overrightarrow{AB}=\{1-1,1-2,1-2\}=\{0,-1,-1\}$,

$\overrightarrow{BC}=\{1-1,2-1,0-1\}=\{0,1,-1\}$,

$\overrightarrow{AC}=\{1-1,2-2,0-2\}=\{0,0,-2\}$.

又因为

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0\times0+(-1)\times1+(-1)\times(-1)=0,$$

所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$,即 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 又因为

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\times0+(-1)\times0+(-1)\times(-2)=2,$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2},$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{0^2+0^2+(-2)^2}=2,$$

所以 $\cos\angle A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\angle A=\dfrac{\pi}{4}$.

例 4　在 xOy 坐标面上求向量 $\boldsymbol{b}$,使之与向量 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,2\}$ 垂直,且与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等.

解　设 $\boldsymbol{b}=\{x,y,z\}$,因 $\boldsymbol{b}$ 在 xOy 面上,故 $z=0$,即 $\boldsymbol{b}=\{x,y,0\}$.

又因为 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$,而 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$,所以 $|\boldsymbol{b}|=3$,即有 $x^2+y^2=3^2=9$. 又由 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$,故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\cdot x+(-2)y+2\times 0=x-2y=0$.

由 $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ x-2y=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{6}{\sqrt{5}},\\ y=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{6}{\sqrt{5}},\\ y=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}.\end{cases}$

于是,所求向量 $\boldsymbol{b}=\left\{\dfrac{6}{\sqrt{5}},\dfrac{3}{\sqrt{5}},0\right\}$ 或 $\boldsymbol{b}=\left\{\dfrac{-6}{\sqrt{5}},\dfrac{-3}{\sqrt{5}},0\right\}$.

二、向量的向量积

在研究物体的转动问题时,不但要考虑物体所受的力,而且还要考虑这些力所产生的力矩. 请看下面表达力矩的方法.

设有一杠杆,其支点为 O,有一力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆点 A 处,力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的夹角为 θ(见图 6-18). 由力学知识,我们知道力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$,它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OB}|\cdot|\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\boldsymbol{F}|\sin\theta.$$

而 $\boldsymbol{M}$ 的方向(按右手系法则确定)垂直于 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 所确定的平面.

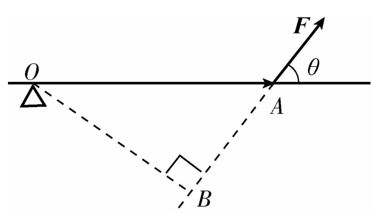

图 6-18

根据此类实际问题研究的需要,我们引入向量积的定义.

定义 2　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,我们定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(又称**叉积**). 向量积是满足下面条件的一个向量,记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,它的模和方向分别为

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\theta$($\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角).

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手规则(见图 6-19),从几何上看 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

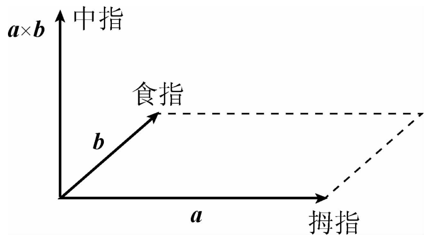

图 6-19

由向量积的定义可知向量积满足以下规律和性质:

(1) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

(2) **结合律**:$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

(3) **分配律**:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

(4) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(5) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

特别地,对坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,有

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$.

下面利用上述性质,给出向量积的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$,$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times x_2\boldsymbol{i}+(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times y_2\boldsymbol{j}+(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times z_2\boldsymbol{k}\\&=(y_1z_2-z_1y_2)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

为便于记忆 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标表示,可借用三阶行列式的记号来表示:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}. \tag{6-19}$$

例 5 设 $\overrightarrow{AB}=\{1,2,-1\}$,$\overrightarrow{CD}=\{1,-1,2\}$,计算 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}$.

解 $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

例 6 求以 $A(1,1,1)$,$B(2,3,2)$,$C(3,3,2)$ 为顶点的三角形的面积 S.

解　$\triangle ABC$ 的面积等于$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ 为邻边的平行四边形面积的一半,而
$\overrightarrow{AB}=\{2-1,3-1,2-1\}=\{1,2,1\}$,$\overrightarrow{AC}=\{3-1,3-1,2-1\}=\{2,2,1\}$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&1\\2&2&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}=\{0,1,-2\}.$$

所以 $S=\dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+(-2)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

例 7　求与向量$\overrightarrow{AB}=\{1,0,-1\}$,$\overrightarrow{CD}=\{1,2,3\}$ 都垂直的单位向量 $\boldsymbol{n}^0$.

解　不妨设 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}$,则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CD}$. 计算得

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\1&2&3\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=\{2,-4,2\}.$$

所以 $\boldsymbol{n}^0=\dfrac{\pm\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\{1,-2,1\}$.

* 三、向量的混合积

定义 3　设有三个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,先对其中两个向量作向量积,然后再用其结果和第三个向量作数量积,最后结果是一个数,我们称 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 为**混合积**,记作$[\boldsymbol{abc}]$,即

$$[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

混合积的几何意义:$[\boldsymbol{abc}]$ 是一个数,它的绝对值等于以向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积的值. 如果 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 符合右手系法则,则混合积为正,否则为负.

事实上,由图 6-20 可知$[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\cos\theta=\pm|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\,h$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 的夹角,h 为两平行底面间的距离. 显然 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 方向的投影为 $\pm h$,θ 为锐角时取正,θ 为钝角时取负. 注意到 $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$ 等于以 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行四边形的面积,所以 $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\,h$ 为以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积的值. 如果 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 符合右手系法则,θ 为锐角,$[\boldsymbol{abc}]>0$;否则,θ 为钝角,$[\boldsymbol{abc}]<0$.

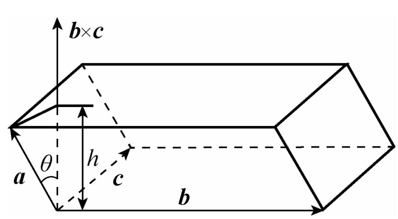

图 6-20

混合积的坐标表示:设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$,则

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{6-20}$$

混合积的性质:

(1) $[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{cab}]=[\boldsymbol{bca}]=-[\boldsymbol{cba}]=-[\boldsymbol{bac}]=-[\boldsymbol{acb}]$.

(2) 三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是$[\boldsymbol{abc}]=0$.

例 8 已知四面体$O-ABC$四个顶点坐标为$A(1,1,1)$,$B(2,3,4,)$,$C(1,3,5)$,$O(2,2,6)$,求四面体的体积.

解 由空间几何知识得知,四面体 $O-ABC$ 的体积等于以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AO}$ 为棱的平行六面体体积的六分之一,因而

$$V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AO}]\right|,$$

即

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=\frac{4}{3}.$$

思考

(1) 向量的数量积、向量积和混合积都是描述向量的乘法运算的,它们有何区别?它们与代数乘法运算又有何区别与联系?

(2) 如何将向量的数量积、向量积和混合积运用于空间几何点、线、面之间关系的描述?

习题 6-2

(1) 分别用向量的数量积、向量积、混合积的定义,验证向量的数量积、向量积、混合积的运算律和性质.

(2) 下列运算是否正确?为什么?

① 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为零向量.

② 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

③ 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,则有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

④ 若 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=1$,且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则有 $|\boldsymbol{c}|=1$.

(3) 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,下列等式是否正确?为什么?

① $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$；② $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}$；③ $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

(4) 下列各式是否有意义？

① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；② $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$；③ $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$；④ $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

(5) 已知 $\boldsymbol{a}=\{-1,2,-2\}$，$\boldsymbol{b}=\{5,2,0\}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(6) 求以 $A(3,4,-1)$，$B(2,0,3)$，$C(-3,5,4)$ 为顶点的三角形面积.

(7) 已知三点 $A(2,2,1)$，$B(2,1,2)$，$C(1,1,1)$，求 $\angle ACB$.

(8) 已知三点 $A(1,-1,2)$，$B(3,3,1)$，$C(3,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 同时垂直的单位向量.

(9) 求向量 $\overrightarrow{AB}=\{4,-3,4\}$ 在向量 $\overrightarrow{CD}=\{2,2,1\}$ 上的投影.

(10) 已知四面体 $ABCD$ 的四个顶点的坐标为 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$，$D(x_4,y_4,z_4)$，求证四面体的体积为

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix},$$

其中的“±”号应选使 $V\geqslant 0$ 的符号.

(11) 试用向量证明三角形的余弦定理.

第三节　平 面 方 程

平面是所有曲面中最简单的一种. 在以下两节里我们将以向量为工具，讨论最简单的曲面和曲线，即平面和直线.

一、平面方程

由空间几何知识可知，通过空间中一点作已知直线的垂面有且只有一个. 因此，我们可以得到平面的点法式方程.

1. 平面的点法式方程

给定空间平面 π，我们把垂直于平面 π 的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 称为平面 π 的**法向量**.

显然，一个平面的法向量有无穷多个.

因为过空间一点能作而且只能作一个平面垂直于已知直线，所以当平面 π 上一点和平面 π 的一个法向量已知时，平面 π 的位置就完全确定了. 下面我们来建立平面

π 的点法式方程.

在直角坐标系 $O-xyz$ 中,设平面 π 经过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 并具有法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$,A,B,C 不同时为零. 那么,由空间几何知识知道:动点 $M(x,y,z)$ 落在平面 π 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$(见图 6-21),即

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0,$$

于是,平面 π 的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{6-21}$$

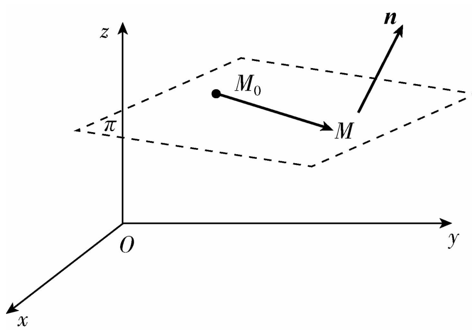

图 6-21

我们可以证明:平面 π 上任意一点的坐标 (x,y,z) 都满足方程(6-21),以方程(6-21)的解为坐标的点一定在平面 π 上. 所以方程(6-21)就是所求平面 π 的方程. (6-21)式称为平面 π 的**点法式方程**. 只要已知平面上一个点的坐标和法向量便可得平面方程.

例 1 求过点 $(-1,-2,3)$ 且以 $\boldsymbol{n}=\{1,2,3\}$ 为法向量的平面方程.

解 所求平面方程为

$$(x+1)+2(y+2)+3(z-3)=0.$$

即 $x+2y+3z-4=0$.

例 2 求通过三点 $A(0,1,2)$,$B(-1,2,3)$,$C(3,-1,2)$ 的平面方程.

解 由向量积的定义可知,$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$,所以 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 垂直于 A,B,C 三点所在的平面. 因此,取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 为所求平面的法向量,而 $\overrightarrow{AB}=\{-1,1,1\}$,$\overrightarrow{AC}=\{3,-2,0\}$,所以

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=\{2,3,-1\}.$$

由点法式方程可得所求的平面方程为

$$2x+3(y-1)-(z-2)=0,$$

即 $2x+3y-z-1=0$.

2. 平面的一般式方程

由前面的讨论知,任一平面都可以用它上面的一点及它的法向量来确定,而平面的点法式方程是 x,y,z 的三元一次方程,那么,三元一次方程与平面之间有何关系呢?

可以证明:三元一次方程与平面之间存在一一对应关系.

事实上,由平面点法式方程的建立过程知,任一平面都可以用三元一次方程式来表示;反之,设三元一次方程为

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{6-22}$$

任取满足该方程的一组解 x_0,y_0,z_0,有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \tag{6-23}$$

将式子(6-22)减去(6-23),得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{6-24}$$

即为平面的点法式方程,故(6-22)式与点法式方程同解,所以(6-22)式也表示一个平面,称(6-22)式为平面的**一般式方程**,其中 A,B,C 就是该平面的一个法向量的三个分量,即 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$.

在平面的一般式方程中,有几种特殊情形需要大家注意:

(1) 当 $D=0$ 时,方程 $Ax+By+Cz=0$ 表示的平面过原点.

(2) 当 $A=0$ 时,方程 $By+Cz+D=0$ 表示的平面平行于 x 轴;

当 $B=0$ 时,方程 $Ax+Cz+D=0$ 表示的平面平行于 y 轴;

当 $C=0$ 时,方程 $Ax+By+D=0$ 表示的平面平行于 z 轴.

(3) 当 $A=B=0$ 时,方程 $Cz+D=0$ 表示的平面平行于 xOy 平面;

当 $A=C=0$ 时,方程 $By+D=0$ 表示的平面平行于 zOx 平面;

当 $B=C=0$ 时,方程 $Ax+D=0$ 表示的平面平行于 yOz 平面.

(4) 方程 $x=0$,$y=0$,$z=0$ 表示的平面分别是 yOz 坐标面,zOx 坐标面和 xOy 坐标面.

例 3　设平面 π 过已知点 $M_0(1,1,2)$,且平行于平面 $2x+3y-z=1$,求平面 π 的方程.

解　因平面 $2x+3y-z=1$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2,3,-1\}$,所以平面 π 的法向量也可取 $\boldsymbol{n}=\{2,3,-1\}$. 故平面 π 的点法式方程为

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-2)=0,$$

即平面 π 的一般方程为

$$2x+3y-z-3=0.$$

例4 求过点 $M_1(a,0,0)$,$M_2(0,b,0)$,$M_3(0,0,c)$ 的平面方程,其中 a,b,c 都不为零.

解 如图 6-22 所示,设所求平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

将 M_1,M_2,M_3 的坐标依次代入得

$$\begin{cases}A\cdot a+D=0,\\ B\cdot b+D=0,\\ C\cdot c+D=0.\end{cases}$$

解得 $A=-\dfrac{D}{a}$,$B=-\dfrac{D}{b}$,$C=-\dfrac{D}{c}$,于是,所求平面的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

其中 a,b,c 是这个平面分别在 x,y,z 轴上的截距,所以称此式为平面的**截距式方程**.

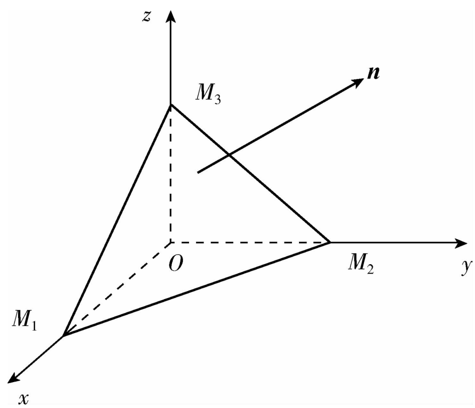

图 6-22

例5 求过不在同一直线上的三点 $A(x_0,y_0,z_0)$,$B(x_1,y_1,z_1)$,$C(x_2,y_2,z_2)$ 所确定的平面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为平面上任意一点,则三向量 $\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ 共面,由向量共面的条件知

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$

这就是所求的平面方程.

二、平面的夹角及点到平面的距离

另外，两个平面的相互关系由它们的法向量之间的关系来决定，称两平面的法向量间的夹角为**两平面的夹角**(通常指锐角).

设平面 π_1 和 π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则两平面的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},\tag{6-25}$$

由两向量垂直、平行的条件可得，平面 π_1 与 π_2 平行的充要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2};\tag{6-26}$$

平面 π_1 与 π_2 垂直的充要条件为

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.\tag{6-27}$$

例 6　求两平面 $x+2y-z+1=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解　由夹角公式得

$$\cos\theta=\frac{|1\times2+2\times1+(-1)\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

故 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

例 7　求过点 $M_0(1,2,-2)$ 且包含 x 轴的平面的方程.

解　设所求平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$.

因为平面过 x 轴，所以 $A=D=0$，故方程为 $By+Cz=0$. 又因为点 M_0 在此平面上，所以 $2B-2C=0$，即 $B=C$.

故所求平面方程为 $By+Bz=0$，即 $y+z=0$.

例 8　设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+C+D=0$ 外的一点，求 M_0 到此平面的距离 d.

解　如图 6-23 所示，在平面上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，并作法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，设$\overrightarrow{M_1M_0}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 夹角为 θ，在 $\mathrm{Rt}\triangle M_0NM_1$ 中，

$$\begin{aligned}d&=\left||\overrightarrow{M_1M_0}|\cos\theta\right|=\left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|\\&=\left|\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\\&=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.\end{aligned}$$

因为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 在平面上,所以 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$,故

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

上式即为**点到平面的距离公式**.

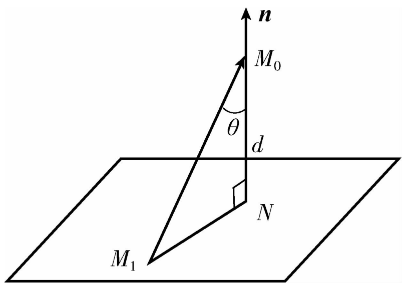

图 6-23

例 9 求满足下列条件的平面方程.

(1) 过点(1,2,1)且垂直于两个平面 $\pi_1: x+y=0$ 和 $\pi_2: 5x+z=0$;

(2) 平行于 y 轴且过点 $P(1,-5,1)$,$Q(3,2,-1)$;

(3) 过三点 $P(0,1,2)$,$Q(1,1,1)$,$R(2,0,1)$;

(4) 过 z 轴且与平面 $\pi: 2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

解 (1) 设所求平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$.

因为 $\pi\perp\pi_1$,$\pi\perp\pi_2$,平面 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{1,1,0\}$,$\pi_2$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\{5,0,1\}$,故取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}=\{1,-1,-5\}=\{A,B,C\},$$

所求平面方程为 $(x-1)-(y-2)-5(z-1)=0$,即 $x-y-5z+6=0$.

(2) 由已知,所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{j}$(平行于 y 轴),且 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PQ}$. 故取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{j}\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 3-1 & 2-(-5) & -1-1\end{vmatrix}$$

$$=-2\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}=\{-2,0,-2\},$$

所求平面方程为 $-2(x-1)+0(y+5)-2(z-1)=0$,即 $x+z-2=0$.

(3) **解法 1** 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,将三点坐标代入,得

$$\begin{cases} B+2C+D=0, \\ A+B+C+D=0, \\ 2A+C+D=0. \end{cases}$$

解得 $B=C=A, D=-3A$，故所求平面方程为 $x+y+z-3=0$.

解法2　因为 P,Q,R 在所求平面上，故所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PQ}, \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PR}$，取

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2-0 & 0-1 & 1-2 \\ 1-0 & 1-1 & 1-2 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\{1,1,1\},$$

于是由点法式方程得所求平面方程为 $(x-0)+(y-1)+(z-2)=0$，即 $x+y+z-3=0$.

(4) 设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$. 因为平面过 z 轴，从而有 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{k}, D=0$，由 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=0$ 得 $C=0$，故所求平面方程可写成 $Ax+By=0$，即

$$x+\frac{B}{A}y=0.$$

由题意得

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1\times2+\frac{B}{A}\times1+0\times(-\sqrt{5})}{\sqrt{1^2+\left(\frac{B}{A}\right)^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-\sqrt{5})^2}}$$

$$=\frac{2+\frac{B}{A}}{\sqrt{1+\left(\frac{B}{A}\right)^2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{2},$$

解得 $\frac{B}{A}=3$ 或 $\frac{B}{A}=-\frac{1}{3}$.

从而，所求平面方程为

$$x+3y=0 \text{ 或 } 3x-y=0.$$

注　建立平面方程的基本方法是点法式，其难点是求平面的法向量，利用向量的向量积运算求平面的法向量是一种常用手段. 当平面平行于(或过)坐标轴、坐标面时，利用平面的一般式则较简单.

思考

(1) 两平面的夹角，在空间解析几何与立体几何中，有何不同？

(2) 确定平面方程的关键是找到平面的法向量，那么，确定平面方程的法向量的方法有哪些？

习题 6-3

(1) 在空间直角坐标系中，三个坐标平面的单位法向量是什么？三个坐标平面的方程是什么？

(2) 已知平面 $Ax+By+Cz+D=0$，系数应满足什么条件下面情形成立？

① 过原点；② 平行于 y 轴；③ 通过 x 轴；④ 平行于 yOz 面.

(3) 求过点 $(1,0,-2)$ 且与平面 $2x-3y+5z=0$ 平行的平面方程.

(4) 求过点 $(1,0,-2)$ 且与向量 $\overrightarrow{AB}=\{3,-1,2\}$ 垂直的平面方程.

(5) 求过三点 $A(1,1,-1)$，$B(-2,-2,2)$，$C(1,-1,2)$ 的平面方程.

(6) 求通过两点 $A(1,1,1)$ 和 $B(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$ 的平面方程.

(7) 求三个平面 $x+3y+z=1$，$2x-y-z=0$，$-x+2y+2z=3$ 的交点.

(8) 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

(9) 分别按下列条件求平面方程.

① 平行于 xOz 面且通过点 $A(2,-5,3)$；

② 通过 z 轴和点 $A(-3,1,-2)$；

③ 平行于 x 轴且过两点 $A(4,0,-2)$ 和 $B(5,1,7)$.

(10) 求点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离.

第四节　空间直线方程

一、空间直线方程

1. 空间直线 L 的一般式方程

空间直线 L 可看做两个平面 π_1 和 π_2 的交线，设两个相交平面的方程分别为 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则称方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{6-28}$$

为空间直线 L 的**一般式方程**.

2. 直线 L 的点向式方程

首先给出直线 L 的方向向量的概念. 直线 L 上任一非零向量 $\boldsymbol{s}$ 称为 L 的**方向向**

量. 显然 L 的方向向量有无穷多个.

在平面解析几何中,我们知道,由直线 L 上一点和直线 L 的方向向量可以确定直线L. 为此,我们引出了直线L的点斜式方程. 在立体几何中已知,过一点可作且只能作一条直线平行于已知直线. 为此,只要知道了直线 L 上的一点和直线 L 的方向向量,就可以确定这条直线. 下面我们来推导该直线的方程.

已知空间直线 L 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及 L 的一个方向向量 $\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$,求直线 L 的方程.

取直线 L 上任意一点为 $M(x,y,z)(M\neq M_0)$,则有 $\overrightarrow{M_0M}\ /\!/\ \boldsymbol{s}$. 根据两向量平行的充要条件,于是有

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{6-29}$$

我们可以证明方程(6-29)就是所求的直线 L 的方程.

方程(6-29)称为直线 L 的**点向式方程**,也称为直线 L 的**标准方程**或**对称式方程**. 其中,当分式中某个分母为 0 时,就理解为其分子也为 0. 方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标 l,m,n 称为直线 L 的一组**方向数**,方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的方向余弦就是直线 L 的**方向余弦**.

3. 直线 L 的参数式方程

直线 L 的参数式方程在今后的学习中经常会用到,请注意学习掌握.

在直线 L 的点向式方程(6-29)中,如果令其比值等于 t,则有

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \ (t\text{ 为参数}), \\ z=z_0+nt \end{cases} \tag{6-30}$$

称方程(6-30)为直线 L 的**参数式方程**.

4. 直线 L 的两点式方程

在平面几何中,我们知道,已知两点可以确定一条直线. 为此,在平面解析几何中引出了直线的两点式方程. 同样,在立体几何中,已知两点也可以确定一条直线. 因此,我们可以推出空间直线 L 的两点式方程.

设 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$ 为直线 L 上的两点,求直线 L 的方程.

取直线 L 上任意一点为 $M(x,y,z)(M\neq A, M\neq B)$,则 M,A,B 同在直线 L 上,故有 $AM\ /\!/\ AB$,即

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{6-31}$$

称方程(6-31)为直线 L 的**两点式方程**.

例 1　求过点 $A(1,0,-2)$ 且与直线 $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{3}$ 平行的直线方程.

解　因已知直线的方向向量为$\{2,1,3\}$，且所求直线与已知直线平行，所以，所求直线的方向向量是$\{2,1,3\}$，故由直线的点向式方程得

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}.$$

例 2　求过两点 $A(1,0,-2)$ 和 $B(3,2,-4)$ 的直线方程.

解　将 $A(1,0,-2)$ 和 $B(3,2,-4)$ 的坐标代入直线两点式方程得

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-2}.$$

关于直线方程几种形式的相互转化，我们重点讨论如何将直线方程的一般式化为点向式. 决定直线方程的是直线 L 上的点和直线 L 的方向向量，为此，需要通过直线的一般式方程，找出直线 L 上的一点和直线 L 的方向向量.

设直线 L 的一般式方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

$\boldsymbol{s}$ 为所求直线 L 的方向向量，$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$，$\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 都垂直，故可取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，由两个向量的向量积坐标表示式得

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}C_1&A_1\\C_2&A_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}\right\},$$

求出方程组(6-28) 的任意一组解 x_0,y_0,z_0，从而得到所求直线 L 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，于是，可得直线 L 的点向式方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1&A_1\\C_2&A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}}.\tag{6-32}$$

例 3　已知直线 L 的一般式方程为$\begin{cases}x-2y+z+4=0,\\2x+3y-2z-6=0,\end{cases}$求它的点向式和参数式方程.

解　先在直线 L 上求一点 M_0. 令 $z=0$，将其代入 L 的方程，得

$$\begin{cases}x-2y+4=0,\\2x+3y-6=0,\end{cases}$$

解得 $x=0,y=2$，即 $M_0(0,2,0)$.

再求直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$，因为直线 L 在所给的两平面上，所以 $\boldsymbol{s}$ 与两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{1,-2,1\}$ 和 $\boldsymbol{n}_2=\{2,3,-2\}$ 都垂直，由向量的向量积定义知，可取直线 L 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}=\{1,4,7\},$$

所以，直线的点向式方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{7}.$$

直线的参数式方程为

$$\begin{cases}x=t,\\ y=4t+2,\ (t\ \text{为参数}).\\ z=7t\end{cases}$$

二、空间直线与直线、直线与平面的位置关系

1. 空间两条直线的夹角

两直线间的夹角是指两直线的方向向量间的夹角（通常指锐角）.

设有两直线 L_1 和 L_2，其点向式方程分别为

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

再设两直线 L_1 和 L_2 的夹角为 θ，则有

$$\cos\theta=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.\tag{6-33}$$

例 4　求直线 $L_1:\frac{x+1}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 和 $L_2:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+3}{-1}$ 的夹角.

解　因为直线 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=\{-2,2,1\}$，直线 L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=\{-1,4,-1\}$. 设直线 L_1 和 L_2 的夹角为 θ，那么，由(6-33) 式得

$$\cos\theta=\frac{|(-2)\times(-1)+2\times4+1\times(-1)|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

2. 空间直线与平面的夹角

由空间几何知识知，**空间直线与平面的夹角**是指直线与它在平面上的投影直线间的夹角（通常指锐角）. 当直线与平面垂直时，直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线 L 和平面 π 的方程分别为

$$L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

$$\pi:Ax+By+Cz+D=0.$$

设直线和平面的夹角为 φ，由直线和平面的夹角定义知，直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$ 和平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\varphi$(见图 6-24)，于是

$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

故

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{6-34}$$

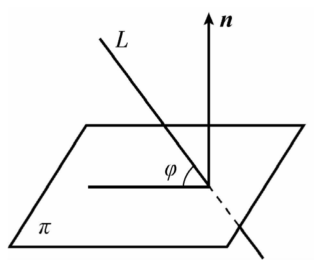

图 6-24

例 5 求直线 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+1}{-1}$ 与平面 $\pi:x-4y+z-4=0$ 的夹角.

解 因为直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{2,-2,-1\}$，平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,-4,1\}$.

设直线 L 和平面 π 的夹角为 φ，由(6-34)式得

$$\sin\varphi=\frac{|1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}\ \sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

3. 空间直线与平面、直线与直线的位置关系

直线与平面的相互关系及直线间的相互关系，我们在空间几何中已经知道，那么，它们如何用代数的方法来表述呢?我们借助向量的知识作桥梁，通过直线的方向向量与平面的法向量之间的关系及两直线的方向向量之间的关系来确定直线与平面的相互关系及直线间的相互关系.

设平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，直线 L 的方程为 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，容易得出直线与平面相互关系的以下结论：

(1) 直线 L 与平面 π 垂直的充要条件是 $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

(2) 直线 L 与平面 π 平行的充要条件是 $Al+Bm+Cn=0$.

设直线 L_1，L_2 的方程分别为：$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ 和 $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$. 容易得出两直线间有以下结论：

(1) 直线 L_1 与直线 L_2 垂直的充要条件是 $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

(2) 直线 L_1 与直线 L_2 平行的充要条件是 $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$.

例 6　判断直线 L：$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$ 与平面 π：$x+2y+5z+1=0$ 的位置关系.

解　直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,2,-1\}$，平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,2,5\}$.

因为 $Al+Bm+Cn=1\times1+2\times2+5\times(-1)=0$，所以由直线 L 与平面 π 平行的充要条件知，直线 L 与平面 π 平行.

例 7　判断直线 L_1：$\frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$ 与直线 L_2：$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2}$ 的位置关系.

解　直线 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=\{0,1,3\}$，直线 L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=\{1,2,2\}$.

因为 $\frac{l_1}{l_2}\neq\frac{m_1}{m_2}\neq\frac{n_1}{n_2}$，所以由直线 L_1 与直线 L_2 平行的充要条件知，直线 L_1 与直线 L_2 不平行.

将 L_1 的方程化为参数式为

$$\begin{cases}x=-1,\\y=t_1+1,\\z=3t_1+2.\end{cases}$$

将 L_2 的方程化为参数式为

$$\begin{cases}x=t_2+1,\\y=2t_2,\\z=2t_2-1.\end{cases}$$

若直线 L_1 与直线 L_2 相交于 P 点，则 P 点的坐标既满足 L_1 的方程，又满足 L_2 的方

程,故有

$$\begin{cases}-1=t_2+1,\\ t_1+1=2t_2,\\ 3t_1+2=2t_2-1.\end{cases}$$

此方程组无解.故直线 L_1 与直线 L_2 不相交.

所以,直线 L_1 与直线 L_2 既不平行,又不相交,一定为异面直线.

*4. 平面束方程

在解题过程中,有时用平面束方程比较方便,下面我们就来介绍平面束方程.

设平面 π_1 和 π_2 为相交的两平面,通过这两平面的交线 L 的所有平面称为由 π_1 和 π_2 所确定的**平面束**(见图 6-25).

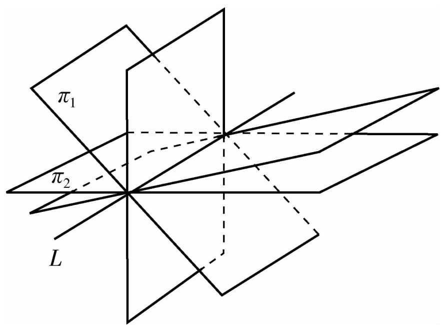

图 6-25

设 π_1 和 π_2 的方程分别为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

则通过它们的交线 L 的平面束方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{6-35}$$

其中 λ 为任意常数.

事实上,(6-35) 式确实表示的是一个平面,因为它是一个三元方程.

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+(D_1+\lambda D_2)=0,$$

其中 x,y,z 的系数不能同时为零,否则将推出 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=-\lambda$,这说明 π_1 和 π_2 平行,与已知两平面 π_1 和 π_2 相交矛盾.

(6-35) 式也确实表示的是通过 L 的平面,因为交线 L 上任一点的坐标都要同时满足 π_1 和 π_2 的方程,因此也必然满足(6-35) 式,故 L 在(6-35) 式表示的平面上.

下面说明通过L的任一平面(除π_2外)均包含在(6-35)式所表示的一簇平面内.

设π是通过L的任一平面(除π_2外),$P_0(x_0,y_0,z_0)$是π上不在L上的一点,则有

$$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2\neq 0,$$

取

$$\lambda_0=-\frac{A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1}{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2},$$

将其代入(6-35)式,得

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1+\lambda_0(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0,\tag{6-36}$$

(6-36)式就是π的方程,因为通过直线L,且过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$.

当$\lambda=0$时,(6-36)式就是π_1的方程.当λ取不同的值时,就得到通过L的除平面π_2外的所有平面.

例 8　求通过平面π_1:$2x+y-z-1=0$和π_2:$3x-2y-2z+2=0$的交线,且与平面π_3:$3x+2y+3z-5=0$垂直的平面方程.

解　设所求平面为

$$2x+y-z-1+\lambda(3x-2y-2z+2)=0,$$

即

$$(2+3\lambda)x+(1-2\lambda)y-(1+2\lambda)z-1+2\lambda=0,$$

其中λ为待定常数.由已知它与π_3垂直,所以

$$3(2+3\lambda)+2(1-2\lambda)-3(1+2\lambda)=0.$$

解得$\lambda=5$,故所求平面方程为$17x-9y-11z+9=0$.

例 9　指出下列直线一般式方程所表示的直线的特点(假设每个方程系数不全为0).

(1) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=0,\\A_2x+B_2y+C_2z=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\B_2y+D_2=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}B_1y+D_1=0,\\C_2z+D_2=0;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}A_1x+C_1z=0,\\A_2x+C_2z=0.\end{cases}$

分析　因为所给的直线方程均为直线的一般式方程,要判断直线的特点,必须从平面的特点出发,根据所给两平面的特点得出其交线的特点.

解　(1)因两平面均通过原点($D_1=D_2=0$),所以直线(交线)也通过原点.

(2)因平面$B_2y+D_2=0$平行于xOz面,所以直线(交线)也一定平行于xOz面.

(3)因两个平面中一个平行于xOz面,另一个平行于xOy面,故它们的交线必定平行于x轴.

(4)因为平面$A_1x+C_1z=0$通过y轴,而平面$A_2x+C_2z=0$也通过y轴,所以它们的交线就是y轴.

例 10　求过平面 $\pi_1: 2x-3y-z+1=0$ 与 $\pi_2: x+y+z=0$ 的交线且与第二个平面垂直的平面方程.

解法 1　过两已知平面交线包含两个条件:一是所求平面通过交线上一点;二是所求平面的法线与交线垂直.

为求交线上一点 A,令 $x=0$,由交线方程解得 $y=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}$,所以点 $A\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$为所求平面上的一点.

设交线的一组方向数为 $\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$,解方程组$\begin{cases}2l-3m-n=0,\\ l+m+n=0,\end{cases}$ 可得 $\boldsymbol{s}=\{2,3,-5\}$.

设所求平面为

$$A(x-0)+B\left(y-\frac{1}{2}\right)+C\left(z+\frac{1}{2}\right)=0.$$

由于它的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 与已知两平面的交线垂直,所以有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$,即

$$2A+3B-5C=0.$$

又由于它与第二个平面 $x+y+z=0$ 垂直,所以它们的法向量相互垂直,从而有

$$A+B+C=0.$$

联立解得 $A=-8C, B=7C$. 于是,所求平面方程为

$$8x-7\left(y-\frac{1}{2}\right)-\left(z+\frac{1}{2}\right)=0, \text{即 } 8x-7y-z+3=0.$$

解法 2　通过平面束的知识来解此题.

因为所求平面 π 与两已知平面 π_1 和 π_2 同时过一条直线,构成平面束. 为此,我们设所求平面方程为

$$2x-3y-z+1+\lambda(x+y+z)=0,$$

即 $(2+\lambda)x+(-3+\lambda)y+(-1+\lambda)z+1=0$. 其中 λ 为待定常数. 又由于所求平面 π 与第二平面 π_2 垂直,于是由其法向量的数量积为零,即

$$1\times(2+\lambda)+1\times(-3+\lambda)+1\times(-1+\lambda)=0,$$

解得 $\lambda=\frac{2}{3}$,故所求平面 π 的方程为

$$8x-7y-z+3=0.$$

注　由此例的两种解法过程可知,第二种解法比较简单,平面束方程的知识有时在解题中会起到事半功倍的作用.

例 11　求点 $P(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影点.

分析　要求点到平面的投影点,只要求出投影直线方程,然后求投影直线与平

面的交点即可.

解　过点 $P(-1,2,0)$ 且垂直于平面 $x+2y-z+1=0$ 的直线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1},\text{即}\begin{cases}x=-1+t,\\ y=2+2t,\ (t\text{ 为参数}).\\ z=-t\end{cases}$$

代入平面方程得

$$(-1+t)+2(2+2t)-(-t)+1=0,$$

解得 $t=-\dfrac{2}{3}$，所以点 $P(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影点为 $\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

例 12　求两异面直线 $L_1:\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ 与 $L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{2}$ 之间的距离.

分析　要求两异面直线间的距离，我们把它转化为求直线到平行平面的距离，此平面过另一直线且与公垂线垂直，所以只要求出公垂线的方向向量，问题即可解决.

解　两直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\{0,1,3\},\boldsymbol{s}_2=\{1,2,2\}.$$

直线 L_1 和 L_2 的公垂线的方向向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{s}_1=\{1,2,2\}\times\{0,1,3\}=\{4,-3,1\}.$$

过直线 L_1 且与公垂线垂直的平面 π 的方程为

$$4(x+1)-3(y-1)+(z-2)=0,$$

即 $4x-3y+z+5=0$. 直线 L_2 上的点 $(1,0,-1)$ 到平面 π 的距离为

$$d=\frac{|4\times1-3\times0+1\times(-1)+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{26}}{13}.$$

这就是所求的两异面直线 L_1 和 L_2 间的距离.

例 13　求点 $M_1(-1,2,7)$ 到直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 的距离 d.

解法 1　过 M_1 且垂直于 L 的平面方程为

$$2(x+1)+(y-2)-(z-7)=0,$$

将 L 的参数方程 $x=1+2t,y=2+t,z=-1-t$ 代入平面方程得 $6t+12=0$，即 $t=-2$. 故 M_1 在 L 上的垂足为 $(-3,0,1)$. M_1 到 L 的距离 $d=2\sqrt{11}$.

解法 2　令 $s=(1+2t+1)^2+(2+t-2)^2+(-1-t-7)^2$，则 $s'=12t+24$，

令 $s'=0$,得 $t=-2$. 又因为 $s''=12>0$,故 $t=-2$ 是 s 的唯一极小值点,从而 M_1 到直线 L 的距离 $d=\sqrt{s_{\min}}=2\sqrt{11}$.

解法 3 在 L 的方程中得直线上的点 $M_0(1,2,-1)$,$\overrightarrow{M_0M_1}=\{-2,0,8\}$,则分别以 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 和直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{2,1,-1\}$ 为邻边的平行四边形的面积为

$$A=|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{s}|=|\{-8,14,-2\}|=2\sqrt{66},$$

另一方面,该面积

$$A=2\sqrt{66}=d\cdot|\boldsymbol{s}|,$$

又因 $|\boldsymbol{s}|=\sqrt{6}$,故有 $d=2\sqrt{11}$.

注 求直线外一点到直线的距离的方法一般有:① 求垂足法,如解法 1;② 求极值法,如解法 2;③ 求面积法,如解法 3.

思考

(1) 设直线 L_1 和直线 L_2 的参数方程分别为

$$L_1:\begin{cases}x=2t,\\y=-3+3t,\\z=4t,\end{cases}\quad L_2:\begin{cases}x=1+t,\\y=-2+t,\\z=2+2t.\end{cases}$$

因为方程组

$$\begin{cases}2t=1+t,\\-3+3t=-2+t,\\4t=2+2t\end{cases}$$

无解,故直线 L_1 和直线 L_2 不相交. 此说法显然是错误的,因为我们可求得两直线的交点为$(0,-3,0)$,请问上述推导错在何处?为什么?

(2) 求过直线 $L:\begin{cases}x+2y+z+1=0,\\x-y+z-2=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi:x+2y+z=0$ 垂直的平面方程.

解 过直线的平面束方程为

$$x+2y+z+1+\lambda(x-y+z-2)=0,$$

即$(1+\lambda)x+(2-\lambda)y+(1+\lambda)z+1-2\lambda=0$,其中 λ 为待定常数. 因所求平面与平面 $\pi:x+2y+z=0$ 垂直,于是有

$$1+\lambda+2(2-\lambda)+(1+\lambda)=0.$$

由此得到恒不等式 $6=0$. 故所求平面不存在. 此解法是否正确?为什么?

习题 6-4

(1) 在空间直角坐标系中，三个坐标轴的方程是什么？三个坐标轴的单位方向向量是什么？

(2) 若直线

$$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

① 过原点；② 平行于 y 轴；③ 与 x 轴重合. 其系数应分别满足什么条件？

(3) 求过点 $A(1,-2,1)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$ 的直线方程.

(4) 求过两点 $A(1,-2,1)$ 和 $B(2,1,-2)$ 的直线方程.

(5) 将下列直线的一般式方程化为点向式方程和参数式方程.

① $\begin{cases}x+2y-3z=4,\\3x-y+5z=-9;\end{cases}$ ② $\begin{cases}x-2z=-5,\\y-6z=7.\end{cases}$

(6) 求过点 $A(2,0,3)$ 并与直线 $\begin{cases}2x-4y+z=1,\\x+3y=5\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=2+4t,\\y=-1-t,\\z=-3+2t\end{cases}$ 都垂直的直线方程.

(7) 求直线 $\begin{cases}5x-3y+3z-1=0,\\3x-2y+z+2=0\end{cases}$ 与直线 $\begin{cases}2x+2y-z+1=0,\\3x+8y+z+12=0\end{cases}$ 的夹角.

(8) 求过点 $A(1,2,1)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 都平行的直线方程.

(9) 求直线 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 和平面 $x-y-z+1=0$ 之间的夹角.

(10) 一个平面通过 $2x+y-4=0$ 及 $y+2z=0$ 的交线，并且垂直于平面 $3x+2y+3z-6=0$，求它的方程.

(11) 判断两直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$ 与 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$ 是否相交，若相交，则求出其交点.

(12) 求点 $A(1,2,3)$ 在直线 $x=y=z$ 上的投影点.

(13) 求过点 $(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

(14) 设 M_0 是直线 L 外一点，M 是直线 L 上任意一点，且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，证明：点 M_0 到直线 L 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

*第五节　曲面方程

前面两节我们学习了空间几何中比较简单的平面和直线方程的建立和位置关系.从本节开始将学习空间几何中更为一般的曲面和曲线方程的建立和图形分析，为多元函数微积分学打好基础.

一、曲面方程的一般概念

在平面解析几何中,我们学习了平面曲线方程的一般概念,把曲线看做动点 $M(x,y)$ 在一定条件下运动的几何轨迹,而这一条件表现为动点 $M(x,y)$ 满足的代数方程.现在我们把空间曲面也看做动点 $M(x,y,z)$ 在一定条件下运动的几何轨迹,而这一条件仍然表现为动点 $M(x,y,z)$ 满足的代数方程,仿照平面解析几何中曲线方程的概念,给出曲面方程的一般定义.

定义 1　在空间直角坐标系中,如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有如下关系:

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足三元方程 $F(x,y,z)=0$.

(2) 以三元方程 $F(x,y,z)=0$ 的解为坐标的点 (x,y,z) 一定是曲面 S 上的点.

则我们称方程 $F(x,y,z)=0$ 为**曲面 S 的方程**,而曲面 S 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

例 1　建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为 R 的球面的方程.

解　设 $M(x,y,z)$ 是球面上任一点,则有 $|MM_0|=R$,所以

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{6-37}$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程,即为所求的球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为 R 的球面方程.

特别地,若球心位于坐标原点,则有

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例 2　设有点 $A(5,2,3)$ 和 $B(2,-3,4)$,求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解　由题意知,所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹.设所求平面上的任何一点为 $M(x,y,z)$,由于 $|AM|=|BM|$,所以

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2},$$

两边平方，化简得

$$6x+10y-2z-9=0,$$

即为所求平面.

通过建立曲面方程的概念，我们就可以用代数的方法来研究空间几何的一些问题. 下面我们来建立在今后学习中常见的曲面方程.

二、母线平行于坐标轴的柱面方程

定义 2　平行于定直线 L 且沿定曲线 C 移动的直线 L' 所形成的曲面叫**柱面**，定曲线 C 叫做柱面的**准线**，动直线叫做柱面的**母线**.

下面来建立母线平行于坐标轴的柱面方程.

不妨设柱面的母线平行于 z 轴，准线是 xOy 面上的曲线 C（见图 6-26），在平面直角坐标系 xOy 中，C 的方程为 $F(x,y)=0$.

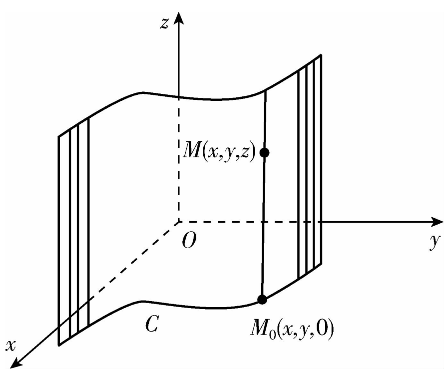

图 6-26

在柱面上任取一点 $M(x,y,z)$，过 M 作平行于 z 轴的直线，此直线交 xOy 面于点 M_0，则 M_0 的坐标为 $M_0(x,y,0)$，M_0 在准线 C 上，即满足方程 $F(x,y)=0$，所以 M 的坐标 $M(x,y,z)$ 满足方程 $F(x,y)=0$.

反之，任一满足方程 $F(x,y)=0$ 的点 $M(x,y,z)$ 一定在过点 $M_0(x,y,0)$ 且平行于 z 轴的直线上，即 $M(x,y,z)$ 在柱面上.

综上所述，方程 $F(x,y)=0$ 就是所求的母线平行于 z 轴的柱面方程.

由此可见，在空间直角坐标系下，母线平行于 z 轴的柱面方程 $F(x,y)=0$ 的特征是：方程中不含有变量 z，其准线是 xOy 平面上的曲线 C：$F(x,y)=0$.

同理，在空间直角坐标系中，$F(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面方程；$F(z,x)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面方程.

例如,$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$是母线平行于$z$轴,准线为$xOy$面上椭圆的**椭圆柱面方程**;$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$是母线平行于$y$轴,准线为$zOx$面上双曲线的**双曲柱面方程**;$z^2=2y$是母线平行于$x$轴,准线为$yOz$面上的抛物线的**抛物柱面方程**.

平面$x-y=0$也可看成母线平行于z轴的柱面,其准线是xOy面上的直线$x-y=0$,所以它是过z轴的平面.

例 3 讨论方程$x^2+y^2=R^2$所表示的曲面.

解 因为方程$x^2+y^2=R^2$中不含变量z,与母线平行于z轴的柱面方程$F(x, y)=0$的特征一致,且与xOy面的交线是圆,所以该方程表示的曲面是圆柱面.

三、旋转曲面方程

设有一条平面曲线C,绕着同一平面的一条定直线L旋转一周,这样由C旋转所形成的曲面称为**旋转曲面**,曲线C称为旋转面的**母线**,定直线L称为旋转曲面的**旋转轴**.

现在,我们求以z轴为旋转轴,以yOz坐标面内一条曲线C为母线旋转一周而成的旋转曲面的方程.

设在yOz坐标面上有一已知曲线C,其方程为$f(y,z)=0$.把曲线C绕z轴旋转一周,就得到一个以z轴为旋转轴的旋转曲面(见图 6-27),下面来建立这个旋转曲面的方程.

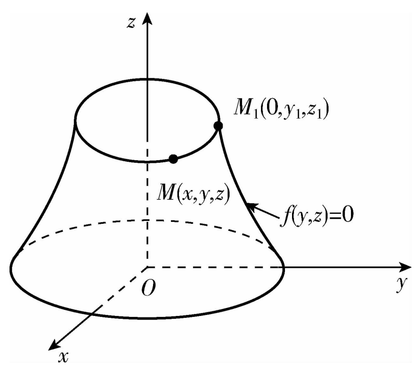

图 6-27

在旋转曲面上任取一点$M(x,y,z)$,过点M作垂直于z轴的平面,则此平面与旋转曲面的交线为一个圆,与曲线C的交点为M_1,其坐标为$(0,y_1,z_1)$,显然,y_1,z_1应

满足方程 $f(y_1,z_1)=0$.

又因为点 M_1 和 M 在垂直于 z 轴的同一个圆上，M_1 又在 yOz 坐标面上，所以有

$$\begin{cases} z_1=z, \\ |y_1|=\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases} \text{即} \begin{cases} z_1=z, \\ y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

所以点 M 的坐标满足方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$，即为所求旋转曲面的方程.

由此得到求旋转面方程的法则：求母线为 yOz 平面上的曲线 $f(y,z)=0$，绕 z 轴旋转所形成的旋转面方程，只需在平面曲线方程 $f(y,z)=0$ 中，把 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 即可.

同理，母线为 $f(y,z)=0$，绕 y 轴旋转所形成的旋转面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

类似地可以得到，在 $xOy(zOx)$ 平面内的曲线绕 x 轴或 y 轴（z 轴或 x 轴）旋转而形成的旋转曲面方程，请读者自己把它们写出来.

例如，(1) yOz 平面上的直线 $z=ay(a>0)$ 绕 z 轴旋转所成的曲面称为**圆锥面**（见图 6-28），其方程为

$$z^2=a^2(x^2+y^2). \tag{6-38}$$

(2) zOx 平面上的抛物线 $z=ax^2(a>0)$ 绕 z 轴旋转所成的曲面称为**旋转抛物面**（见图 6-29），其方程为

$$z=a(x^2+y^2). \tag{6-39}$$

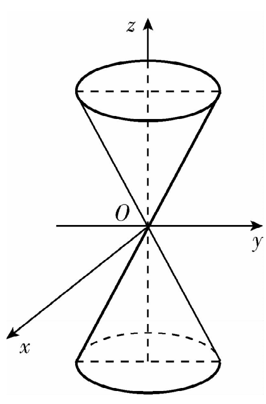

图 6-28

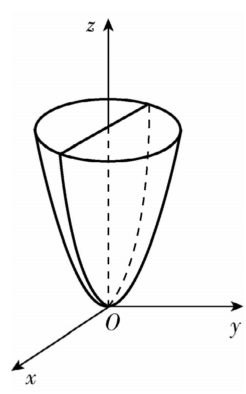

图 6-29

(3) xOy 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 x,y 轴所成的曲面称为**旋转椭球面**，其方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1 \text{ 和 } \frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6-40}$$

例 4 求双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得的旋转曲面方程.

解 绕 x 轴旋转所得的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

绕 y 轴旋转所得的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

例 5 写出下列曲线绕指定轴旋转而生成的旋转曲面方程.

(1) xOy 坐标面上椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 绕 y 轴.

(2) yOz 坐标面上的双曲线$\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$绕 y 轴.

解 (1) 绕 y 轴旋转所得的旋转曲面方程为

$$4(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2+9y^2=36, \text{即 } 4x^2+4z^2+9y^2=36.$$

(2) 绕 y 轴旋转所得的旋转曲面方程为

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1, \text{即} \frac{x^2+z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

四、二次曲面

由前面的讨论可知,球面、柱面和旋转曲面等曲面方程都是三元二次方程,我们称这种三元二次方程所表示的曲面为**二次曲面**. 相应地,称三元一次方程所表示的平面为**一次曲面**.

二次曲面的图形一般较为复杂,很难用描点法绘图. 一般用“平行截割法”来讨论二次曲面的形状,即用与坐标面平行的平面去截割曲面,从所得截痕的形状加以综合来想象这个曲面的形状.“平行截割法”又称“截痕法”.

下面介绍几类常见的二次曲面. 这里不作详细讨论,只将某些曲面的方程和图形给出,供大家在今后学习中参考.

1. 椭球面

如图 6-30 所示,其方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0). \tag{6-41}$$

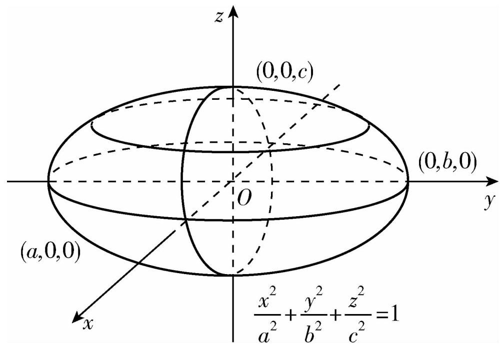

图 6-30

用平行于坐标面的平面去截曲面，得到的截痕都是椭圆. 其截痕的方程分别为以下几种情况：

（1）用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ 去截曲面，截出的曲线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h\end{cases}(\mid h\mid<c).$$

（2）用平行于 xOz 面的平面 $y=h$ 去截曲面，截出的曲线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h\end{cases}(\mid h\mid<b).$$

（3）用平行于 yOz 面的平面 $x=h$ 去截曲面，截出的曲线为

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2}, \\ x=h\end{cases}(\mid h\mid<a).$$

若 $a=b=c$ 就是**球面** $x^2+y^2+z^2=a^2$.

若 $a=b$ 或 $a=c$ 或 $b=c$ 就是旋转椭球面，其方程分别是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

2. 抛物面

1）椭圆抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p\text{ 与 }q\text{ 同号}) \tag{6-42}$$

所表示的曲面称为**椭圆抛物面**（见图 6-31）.

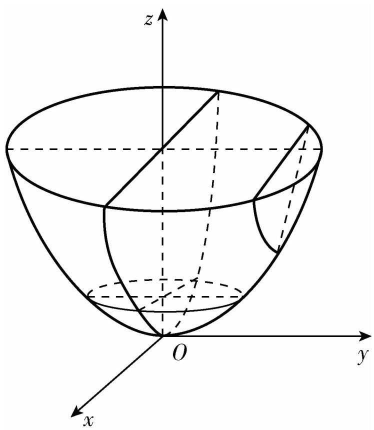

图 6-31

用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ 去截曲面,得到的截痕都是椭圆.用平行于 xOz 面的平面 $y=h$ 去截曲面,或用平行于 yOz 面的平面 $x=h$ 去截曲面,得到的截痕都是抛物线.

若 $p=q$,则方程变为 $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z(p>0)$,即 xOz(或 yOz)平面上的抛物线 $x^2=2pz(y^2=2pz)$ 绕 z 轴旋转所得的**旋转抛物面**.

同理,由方程 $\frac{x^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=y$ 或 $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$($p$ 与 q 同号)所表示的曲面均为**椭圆抛物面**.

2)双曲抛物面

由方程

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p\text{ 与 }q\text{ 同号})\tag{6-43}$$

所表示的曲面称为**双曲抛物面**或**马鞍形面**(见图 6-32).

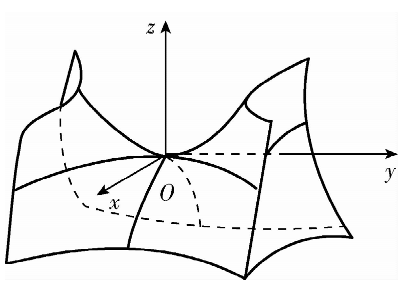

图 6-32

用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ 去截曲面，得到的截痕都是双曲线. 用平行于 xOz 面的平面 $y=h$ 去截曲面，或用平行于 yOz 面的平面 $x=h$ 去截曲面，得到的截痕都是抛物线.

同理，由方程 $-\frac{x^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=y$ 或 $-\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$（$p$ 与 q 同号）所表示的曲面均为**双曲抛物面**.

3. 双曲面

（1）由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0) \tag{6-44}$$

所表示的曲面叫做**单叶双曲面**（如图 6-33 所示）.

用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ 去截曲面，得到的截痕都是椭圆. 用平行于 xOz 面的平面 $y=h$ 去截曲面，或用平行于 yOz 面的平面 $x=h$ 去截曲面，得到的截痕都是双曲线.

同理，方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$ 所表示的曲面都是**单叶双曲面**.

（2）由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1(a>0,b>0,c>0) \tag{6-45}$$

所表示的曲面叫做**双叶双曲面**（见图 6-34）.

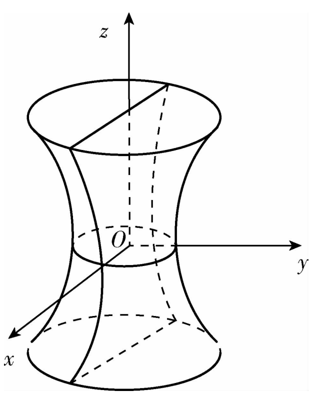

图 6-33

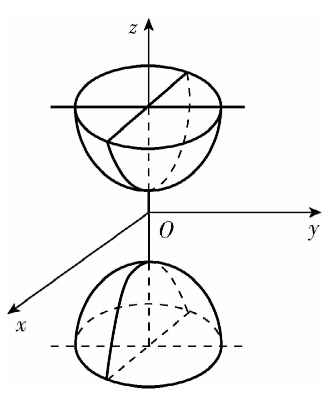

图 6-34

用平行于 xOy 面的平面 $z=h(|h|>c)$ 去截曲面,得到的截痕都是椭圆.用平行于 xOz 面的平面 $y=h$ 去截曲面,或用平行于 yOz 面的平面 $x=h$ 去截曲面,得到的截痕都是双曲线.

同理,方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1(a>0,b>0,c>0)$ 所表示的曲面都是**双叶双曲面**.

4. 二次锥面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0(a>0,b>0,c>0) \tag{6-46}$$

所表示的曲面叫做**二次锥面**(见图 6-28).该方程是二次齐次方程,三个平方项中有两个系数符号相同.

用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ 去截曲面,得到的截痕都是椭圆.用平行于 xOz 面的平面 $y=h$ 去截曲面,或用平行于 yOz 面的平面 $x=h$ 去截曲面,得到的截痕都是双曲线.

当 $a=b$ 时,是旋转曲面,即圆锥面,其方程为 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

同理,方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0(a>0,b>0,c>0)$ 所表示的曲面都是**二次锥面**.

思考

(1) 旋转曲面的定义和方程的特点是什么?

(2) 如何利用“截痕法”来确定二次曲面的形状?

* 习题 6-5

(1) 求以(1,2,−2)为球心,且通过原点 O 的球面方程.

(2) 分别求出母线平行于 x 轴、y 轴及 z 轴,且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程.

(3) 求出下列旋转曲面的方程.

① xOy 面上的抛物线 $y^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面;

② xOz 面上的圆 $x^2+z^2=4$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面;

③ yOz 面上的椭圆$\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$分别绕 y 轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面；

④ xOy 面上的双曲线$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面.

(4) 指出下列方程分别表示什么曲面?

① $x^2+z^2=0$；　② $y^2-z^2=0$；

③ $xyz=0$；　④ $x^2=2z$.

(5) 指出下列方程分别表示什么曲面?若是旋转曲面,是什么曲线绕什么轴旋转而成的?

① $\frac{x^2}{2}+y^2+z^2=1$；　② $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$；

③ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-z=1$；　④ $x^2-y^2=4z$.

(6) 分别写出曲面 $x^2-y^2=3z$ 在下列各平面上的截痕的方程,并指出这些截痕是什么曲线?

① $x=0$；　② $x=1$；　③ $y=0$；

④ $y=2$；　⑤ $z=0$；　⑥ $z=3$.

(7) 指出下列方程所表示的曲面,并作出略图.

① $16x^2+16y^2+9z^2=144$；　② $4x^2+36y^2-4z^2=144$；

③ $x^2+9y^2-z^2+9=0$；　④ $y^2+z^2=2x$；

⑤ $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

*第六节　曲 线 方 程

空间曲线是由两个曲面相交而产生的,由于空间曲面方程的建立和图形绘制较难,为此,空间曲线图形的绘制和方程的建立更难.本节将简单介绍空间曲线的参数式方程和空间曲线在坐标面上的投影曲线方程,供我们在今后的学习中参考.

一、空间曲线及其方程

1. 空间曲线的一般式方程

空间直线可以看做是两个平面的交线,而它的方程可以用这两相交平面方程的联立方程组来表示,同样空间曲线可以看做两个曲面的交线.

设有两个相交的曲面,它们的方程分别是$F_1(x,y,z)=0$,$F_2(x,y,z)=0$.那么联立方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}\tag{6-47}$$

就是它们交线的方程,称(6-47)式为空间曲线的**一般式方程**.

注 ① 曲线方程(6-47)以这种形式表示一条曲线.若把两个方程消去一个未知量,化为一个方程,则该方程表示的就不是空间曲线,而是一个这条曲线所在的柱面.

② 空间曲线的一般式方程表达形式不唯一.因为一条空间曲线可以是两曲面F_1和F_2的交线,也可以是曲面G_1和G_2的交线,而通过该曲线的曲面有无穷多个,为此,它可以看做其中任何两个曲面的交线.但是,当两个曲面确定后,其交线是唯一确定的.

例 1 求以$(1,-2,3)$为球心,3为半径的球面与平面$z=5$交线的方程,这是一条什么曲线?

解 由已知可得,给定球面的方程为

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9,$$

所以所求交线的方程为

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9,\\z=5,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=5,\\z=5.\end{cases}$$

由此可知,交线为在平面$z=5$上,以$(1,-2)$为中心,$\sqrt{5}$为半径的圆周.

2. 空间曲线的参数式方程

空间曲线的参数式方程是我们在学习多元函数积分学时要用到的,但其方程的建立比较麻烦,我们这里只简单介绍只有一个参变量的参数方程.

如果曲线C上的点$M(x,y,z)$的坐标可以表示为某个变量t的函数,即

$$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta].\\z=z(t),\end{cases}\tag{6-48}$$

当t在$[\alpha,\beta]$上每取一个值时,就得到曲线C上的一个点$M(x,y,z)$,而t由α变到β时就得到曲线C上的所有点.则(6-48)式称为曲线C的**参数式方程**,其中t称为参数.

例 2 设空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以匀角速度ω绕z轴旋转,同时又以匀线速度v沿平行于z轴的正方向上升(其中ω,v都是常数),那么,此点M的运

动轨迹习惯称为**螺旋线**. 试建立螺旋线的参数方程.

解　取时间 t 为参数. 设当 $t=0$ 时,动点位于轴上一点 $A(a,0,0)$ 处. 经过时间 t,动点 M 运动到 $B(x,y,z)$(见图 6-35). 由已知条件可得参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \\ z = vt \end{cases} (t \text{ 为参数}).$$

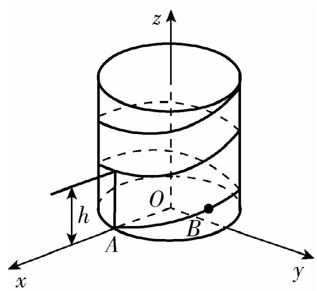

图 6-35

如果取 $\theta=\omega t$ 为参数,并设 $b=\dfrac{v}{\omega}$,则有

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}).$$

由此可知,曲线的参数方程不唯一,它与参数的选取有关,这里不作详细介绍.

二、空间曲线在坐标面上的投影

设在空间直角坐标系中有一条曲线 C',过 C' 作母线平行于 z 轴的柱面,与 xOy 平面的交线为 C,则称 C 为曲线 C' 在 xOy 面上的**投影曲线**(见图 6-36).

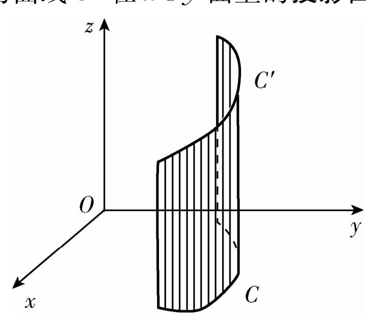

图 6-36

下面来建立空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

设空间曲线 C' 的方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{6-49}$$

为求 C' 在坐标面 xOy 面上的投影曲线方程,现从(6-49)中消去 z 后,得方程

$$H(x,y)=0, \tag{6-50}$$

这正是母线平行于 z 轴的柱面方程. 由于它是从(6-49)式中得出,为此,在曲线 C' 上的点,其坐标必满足(6-49),从而也一定满足 $H(x, y)=0$,所以,这个柱面是以曲线 C' 为准线的柱面,我们称其为**投影柱面**. 它与 xOy 坐标面的交线 C 的方程为

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases} \tag{6-51}$$

即为空间曲线 C' 在 xOy 坐标面上的**投影曲线方程**.

同理,从(6-49)式中消去 x 或 y,分别得投影柱面方程 $G(y,z)=0$ 或 $R(x,z)=0$,再分别与 $x=0$ 或 $y=0$ 联立,即可得曲线 C' 在坐标面 yOz 面或 zOx 面上的投影曲线方程分别为

$$\begin{cases} G(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} R(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

例 3 求两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$ 的交线在 xOy 面上的投影方程.

分析 要求曲线在坐标面上的投影曲线方程,只要找到投影柱面方程,然后与坐标面方程联立即可. 而投影柱面方程只需要将曲线方程消去一个相应的未知量即可.

解 将曲线方程

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$

中未知量 z 消去. 方程组中两方程相减得 $x+z=1$,即 $z=1-x$,将其代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 得投影柱面方程为

$$2x^2+y^2-2x=0.$$

于是,两球面的交线在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-2x=0, \\ z=0. \end{cases}$$

最后,我们通过例题来说明,空间解析几何中由方程来描绘空间区域的方法. 它在今后多元函数积分学中经常用到,要仔细体会.

例 4　描绘由 $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y \leqslant 1, y^2+z^2 \leqslant 1$ 所围成的立体图形.

解　在空间解析几何中,不等式关系描述了曲线上(下)方或内(外)的区域,为此,我们在空间直角坐标系中只要描绘出相应方程的图形,就可得到所描绘的空间区域.

方程 $x+y=1$ 表示过点 $(1,0,0)$ 和点 $(0,1,0)$ 且平行于 z 轴的平面.

$x+y \leqslant 1$ 表示以 $x+y=1$ 为界,且包含原点的那个半空间.

方程 $y^2+z^2=1$ 表示以坐标面 yOz 面上的圆 $y^2+z^2=1$ 为准线,母线平行于 x 轴的圆柱面.

于是 $y^2+z^2 \leqslant 1$ 表示这个圆柱面所围成的内部及其表面.

直圆柱面 $y^2+z^2=1$ 在平面 $x=0, y=0, x+y=1$ 上的截线分别是圆、直线和椭圆;平面 $x+y=1$ 在平面 $y=0$ 和 $z=0$ 上截线都是直线,把这五条截线作出来,就可得所求的立体图形(见图 6-37).

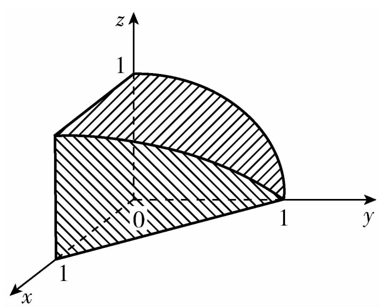

图 6-37

思考

(1) 如何求空间曲线在坐标面上的投影曲线方程?应注意什么?

(2) 描绘由曲线方程所围成的立体区域时,应注意什么?

* 习题 6-6

(1) 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与柱面 $x^2+2y^2=1$ 的交线方程.

(2) 求锥面 $x^2+2y^2-z^2=0$ 与平面 $x+y=1$ 的交线方程,并指出其交线的形状.

(3) 指出下列方程所表示的曲线.

① $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1, \\ y=0; \end{cases}$　　② $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=36, \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=25; \end{cases}$

③ $\begin{cases} y^2+z^2-2x=0, \\ y=2; \end{cases}$　　④ $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \\ z=2. \end{cases}$

(4) 求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y=1$ 的交线在 xOz 面上的投影曲线方程,并指出其形状.

(5) 求曲线

$$\begin{cases} x^2+z^2-3y=0, \\ z=1 \end{cases}$$

在 xOy 面上的投影曲线方程,并指出原来的曲线是什么曲线?

(6) 画出下列曲面所围成的立体图形.

① $3x+2y+z=6, x=0, y=0, z=0$;

② $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, z=1$;

③ $z=x^2+y^2, z=2$;

④ $y=x^2, y=2, z=0, z=2$.

本章小结

一、基本内容

(1) 向量的有关知识不仅是学习空间解析几何的必备内容,也是学习大学物理、理论力学等课程所必需的数学基础知识. 不仅要掌握向量的概念、运算及向量在轴上的投影,更要掌握向量的坐标表示,向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

要熟记向量的模、方向余弦、单位向量等表达式,即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2};$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|};$$

$$\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

(2) 理解两向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的数量积和向量积的定义,掌握其坐标表达式.

两向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}, \boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ 的数量积是一个数,它等于

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),$$

其坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

两向量的向量积 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，它满足：

① $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\widehat{,}\boldsymbol{b})$；

② $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$；

③ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 符合右手系法则.

其坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

(3) 两向量的数量积和向量积的应用：

① 求以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形面积，$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$；

② 求力 $\boldsymbol{F}$ 作用于物体，通过位移 $\boldsymbol{s}$ 所做的功，$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$；

③ 求力 $\boldsymbol{F}$ 作用于物体绕通过 O 的轴转动产生的力矩，

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{F},$$

其中 A 为力的作用点.

(4) 两非零向量平行与垂直的条件：

① $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$；

② $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

(5) 熟记下列概念和公式：

① 曲面方程；② 柱面方程；③ 旋转曲面方程；④ 曲线方程；⑤ 空间曲线向坐标面作的投影柱面和投影曲线方程.

(6) 对平面方程要掌握点法式和一般式的内容. 在点法式中要抓住平面的法向量与方程的关系，它是我们建立平面方程的首选形式，即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}.$$

对平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

要注意系数 A,B,C,D 与平面的位置关系，一些特殊情形时，A,B,C,D 各取何值.

(7) 利用向量知识解决立体几何中的夹角、距离和位置关系的判定等几何问题.

(8) 要掌握直线的方程，就要抓住直线的方向向量，建立直线方程的首选形式是点向式，即

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}.$$

对直线方程的一般式、点向式和参数式方程要会互化.

(9)要熟悉二次曲面及其图形,特别是球面、椭球面、柱面、椭圆抛物面、二次锥面等曲面及其方程.

几种常见的二次曲面及其方程如下:

① 球面:$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$;

② 椭球面:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

③ 单叶双曲面:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

④ 双叶双曲面:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

⑤ 椭圆抛物面:$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$($p$, q 同号);

⑥ 双曲抛物面:$\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}=z$($p$, q 同号);

⑦ 圆锥面:$z^2=a^2(x^2+y^2)$;

⑧ 母线平行于 z 轴的柱面:$F(x,y)=0$;

母线平行于 x 轴的柱面:$F(y,z)=0$;

母线平行于 y 轴的柱面:$F(x,z)=0$;

⑨ 曲线C:$\begin{cases} f(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周产生的旋转曲面方程:$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$,绕 y 轴旋转一周产生的旋转曲面方程:$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

二、重点

(1)向量的概念、向量的坐标及坐标表示、两向量的数量积和向量积的定义及坐标表示,两向量平行与垂直的条件.

(2)掌握旋转曲面方程、母线平行于坐标轴的柱面方程、平面的点法式方程、直线的点向式方程.

(3)两直线、两平面、直线与平面的平行与垂直的条件.

(4)球面、椭球面、椭圆抛物面、二次锥面的方程及图形等.

三、难点

(1)向量积的概念、坐标表示及应用.

(2)空间曲线在坐标面上的投影柱面和投影曲线方程.

(3)直线与平面的综合问题.

(4)画曲面围成的立体图形.

复习题六

(1) 选择题.

① 关于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的正确论断是(　　).

A. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　B. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$　　D. $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$

② 平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{2\sqrt{2},-5,4\}$ 的单位向量是(　　).

A. $\left\{\dfrac{2\sqrt{2}}{7},-\dfrac{5}{7},\dfrac{4}{7}\right\}$　　B. $\left\{-\dfrac{2\sqrt{2}}{7},-\dfrac{5}{7},-\dfrac{4}{7}\right\}$

C. $\left\{\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{7},\mp\dfrac{5}{7},\pm\dfrac{4}{7}\right\}$　　D. $\left\{\mp\dfrac{2\sqrt{2}}{7},\mp\dfrac{5}{7},\pm\dfrac{4}{7}\right\}$

③ 已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的终点 $M_2(3,5,-1)$,且 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=3\sqrt{11}$,又 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{\sqrt{11}}$,$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$,$\cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{11}}$,则点 M_1 的坐标为(　　).

A. $(-12,2,2)$　　B. $(12,-2,2)$

C. $(-12,-2,2)$　　D. $(12,2,2)$

④ 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是(　　).

A. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$　　B. $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

C. $\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$　　D. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

⑤ 向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的夹角是(　　).

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$

⑥ 过点 $M(-3,5,2)$ 且垂直于直线 L: $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{5}$ 的平面方程是(　　).

A. $-2x+3y+5z+31=0$　　B. $-2x+3y+5z-21=0$

C. $2x-3y-5z+31=0$　　D. $2x+3y+5z-19=0$

⑦ 过点 $M(1,-1,5)$ 且垂直于直线 L: $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-1}{-3}$ 的平面方程是(　　).

A. $4(x-1)+5(y+1)-3(z-5)=0$

B. $5(x-1)-3(y+1)+4(z-5)=0$

C. $4(x+1)-(y-3)+5(z-1)=0$

D. $x-1-(y+1)+5(z-5)=0$

⑧ 直线 $L:\frac{x}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{5}$ 与平面 $\pi:x+4y+2z=7$ 的位置关系是(　　).

A. 垂直　　B. 平行

C. 斜交　　D. 重合

⑨ 方程 $x^2+y^2-z^2=0$ 表示的曲面是(　　).

A. 球面　　B. 圆锥面

C. 圆锥抛物面　　D. 柱面

⑩ 下面方程中不是旋转曲面的是(　　).

A. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}=1$　　B. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=z$

C. $x^2-2y^2+z^2=0$　　D. $(z-a)^2=x^2+y^2$

(2) 填空题.

① 已知 $A(3,2,8)$,$B(2,-1,0)$,则$\overrightarrow{AB}=$________.

② 已知 $M_1(\sqrt{3},2,1)$,$M_2(0,5,-2)$,则向量$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模$|\overrightarrow{M_1M_2}|=$________,$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦________.

③ 设 $\boldsymbol{a}=\{3,-2,5\}$,$\boldsymbol{b}=\{0,3,-4\}$,$\boldsymbol{c}=\{1,1,1\}$,$3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直,则 $\lambda=$________.

④ 设 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$,且均为非零向量,则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$________,$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=$________.

⑤ 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$________.

⑥ 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,则 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=$________.

⑦ 过点 $M(-1,0,2)$,且与直线$\frac{x}{-1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-5}$ 垂直的平面方程是________.

⑧ 过点 $M_1(3,1,2)$,$M_2(0,-1,-2)$ 的直线方程是________.

⑨ 过点 $M(-1,2,2)$ 及 x 轴的平面方程是________.

⑩ xOy 平面的曲线 $z=x^2-3$ 绕 z 轴旋转一周,所得旋转曲面方程是________.

(3) 已知 $A(1,-2,1)$,$B(3,-3,2)$,$C(1,4,-2)$,求与$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$ 同时垂直的单位向量.

(4) 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,求:

① $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$;　② $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;　③ $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

(5) 设 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$,求$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

(6) 已知 $\boldsymbol{b}=\{3,1,4\}$,向量 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$、垂直于 x 轴,且 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{17}$,求向量 $\boldsymbol{a}$.

(7) 一个平面过点$(2,-1,1)$,且平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{1,3,-3\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{0,2,-1\}$,求此平面方程.

(8) 求过点(5,2,4)且与平面 $5x+3y-2z=7$ 垂直的直线方程.

(9) 求直线 $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-5}$ 与平面 $x-y+3z=11$ 的交点.

(10) 将 xOz 坐标面上的抛物线方程 $x^2=4z+1$ 绕 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面方程.

(11) 指出下列各方程所表示的曲面.

① $(z-a)^2+y^2=a^2$;　　② $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$;

③ $y=3x+2$;　　④ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{5}=1$;

⑤ $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$;　　⑥ $16x^2+4y^2-z^2=64$.

(12) 求直线 $\begin{cases}x+y+3z=0,\\x-y-z=0\end{cases}$ 和平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

(13) 求平面 $2x-2y+z-1=0$ 与平面 $z=0$ 的夹角.

(14) 在一切过直线 L:$\begin{cases}x+y+z+4=0,\\x+2y+z=0\end{cases}$ 的平面中找出平面 π,使原点到它的距离最长.

(15) 求直线 L_1:$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 与 L_2:$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{0}$ 之间的距离.

(16) 求过点 $A(-1,0,4)$,且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$,又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

(17) 求点 $A(3,1,-1)$ 在平面 π:$3x+y+z-20=0$ 上的投影点.

(18) 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线 C 在 xOy 面上的投影曲线方程.

(19) 画出下列各曲面所围成的立体图形.

① 由 $z=xy$,$x+y=1$,$z=0$ 所围成的图形;

② 由 $z=x^2+2y^2$,$z=2-x^2$ 所围成的图形;

③ 由 $z=0$,$z=y$,$y=1$,$y=x^2$ 所围成的图形;

④ 由 $z=x^2+y^2$,$z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 所围成的图形.

第七章

多元函数微分学

在前边所学的内容中我们所讨论的函数只有一个自变量，称为一元函数，但在许多实际问题中，所遇到的函数的自变量往往是两个或两个以上，这一类函数称为多元函数. 在多元函数的研究中，我们以二元函数为主，研究其极限、连续、导数、微分和积分学，二元函数的微积分学与一元函数微积分学有些结论是不同的，不能照搬使用，学习时要注意其区别与联系. 二元以上的函数的微积分学，与二元函数微积分学类似，可将二元函数微积分学的结论推广至更多元的函数，这里不再赘述.

本章将在一元函数微分学的基础上讨论多元函数的微分学，主要包括多元函数的概念及二元函数的极限和连续、偏导数、全微分及其应用，重点讲解求解二元函数的偏导数和全微分的方法及其在几何上的应用.

第一节　多 元 函 数

一、多元函数的概念

1. 预备知识

在上册我们研究一元函数的微积分学时，其概念、理论和方法都是基于一维空间中(即数轴上) 的点集、两点间距离、区间和邻域等概念，为了将一元函数的微积分学推广到多元函数的情形，必须将上述概念加以推广，以供我们研究多元函数时使用.

1）平面点集和 n 维空间

平面点集是指平面上满足某个条件 P 的一切点构成的集合. 在平面解析几何中，平面上的点与有序二元实数组之间建立了一一对应，由此可借助于平面坐标来描述平面点集.

例如，平面上以原点为中心，以 1 为半径的圆的内部就是一个平面点集(见图 7-1)，它可表示成

$$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

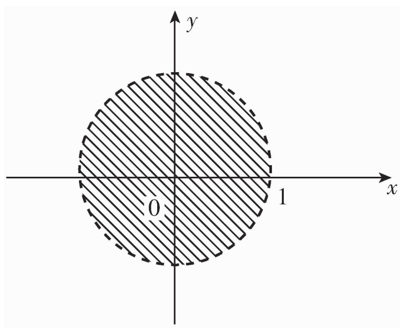

图 7-1

由平面解析几何我们还知道，平面上任意两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 之间的距离公式为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

在空间解析几何中，我们同样建立了空间中的点与有序三元实数组之间的一一对应关系，也可用空间坐标来描述空间点集.

例如，空间中以原点为球心，2 为半径的球面上的点构成的点集，可表示为

$$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

由空间解析几何知道，空间中任意两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_1)$ 之间的距离公式为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

上面我们把一维空间的点集和距离概念推广到二维空间 $\mathbf{R}^2$(平面点集）和三维空间 $\mathbf{R}^3$(空间点集). 类似地，我们可以把这个概念推广到 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所组成的集合 $\mathbf{R}^n$，称为 ***n* 维空间**，n 维空间中的点 P 与 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 之间建立了一一对应关系，可用 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来表示 n 维空间中的点 P，其中 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为点 P 的坐标.

n 维空间中任意两点 $P_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$P_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}. \tag{7-1}$$

下面研究的有关内容均建立在二维空间$\mathbf{R}^2$的基础上,其结论可推广到$\mathbf{R}^n$中去.

2) 邻域

设$P_0(x_0,y_0)$是平面上一点,$\delta>0$,以P_0为中心,δ为半径的圆的内部点$P(x,y)$的全体构成的点集,叫做点P_0的δ**邻域**,记作$U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在点P_0的δ邻域内,如果去掉中心点P_0,则称为点P_0的δ**去心邻域**,记作$\mathring{U}(P_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

3) 内点、外点、边界点

(1) 内点:设E是平面点集,P是平面上一点,如果存在P的某一邻域,此邻域内的点都属于E,则称点P为点集E的**内点**(见图7-2).

(2) 外点:设E是平面点集,P是平面上一点,如果存在P的某一邻域,此邻域内的点都不属于E,则称点P为点集E的**外点**(见图7-3).

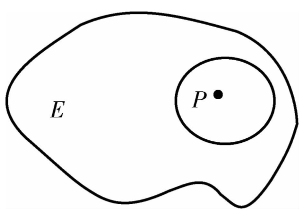

图 7-2

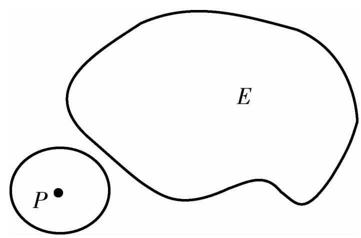

图 7-3

(3) 边界点:设E是平面点集,P是平面上一点,如果P的任一邻域内既有属于E的点,又有不属于E的点,则称点P为点集E的**边界点**(见图7-4).E的边界点的全体称为E的**边界**.

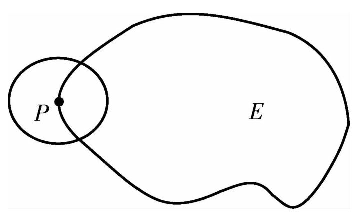

图 7-4

例如,单位圆内的点都是圆的内点,单位圆上的点都是圆的边界点,单位圆外的

点都是圆的外点，单位圆周为圆的边界.

注　边界点可能属于点集 E，也可能不属于点集 E.

4）开集和连通集

如果集合 E 中的每个点都是内点，则称 E 是**开集**. 对于开集 E，如果 E 中的任何两点，都可以用 E 中的折线联结起来，则称 E 是**连通集**.

5）区域和闭区域

连通的开集 E 称为**区域**或**开区域**. 开区域 E 连同它的边界一起称为**闭区域**.

在不混淆的情况下，开区域和闭区域统称为区域.

6）有界区域和无界区域

对于平面区域 E，如果存在某一正数 r，使得

$$E \subset U(O,r),$$

其中 O 是坐标原点，则称区域 E 为**有界区域**. 否则，称区域 E 为**无界区域**.

例如，区域 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 是有界区域；区域 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是有界闭区域；区域 $E=\{(x,y)\mid x+y<1\}$ 是无界区域；区域 $E=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1\}$ 是无界闭区域. 有界闭区域是我们今后学习中常用的.

2. 二元函数的定义

1）实例引入

例 1　三角形的面积 S 和它的底边长 a，底边上的高 h 之间有关系式 $S=\dfrac{1}{2}ah$. 其中 S,a,h 是三个变量，当变量 a,h 在一定范围（$a>0,h>0$）内取定一对数值（a_0，h_0）时，根据给定的关系 S 就有一个确定的值 $S_0=\dfrac{1}{2}a_0h_0$ 与之对应.

例 2　设 R 是电阻 R_1,R_2 并联后的总电阻，由电学知识可知，它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

这里，当 R_1,R_2 在集合 $\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$ 内取定一对值 (R_1,R_2) 时，R 的对应值就随之确定.

例 3　设 Z 表示居民人均消费水平，Y 表示国民收入总额，P 表示总人口数，则有 $Z=S_1S_2\dfrac{Y}{P}$，其中 S_1 是消费率（国民收入总额中用于消费的部分所占的比例），S_2 是居民消费率（消费总额中用于居民消费的部分所占的比例）. 显然，对于每一个有序数组 (Y,P)（$Y>0,P>0$ 并取整数），总有唯一确定的实数 Z 与之对应，使得以上关系式成立. 此关系式反映了一个国家中居民人均消费水平依赖国民收入总额和总人口数.

抛开上述三个例题的具体含义,仅从数量关系来看,它们具有共同的属性,抽出这些共性,概括出二元函数的定义.

2)二元函数的定义

定义1 设有三个独立的变量 x,y,z 和非空点集 $D\subset\mathbf{R}^2$,如果当变量 x,y 在其给定的范围 D 内,任取一对数值 (x,y) 时,变量 z 就按某一确定的对应法则 f,总有确定的数值与它们对应,那么,变量 z 就称为变量 x,y 的**二元函数**,记为 $z=f(x,y)$. 其中 x,y 称为**自变量**,函数 z 也叫做**因变量**,自变量 x,y 的取值范围 D 称为函数的**定义域**.

二元函数可记为 $z=z(x,y)$ 或 $z=g(x,y)$ 等.

类似地,可以给出三元函数的定义

$$u=f(x,y,z),(x,y,z)\in D\subset\mathbf{R}^3.$$

n 元函数的定义

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\subset\mathbf{R}^n.$$

二元及其以上的函数统称为**多元函数**.

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 所取的函数值记为 $z\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $z\big|_{(x_0,y_0)}$ 或 $f(x_0,y_0)$.

例4 设 $z=f(x,y)=\cos(xy)-\sqrt{1+y^2}$,求 $f\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 和 $f(0,1)$.

解 $f\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\times1\right)-\sqrt{1+1^2}=-\sqrt{2}$,

$f(0,1)=\cos(0\times1)-\sqrt{1+1^2}=1-\sqrt{2}$.

3)二元函数的定义域

同一元函数一样,函数的定义域和对应法则是二元函数的两个要素. 对于以解析式表示的二元函数,其定义域就是使该式子有意义的自变量的变化范围. 对于实际问题,在求定义域时,除使该式子有意义外,还要符合具体问题的实际意义.

二元函数的定义域比较复杂,可以是全平面,可以是一条曲线,也可以是由曲线围成的部分平面等.

二元函数的定义域的求法同一元函数,可用不等式组或集合的形式表示.

例5 求下列函数的定义域 D,并画出其图形.

(1) $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\arcsin\dfrac{y}{3}$;

(2) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$;

(3) $z=\ln(x+y-1)-\sqrt{2-x-y}$.

解　(1) 因为要使函数 $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\arcsin\dfrac{y}{3}$ 有意义,应有

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1,\\[2mm] \left|\dfrac{y}{3}\right|\leqslant 1,\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ -3\leqslant y\leqslant 3.\end{cases}$$

所以,函数的定义域 D 是以 $x=\pm 2$, $y=\pm 3$ 为边界的矩形闭区域(见图 7-5).

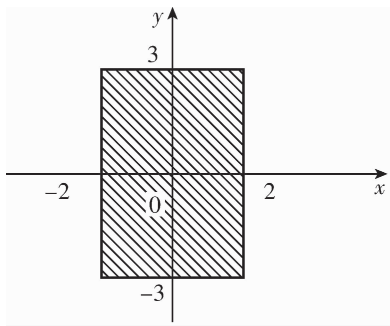

图 7-5

(2) 因为要使函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 有意义,应有

$$\begin{cases}4-x^2-y^2\geqslant 0,\\ x^2+y^2-1>0,\end{cases}$$

即 $1<x^2+y^2\leqslant 4$. 所以,函数的定义域 D 是以原点为圆心的环形区域,是有界区域(见图 7-6).

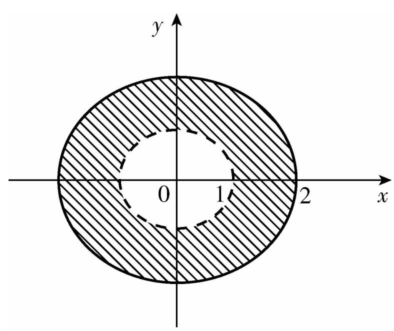

图 7-6

(3) 要使函数有意义,则有

$$\begin{cases} x+y-1>0, \\ 2-x-y\geqslant 0, \end{cases}$$

即 $1<x+y\leqslant 2$. 所以，函数的定义域 D 是一个条形区域，是无界区域(见图 7-7).

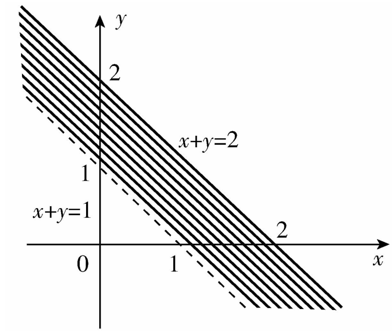

图 7-7

4) 二元函数的几何意义

已知一元函数(即二元方程) 一般表示平面上一条曲线. 对于二元函数(即三元方程)，由空间解析几何知识知道，它在空间直角坐标系中一般表示曲面.

设 $P(x,y)$ 是二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 内的任意一点，则相应的函数值是 $z=f(x,y)$，于是，有序数组 x,y,z 确定了空间一点 $M(x,y,z)$. 当点 P 在 D 内变动时，对应的点 M 就在空间变动，一般地形成一个曲面. 我们称之为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形(见图 7-8). 定义域 D 就是曲面在 xOy 面上的投影区域.

例如，函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(a>0)$ 的图形是球心在原点、半径为 a 的上半球面(见图 7-9).

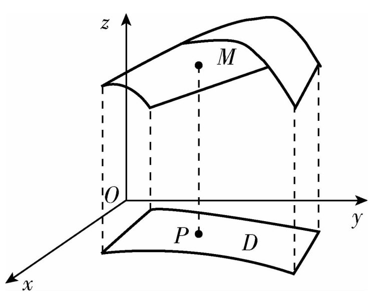

图 7-8

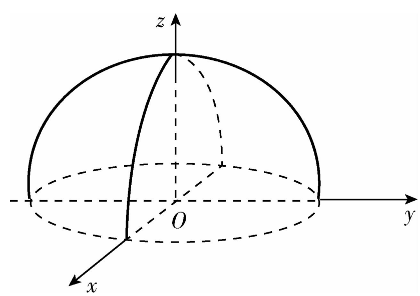

图 7-9

二、二元函数的极限

与一元函数情况类似，对于二元函数 $z=f(x,y)$，我们需要考察当自变量 x,y 无限趋近于常数 x_0,y_0 时，即当点 $P(x,y)$ 无限逼近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，对应的函数值的变化趋势，这就是二元函数的极限问题.

显然，当 x,y 趋向于 x_0,y_0 时，可以看成点 $P(x,y)$ 趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$，记为 $P\to P_0$ 或 $(x,y)\to(x_0,y_0)$. 若记 $\rho=|PP_0|$，即 $\rho=|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，则可用 $\rho\to 0$ 来表示 $P\to P_0$ 或 $(x,y)\to(x_0,y_0)$. 下面给出当 $\rho\to 0$ 时，函数 $f(x,y)$ 无限逼近于确定的常数 A 的极限定义.

定义 2　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义（点 P_0 可以除外），如果对于任意给定的正数 ε，都存在正数 δ，当 $0<\rho=|PP_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{P\to P_0}f(P)=A.$$

二元函数的极限运算与一元函数类似，不再重述. 下面举例说明.

例 6　证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3x+y)=5$.

证　任给 $\varepsilon>0$，由

$$|(3x+y)-5|=|(3x-3)+(y-2)|\leqslant 3|x-1|+|y-2|,$$

再由

$$|x-1|\leqslant\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2},\ |y-2|\leqslant\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$

所以，当 $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ 时，有 $|(3x+y)-5|<3\delta+\delta=4\delta$. 于是，只要取 $\delta=\dfrac{1}{4}\varepsilon$，当 $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ 时，就有

$$|(3x+y)-5|<\varepsilon$$

恒成立，因此

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}(3x+y)=5.$$

例 7　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

解　令 $u=x^2+y^2$，因为当 $x\to 0,y\to 0$ 时 $u\to 0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

本例表明，二元函数的极限问题有时可以转化为一元函数的极限问题来解.

例 8 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 当 $x\to 0, y\to 0$ 时,x^2+y^2 为无穷小,而 $\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 为有界变量,故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

例 9 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

分析 $(x,y)\to(0,0)$ 时,分子、分母的极限均为 0,可将分母有理化,消去零因子.

解
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)=2.$$

例 10 考察函数

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时的极限是否存在.

解 当点(x,y)沿 x 轴趋向于原点时,即当 $y=0$ 而 $x\to 0$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}g(x,y)=\lim_{x\to 0}g(x,0)=\lim_{x\to 0}0=0.$$

而当点(x,y)沿 y 轴趋向于原点时,即当 $x=0$ 而 $y\to 0$ 时,有

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}g(x,y)=\lim_{y\to 0}g(0,y)=\lim_{y\to 0}0=0.$$

但是,当点(x,y)沿直线 $y=kx(k\neq 0)$ 趋向于原点时,即当 $y=kx$ 而$x\to 0$时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}g(x,y)=\lim_{x\to 0}g(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

随着 k 取值的不同,$\dfrac{k}{1+k^2}$ 的值也不同,故极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}g(x,y)$ 不存在.

例 11 考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时的极限是否存在?

解 当点(x,y)沿 x 轴、y 轴趋向于原点时,函数的极限都是 0. 设 $y=kx(k\neq$

0）趋向于原点，此时

$$f(x,kx)=\frac{2k^2x^3}{k^4x^4+x^2}=\frac{2k^2x}{k^4x^2+1}(x\neq 0),$$

显然

$$\lim_{x\to 0}f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{2k^2x}{k^4x^2+1}=0.$$

这说明：点(x,y)沿任何直线趋向于原点时，函数的极限均为0.但是，我们仍不能断定其极限是否存在.因为还不能表明点(x,y)沿任何方式趋向于原点时，函数的极限均为0.事实上，设$y=\sqrt{x}$，当点(x,y)沿$y=\sqrt{x}$趋向于原点时，此时有

$$f(x,\sqrt{x})=\frac{2x^2}{2x^2}=1(x\neq 0),$$

于是

$$\lim_{x\to 0}f(x,\sqrt{x})=1.$$

由此可见，极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)$不存在.

注　在一元函数$y=f(x)$的极限定义中，点x只是沿x轴从x_0的左右两侧趋向于点x_0，但是，在二元函数极限的定义中，若极限存在，要求点$P(x,y)$以任意方式、任意方向无限趋向于点$P_0(x_0,y_0)$（可以沿任何直线，也可以沿任何曲线趋于点$P_0(x_0,y_0)$）时，函数都无限趋于同一常数A.如果点$P(x,y)$只取某些特殊方式（如沿一条定直线或定曲线或无限多方式），但不是任意方式趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，即使函数无限趋于某一确定的常数A，我们也不能由此断定函数的极限一定存在.但是，反过来，如果当点$P(x,y)$以不同的方式或不同方向趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，函数趋于不同的值，那么，就可以断定此函数的极限一定不存在.

三、二元函数的连续性

1. 二元函数连续的定义

有了二元函数极限的定义，类似于一元函数的连续性定义，我们就可以很容易地给出二元函数连续的定义.

定义3　设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内有定义，如果当点$P(x,y)$趋向于点$P_0(x_0,y_0)$时，函数$z=f(x,y)$的极限存在，且等于它在点$P_0(x_0,y_0)$处的函数值，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)\text{或}\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0),$$

则称函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处**连续**，否则，称函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,

y_0)处间断,点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为该函数的**间断点**.

利用函数全增量的概念,连续定义可用另一种形式表述.

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义,当自变量 x,y 分别由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$,y_0 变到 $y_0+\Delta y$ 时,函数 $z=f(x,y)$ 有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

称其为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的**全增量**,记为 Δz,即

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

定义3中,点 $P(x,y)$ 趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$,可用 $\Delta x\to 0$,$\Delta y\to 0$ 来描述,极限式

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

相当于

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0.$$

于是,连续的定义又可表述为如下.

定义4 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义,如果当自变量 x,y 的增量 $\Delta x,\Delta y$ 趋向于0时,对应的函数 $z=f(x,y)$ 的全增量 Δz 也趋向于0,即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0,$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内各点都连续,则称函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内连续.

对于闭区域上的连续函数 $z=f(x,y)$,则要求函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内和边界上都连续.当点 $P_0(x_0,y_0)$ 是区域 D 的边界点时,极限 $\lim\limits_{P\to P_0}\Delta z=0$ 中的 $P\to P_0$ 是指 P 在区域 D 内所取的路线趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$,极限中满足 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的点 P 均指区域 D 内的点.

关于二元函数 $z=f(x,y)$ 的间断点,同一元函数类似,由函数的连续性定义知,函数没有定义的点、极限不存在的点和极限值不等于函数值的点均为函数的间断点.对于二元函数 $z=f(x,y)$ 与一元函数不同的是:它不仅有间断点,有时还会有间断线.例如,函数

$$z=\frac{1}{x^2+y^2-2}$$

就有间断线

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2-2=0\}.$$

一元函数连续性的运算法则和结论都可以推广到二元连续函数(证明从略):

(1) 二元连续函数的和、差、积、商(分母不为零) 仍是连续函数.

(2) 二元连续函数的复合函数仍是连续函数.

(3) 二元初等函数在其定义区域内都是连续的,所谓定义区域是指包含在定义域内的区域.

(4) 二元连续函数在连续点的极限等于该点的函数值,即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0) \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 12　已知 $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+y)}{x^2+y^2}$,求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y)$.

解　因为 $f(x,y)$ 是二元初等函数,并且在点 $(1,1)$ 处连续,故

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y) = f(1,1) = \frac{\ln 2}{2}.$$

2. 有界闭区域上连续函数的性质

与闭区间上一元连续函数的性质类似,在有界闭区域 D 上连续的二元函数 $z=f(x,y)$ 也有如下性质(证明从略).

(1) **最大值、最小值定理**　在有界闭区域 D 上连续的二元函数 $z=f(x,y)$ 在该区域上一定能取到最大值和最小值,即一定可以找到点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$,使

$$f(x_1,y_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_2,y_2),$$

其中 $f(x_2,y_2)$ 和 $f(x_1,y_1)$ 分别为函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值.

(2) **介值定理**　在有界闭区域 D 上连续的二元函数 $z=f(x,y)$ 必能取得介于最大值和最小值之间的任何值.

以上关于二元函数 $f(x,y)$ 的极限与连续的讨论完全可以推广到三元以及三元以上的函数.

思考

(1) 一元函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 与二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 的区别与联系是什么?

(2) 两个一元函数 $f(x_0,y)$ 和 $f(x,y_0)$ 在 y_0,x_0 处连续,能否保证二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续?反之如何?为什么?

习题 7-1

(1) 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集和无界集?

① $\{(x,y)\mid x\neq 0\}$;

② $\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$;

③ $\{(x,y)\mid y<x^2\}$;

④ $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\leqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\leqslant 2\}$.

(2) 已知函数 $f(x,y)=xy\tan\dfrac{y}{x}$,求证:$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$.

(3) 已知函数 $f(x,y)=x^y+y^x$,求 $f(xy,x+y)$.

(4) 已知函数 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$.

(5) 求下列函数的定义域.

① $z=\ln(x^2-2y-1)$;

② $z=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$;

③ $z=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-r^2}\,(R>r)$;

④ $z=\arccos\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(6) 求下列函数的极限.

① $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$;　　② $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\ln(y+e^x)}{x+2y}$;

③ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{2xy}$;　　④ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy^2)}{x}$;

⑤ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{y}}$;　　⑥ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

(7) 证明下列极限不存在.

① $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$;　　② $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{1-(x-y)^4}$.

(8) 研究下列函数在原点处的连续性.

① $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(x^2+y^2)}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

② $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2+y^2)}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

第二节　偏　导　数

在一元函数微分学中,我们已经知道函数 $y=f(x)$ 的导数就是函数 y 对自变量 x 的变化率. 对于二元函数 $z=f(x,y)$ 我们同样要研究它的“变化率”,然而,由于自变量多了一个,情况就要复杂得多. 在研究二元函数 $z=f(x,y)$ 时,有时需要研究当一个变量固定不变时,函数关于另一个变量的变化率,此时的二元函数实际上可转化为一元函数. 因此,可利用一元函数的导数概念,得到二元函数 $z=f(x,y)$ 对某一个变量的变化率,即偏导数. 本节我们将重点讨论二元函数偏导数的概念、求法及其在求极值方面的应用.

一、偏导数

1. 偏导数的定义

定义 1　设有二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义,当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,相应地,函数 $z=f(x,y)$ 有增量(称为**对 x 的偏增量**)

$$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{7-2}$$

存在,那么,此极限值称为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处**对 x 的偏导数**. 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},z'_x\big|_{(x_0,y_0)}\text{ 或 }f'_x(x_0,y_0).$$

类似地,当 x 固定在 x_0,而 y 在 y_0 处有增量 Δy 时,相应地,函数 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏增量

$$\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z_y}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \tag{7-3}$$

存在,那么,此极限值称为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处**对 y 的偏导数**. 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},z'_y\big|_{(x_0,y_0)}\text{ 或 }f'_y(x_0,y_0).$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,那

么,这个偏导数仍是 x,y 的函数,此函数称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的**偏导函数**,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}f(x,y),z'_x\text{或 }f'_x(x,y).$$

类似地,可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}f(x,y),z'_y\text{或 }f'_y(x,y).$$

以后在不至于混淆的情况下,偏导函数也称为偏导数.

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数,不再一一赘述.读者可以类似地给出三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x(x,y,z)$,$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_y(x,y,z)$,$\frac{\partial u}{\partial z}=f'_z(x,y,z)$ 的定义.

2. 偏导数的求法

由偏导数的定义可以看出,多元函数对某一个变量求偏导,实质上就是将其余自变量看做常数,而对该变量求导数.所以,求多元函数的偏导数不需要建立新的运算方法,只要把其余自变量看做常数,而对该变量按一元函数的求导法则和求导公式去求导即可.

例 1 求 $z=x^2y+xy^2+2y$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解 把 y 看成常数对 x 求导,得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^2$.

把 x 看成常数对 y 求导,得 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2xy+2$.

将点 $(1,2)$ 的坐标代入上面的式子,得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=8,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=7.$$

例 2 求 $z=x^2\cos 3y$ 的偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos 3y$,$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2(-3\sin 3y)=-3x^2\sin 3y$.

注 在对求导的过程熟练后,可省略一些不必要的叙述,以简化解题过程.

例 3 试证 $z=g(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & xy=0,\\ 1, & xy\neq 0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续,但两个偏导数 $g'_x(0,0)$,$g'_y(0,0)$ 在该点均存在.

分析 验证函数在某点不连续只需证明函数在该点的极限不存在或虽极限存在但不等于该点的函数值即可.而对于分段函数在分段点的连续性需用定义判断.

解 当动点沿直线 $y=0$ 趋于原点时,

$$\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}x^2=0,$$

而沿着直线 $y=x$ 趋于原点时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}1=1.$$

可见函数 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处极限不存在，故在点 $(0,0)$ 处也不连续.

求 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的两个偏导数，必须分别按定义计算.

$$g'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{g(0+\Delta x,0)-g(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\Delta x=0,$$

类似地可求得 $g'_y(0,0)=0$.

注　本例表明，在多元函数中，函数在一点连续已不再是函数在该点偏导数存在的必要条件，这是多元函数与一元函数的不同点之一.

例 4　设 $z=(x^2+y^2)^{\tan(xy)}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　用对数求导法，对已知函数 z 的表达式两边取对数，得

$$\ln z=\tan(xy)\ln(x^2+y^2),$$

两边对 x 求偏导数

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=y\sec^2(xy)\ln(x^2+y^2)+\tan(xy)\frac{2x}{x^2+y^2},$$

整理得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2+y^2)^{\tan(xy)}\left(y\sec^2(xy)\ln(x^2+y^2)+\frac{2x\tan(xy)}{x^2+y^2}\right).$$

由对称性，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2+y^2)^{\tan(xy)}\left(x\sec^2(xy)\ln(x^2+y^2)+\frac{2y\tan(xy)}{x^2+y^2}\right).$$

例 5　设 $z=xy+xF(\dfrac{y}{x})$，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

分析　要证明等式成立，只要对函数 $z=xy+xF\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 求出相应的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，然后代入等式的左边，化简即可.

证　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+F\left(\frac{y}{x}\right)+xF'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+F\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}F'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xF'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)=x+F'\left(\frac{y}{x}\right).$$

将它们代入等式左边得

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

3. 偏导数的几何意义

由一元函数 $y=f(x)$ 的导数的几何意义可知,$f'(x_0)$ 等于曲线 $y=f(x)$ 在 (x_0,y_0) 处的切线斜率. 而二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$,实际上是

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\big|_{x=x_0}.$$

在几何上表示曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=y_0\end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 MT_x 对 x 轴的斜率.

同样 $f'_y(x_0,y_0)$ 表示曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ x=x_0\end{cases}$ 在点 M 的切线 MT_y 对 y 轴的斜率(见图 7-10).

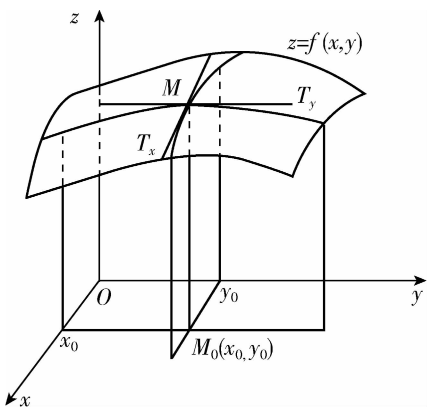

图 7-10

所以,偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 只是函数在 x 轴方向上的变化率,$\frac{\partial z}{\partial y}$ 只是函数在 y 轴方向上的变化率.

二、高阶偏导数

定义 2 设函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$,$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$. 一般来说它们仍然是 x,y 的函数,如果这两个偏导函数对 x,y 的偏导数也存在,则称

它们(一阶偏导数)的偏导数是函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**.

根据对自变量 x,y 的不同求导次序,得到如下四个二阶偏导数:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx};\\
&\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy};\\
&\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx};\\
&\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy},
\end{aligned}\tag{7-4}$$

其中 $f''_{xy}(x,y)$ 及 $f''_{yx}(x,y)$ 称为**二阶混合偏导数**.

类似地,可以定义多元函数更高阶的偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**. 而 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的**一阶偏导数**. 由于高阶偏导数的求导过程比较繁琐,本书只介绍二阶偏导数.

例 6　求函数 $z=xy+x^2\sin y$ 的所有二阶偏导数.

解　因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+2x\sin y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+x^2\cos y$,所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(y+2x\sin y)=2\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y+2x\sin y)=1+2x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(x+x^2\cos y)=-x^2\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x+x^2\cos y)=1+2x\cos y.$$

本例中 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$,这并不是巧合,我们有下述定理.

定理 1　如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上的两个二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ 连续,则在区域 D 上有

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

注　定理 1 说明,当二阶混合偏导数在区域 D 上连续时,求导结果与求导次序无关.

这个定理也适用于三元及三元以上的函数.

例 7　设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$,试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{(-1)\cdot(x^2+y^2)-(-y)\cdot(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

例 8 设 $u=\mathrm{e}^{xyz}$,求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$,$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=yz\mathrm{e}^{xyz}$,$\frac{\partial u}{\partial y}=xz\mathrm{e}^{xyz}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(yz\mathrm{e}^{xyz})=z\frac{\partial}{\partial y}(y\mathrm{e}^{xyz})\\&=z(\mathrm{e}^{xyz}+y\mathrm{e}^{xyz}\cdot xz)=z(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz},\\\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}(xz\mathrm{e}^{xyz})=x\frac{\partial}{\partial z}(z\mathrm{e}^{xyz})\\&=x(\mathrm{e}^{xyz}+z\mathrm{e}^{xyz}\cdot xy)=x(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz}.\end{aligned}$$

例 9 设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,证明:$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2}{u}$.

证 先求一阶偏导数,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{u},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{u},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{u}.$$

再求相应的二阶偏导数,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{u}\right)=\frac{u-x\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2}=\frac{u-\frac{x^2}{u}}{u^2}=\frac{u^2-x^2}{u^3},$$

同理可得$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{u^2-y^2}{u^3}$,$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{u^2-z^2}{u^3}$.

将所求二阶偏导数代入等式左边,整理得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{u^2-x^2}{u^3}+\frac{u^2-y^2}{u^3}+\frac{u^2-z^2}{u^3}=\frac{2}{u}.$$

从而证得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2}{u}.$$

三、复合函数与隐函数的求导法则

1. 多元复合函数的求导法则

在第二章里，我们学过一元复合函数的求导法则，如果函数 $y=f(u)$ 对 u 可导、$u=\varphi(x)$ 对 x 可导，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

多元复合函数的求导问题比较复杂，下面我们从一种特殊情况开始讨论.

1）多元复合函数的全导数

定理 2　设一元函数 $u=\varphi(x)$ 与 $v=\psi(x)$ 在 x 处均可导，二元函数 $z=f(u,v)$ 在 x 的对应点 (u,v) 处有一阶连续偏导数 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$，则复合函数 $z=f[\varphi(x),\psi(x)]$ 对 x 的导数存在，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{7-5}$$

证　给定 x 的一个增量 Δx，则 u,v 有相应的增量 $\Delta u,\Delta v$，从而 z 有增量

$$\Delta z=f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u,v).$$

由假设一元函数 $u=\varphi(x)$ 与 $v=\psi(x)$ 在 x 处可导，二元函数 $z=f(u,v)$ 在 (u,v) 处有连续的偏导数，从而有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u=0,\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta z_u}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u,v)-f(u,v)}{\Delta u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta z_v}{\Delta v}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{f(u,v+\Delta v)-f(u,v)}{\Delta v},$$

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}[f'_u(u+\Delta u,v+\Delta v)-f'_u(u,v)]=0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}[f'_v(u+\Delta u,v+\Delta v)-f'_v(u,v)]=0\Rightarrow\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v=0}}[f'_v(u+\Delta u,v)-f'_v(u,v)]=0.$$

又因为

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u+\Delta u,v)+f(u+\Delta u,v)-f(u,v)\\&=\frac{f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u+\Delta u,v)}{\Delta v}\cdot\Delta v+\frac{f(u+\Delta u,v)-f(u,v)}{\Delta u}\cdot\Delta u,\end{aligned}$$

将上式两端同除以 Δx，得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u+\Delta u,v)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{f(u+\Delta u,v)-f(u,v)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

因此,当 $\Delta x\to 0$ 时,两边取极限得

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u+\Delta u,v)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{f(u+\Delta u,v)-f(u,v)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\substack{\Delta v\to 0\\ \Delta u\to 0}}\frac{f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u+\Delta u,v)}{\Delta v}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\\&\quad\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u,v)-f(u,v)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta u\to 0}f'_v(u+\Delta u,v)\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\&=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

定理 2 的结论又称为复合函数的**全导数公式**,也称为**链式法则**. 它可以推广到二元以上的多元函数中去,请读者写出三元函数的全导数公式.

例 10 设 $z=u^v,u=\sin 2x,v=\sqrt{x^2-1}$,求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 因为$\dfrac{\partial z}{\partial u}=vu^{v-1}$,$\dfrac{\partial z}{\partial v}=u^v\ln u$,$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\cos 2x$,$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$,所以有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=vu^{v-1}\cdot 2\cos 2x+u^v\ln u\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\\&=u^v\left(\frac{2v\cos 2x}{u}+\frac{x\ln u}{\sqrt{x^2-1}}\right)\\&=(\sin 2x)^{\sqrt{x^2-1}}\left(2\sqrt{x^2-1}\cot 2x+\frac{x\ln\sin 2x}{\sqrt{x^2-1}}\right).\end{aligned}$$

注 如果把 $u=\sin 2x,v=\sqrt{x^2-1}$ 代入 $z=u^v$ 中,再用一元函数的求导方法解题,将得到同样答案.

应用上述公式时,可通过图 7-11 所表示函数的复合关系和求导的运算途径来进行. 在图 7-11 中,一方面,从 z 引出的两个箭头指向 u,v,表示 z 是 u,v 的函数;同理,u,v 又同是 x 的函数. 另一方面,从 z 到 x 的途径有两条,表示 z 对 x 的导数包括两项;每条途径有两个箭头组成,表示每项由两个导数相乘而得,其中每个箭头表示一个变量对某变量的偏导数,如 $z\to u,u\to x$ 分别表示$\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 对一元函数取导数符号,对多元函数取偏导数符号.

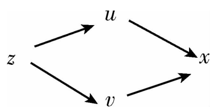

图 7-11

2）多元复合函数的偏导数

定理3　设函数 $z=f(u,v)$ 关于 u,v 具有一阶连续的偏导数，而 $u=\varphi(x,y)$ 与 $v=\psi(x,y)$ 关于 x,y 的一阶偏导数都存在，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 对于 x,y 的偏导数存在，且

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\tag{7-6}$$

此公式可直接由定理 2 的结论推出. 事实上，在求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时，将 y 看做常量，因此中间变量 u 和 v 仍可看做一元函数而应用定理 2. 但是，由于复合函数 z 和中间变量 u，v 都是 x,y 的函数，只是把 y 看做常数，因此定理 2 中的导数符号应改为偏导数符号，这就得到定理 3 的结论.

应用定理 3 的结论时，可通过图 7-12 所表示的函数复合关系和求导运算途径去求导.

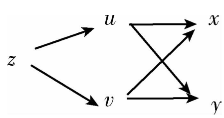

图 7-12

例 11　设 $z=e^{u}\cos v,u=xy,v=2x-y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　因为 $\frac{\partial z}{\partial u}=e^{u}\cos v,\frac{\partial z}{\partial v}=-e^{u}\sin v,\frac{\partial u}{\partial x}=y,\frac{\partial u}{\partial y}=x,\frac{\partial v}{\partial x}=2,\frac{\partial v}{\partial y}=-1$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=e^{u}\cos v\cdot y-e^{u}\sin v\cdot 2=e^{u}(y\cos v-2\sin v)\\ &=e^{xy}[y\cos(2x-y)-2\sin(2x-y)],\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=e^{u}\cos v\cdot x-e^{u}\sin v\cdot(-1)=e^{u}(x\cos v+\sin v)\\ &=e^{xy}[x\cos(2x-y)+\sin(2x-y)].\end{aligned}$$

当 $z=f(u,v,w),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y),w=\omega(x,y)$ 时，则其求导公式参

考关系图 7-13 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\tag{7-7}$$

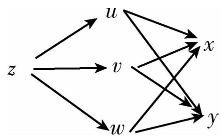

图 7-13

例 12　设 $z=f\left(\frac{y}{x},x+2y,y\sin x\right)$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　令 $u=\frac{y}{x},v=x+2y,w=y\sin x$,于是 $z=f(u,v,w)$. 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\frac{\partial v}{\partial x}=1,\frac{\partial w}{\partial x}=y\cdot\cos x,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x},\frac{\partial v}{\partial y}=2,\frac{\partial w}{\partial y}=\sin x,$$

所以有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f'_v\cdot 1+f'_w\cdot y\cos x=-\frac{y}{x^2}f'_1+f'_2+f'_3\cdot y\cos x.$$

式中 $f'_i(i=1,2,3)$ 表示 z 对第 i 个中间变量的偏导数,有了这种记法,就不一定要明显地写出中间变量 u,v,w.

类似地,可求得$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f'_1+2f'_2+f'_3\sin x$.

当 $z=f(u,v),u=\varphi(x,y,t),v=\psi(x,y,t)$ 时,则其求导公式参考关系图 7-14 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial z}{\partial t}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}.\end{aligned}\tag{7-8}$$

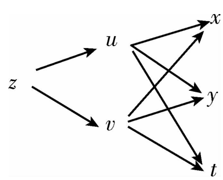

图 7-14