第一部分　基础模块

第 1 章　线 性 代 数

线性代数是数学的重要分支，它不仅是一门数学课程，也是一种非常实用的学科工具，其在工程、科技及经济等领域中都有着广泛的应用. 本章将介绍行列式、矩阵、线性方程组的基本概念、基本运算及简单应用.

【学习目标】

知识目标:

- 熟练掌握行列式的概念及性质.
- 熟练掌握矩阵的概念及各种运算.
- 掌握逆矩阵的求解方法和求矩阵的秩的方法.
- 掌握线性方程组的多种求解方法.

能力目标:

- 会用克莱姆法则求解线性方程组.
- 会将线性方程组表示为矩阵方程.
- 能将一些实际问题中的数据转化成矩阵表示，能利用矩阵进行数据处理.
- 具备一定的数学语言表达能力和分析问题的缜密思维能力.
- 能利用行列式、矩阵的知识熟练进行线性方程组的解的判定与求解.
- 能融会贯通地应用线性代数的工具来解决实际问题，提升数学解题能力.

素质目标:

- 养成思考问题时数学理论与实际相结合的习惯，提升学生应用数学知识解决实际问题的能力.
- 鼓励学生阅读相关数学书籍，提高数学文化素养.
- 通过典型数学案例，培养学生建立数学模型的能力.
- 阅读数学家高斯的故事，启迪智慧，养成做事情找规律、动脑筋、勤思考的好习惯.

数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高的美.

——罗素（Bertrand Arthur William Russell，英国数学家）

1.1 行 列 式

行列式的概念是在研究线性方程组解的过程中产生的. 它是研究矩阵和线性方程组的一个重要工具,在许多领域都有广泛应用.

1.1.1 二阶、三阶行列式

【思考】 用消元法求解下列二元线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

【分析】 为消去未知数 x_2,用 a_{22} 和 a_{12} 分别乘上列两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}.$$

这个解法虽然思路清晰,但是所得公式不易记忆,为此,引入二阶行列式的定义.

定义 1 由 4 个数排成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式,其中横排为行,竖排为列. 称 a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$ 为行列式第 i 行第 j 列的元素.

行列式表示一个值,二阶行列式的计算方法为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

右端称为行列式的展开式. 展开规则为:从左上角到右下角的对角线用实线相连,连线元素之积带正号;从右上角到左下角的对角线用虚线相连,连线元素之积带负号. 这种方法称为二阶行列式的对角线展开法则.

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$,若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

显然，对于方程组来讲，当 $D\neq 0$ 时，有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

注： 由所有未知数的系数组成的行列式 D 简称系数行列式.

例 1 解方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2=8\\ x_1-2x_2=-3\end{cases}$.

解

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-14.$$

因为 $D\neq 0$，所以方程组有唯一解，即

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-7}{-7}=1\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-14}{-7}=2\end{cases}.$$

定义 2 由 9 个数排成的 3 行 3 列的记号 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 称为三阶行列式，它表示一个数值，展开式为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

展开式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号，其运算规律性可用“对角线法则”来表述，如图 1-1 所示.

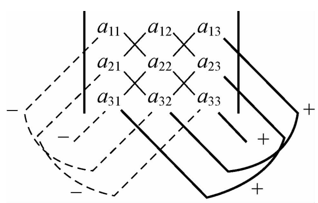

图 1-1

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当系数行列式 $D\neq 0$ 时，该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 2　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times 0\times 6+2\times 5\times(-1)+3\times 4\times 0-3\times 0\times(-1)-$

$$1\times 5\times 0-2\times 4\times 6=-10-48=-58.$$

例 3　解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$.

解　由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\times 1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times 2\times 1-$$

$$(-1)\times 1\times 1-1\times(-3)\times 1-(-2)\times 2\times(-1)=-5\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

1.1.2　n 阶行列式

1. n 阶行列式的定义

定义 3　由 n^2 个元素排成的 n 行 n 列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，这里 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的元素. $n\geqslant 4$ 的行列式称为高阶行列式.

高阶行列式类似于二阶、三阶的展开公式比较复杂，下面介绍行列式按行(列)展开的方法.

定义4 在 n 阶行列式 D 中去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素，由余下元素组成的 $n-1$ 阶行列式，称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；再记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

对于三阶行列式可以验证下式成立.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right)+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

一般地，对于高阶行列式的计算，有以下定理.

定理1 行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

可以验证，还有下面结论成立.

定理2 行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零.

例4 试按第三列展开计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

解 将 D 按第三列展开，则有

$$D=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43}$$

$$=3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}+$$

$$(-1)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}+0\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=3\times 19+1\times(-63)+(-1)\times 18+0\times(-10)=-24.$$

下面是几种特殊形式的行列式.

(1)上三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2)下三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3)对角行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 行列式的性质

为简化行列式的计算,我们需要学习有关行列式的性质. 行列式的性质有多条,这里重点学习 4 条,对其其余性质,读者可参阅相关参考书.

性质 1　行列互换,值不变(表明行的性质可转化为相应列的性质,行列式的“行”与“列”等权),即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2　行列式的两行(列)对调,值互为相反数. 例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

上述性质的使用记为 $r_i \leftrightarrow r_j$. 若第 i 列与第 j 列互换,记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行(列),等于用数 k 乘此行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

该性质也表明计算行列式时，可按行或列提取公因子，以使计算简单.

推论 行列式中若有两行(列)元素对应相同或成比例，则此行列式为零.

性质 4 将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上，行列式的值不变.

注: 以数 k 乘第 j 行各元素加到第 i 行相应元素上，记作 r_i+kr_j；以数 k 乘第 j 列各元素加到第 i 列相应元素上，记作 c_i+kc_j，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

计算行列式时，常用性质 4 把行列式化为三角形行列式来计算.

例 5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 先将第一行的公因子 3 提出来，再运用性质 4，得

$$D=3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & -9 & -18 \end{vmatrix}=27\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=54\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=54\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=54\times 3=162.$$

例 6 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解
$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2+(-1)r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&0&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=40.$$

3. 克莱姆法则

定义 5 含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

称为 n 元线性方程组. 由线性方程组的系数 a_{ij} 构成的行列式 D 称为该方程组的系数行列式,即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

若系数行列式 $D\neq0$,则 n 元线性方程组有唯一解,其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n),$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,而其余各列保持不变所得到的行列式(证明略).

例 7 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3+2x_4=1\\x_1+x_2-2x_3+x_4=1\\x_1+x_2+x_4=2\\x_1+x_3-x_4=1\end{cases}.$$

解 $D=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\1&1&-2&1\\1&1&0&1\\1&0&1&-1\end{vmatrix}=-10,$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\1&1&-2&1\\2&1&0&1\\1&0&1&-1\end{vmatrix}=-8,D_2=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&1&-2&1\\1&2&0&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}=-9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&0&1&-1\end{vmatrix}=-5,D_4=\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&0&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}=-3.$$

由于系数行列式 $D=-10\neq0$，所以由克莱姆法则得方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{4}{5},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{9}{10},x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{2},x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{3}{10}.$$

可以看出齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

在 $D\neq0$ 时，仅有一组零解；当有非零解时，系数行列式 $D=0$.

例 8 讨论 λ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}(5-\lambda)x+2y+2z=0\\2x+(6-\lambda)y=0\\2x+(4-\lambda)z=0\end{cases}$ 有非零解.

解 若该齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 $D=0$，即

$$\begin{vmatrix}5-\lambda&2&2\\2&6-\lambda&0\\2&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)-4(6-\lambda)-4(4-\lambda)$$
$$=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)=0,$$

亦即当 $\lambda=5,2,8$ 时，方程有非零解.

例如，当 $\lambda=5$ 时，方程组为

$$\begin{cases}2y+2z=0\\2x+y=0\\2x-z=0\end{cases},$$

由加减消元法知它与方程组

$$\begin{cases}y+z=0\\2x+y=0\end{cases}$$

同解，容易看出这一线性方程组的解有无数多组，即

$$\begin{cases}x=k\\y=-2k\\z=2k\end{cases}(k\in\mathbf{R}).$$

习题 1-1

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}\sin x&\cos x\\-\cos x&\sin x\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}c&-b&0\\0&2a&2c\\a&0&b\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\b+c&a+c&a+b\end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix}1&2&0&0\\5&1&2&4\\0&1&-1&3\\1&4&1&0\end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & 0 \\ c & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$.

2. 证明 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$.

3. 用克莱姆法则解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3=7 \\ 2x_1+x_2+3x_3=7 \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$.

4. 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & x-2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x-3 \end{vmatrix}=0$.

1.2 矩阵概念与运算

在许多实际问题中会有对数据表的分析、处理和运算. 例如，给出某单位职工的 12 个月的工资表，求出每个职工的年收入；学校通过各位教师所授课的班级期末测评表，为授课教师做年度评价；气象台通过观测站一天的整点气温测量数据，研究和预报下一天的气温变化；等等. 如果数据较多，计算往往引起混乱，怎样既能保证数据不乱，又能准确地求得信息数据？此时矩阵是一种可以使用的有效的计算工具. 矩阵是线性代数中的一个重要概念，本节将讨论矩阵的概念、基本运算及逆矩阵.

1.2.1 矩阵的概念

定义 1 由 $m\times n$ 个数排列成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，可简记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中每一个数称为元素，元素 a_{ij} 的下标表明它位于第 i 行、第 j 列的交叉位置；当 $m=n$ 时，又称为 n 阶方阵.

下面是一些特殊的矩阵.

(1)$\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$称为零矩阵.

(2)$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$称为单位阵.

(3)$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$称为对角方阵.

(4)$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$称为上三角方阵,$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$称为下三角方阵.

(5)$(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$称为行矩阵,$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$称为列矩阵.

(6)各非零行首个非零元素的列标随行标的增大而严格增大的矩阵,称为阶梯形矩阵,如$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(7)行数与列数分别相同的矩阵称为同型矩阵.

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,且对应位置元素相等($a_{ij}=b_{ij}$)时,称为**矩阵的相等**,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.2.2 矩阵的运算

1. 矩阵加减法

同型矩阵 A 与 B 相加减时,规定对应位置元素相加减,即

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. 矩阵的数乘

数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘时,规定用数 k 去乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素,即

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 都是同型矩阵，k,l 是常数，则不难验证矩阵的加减法与数乘矩阵满足下列运算规律.

(1)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；

(4)$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

(5)$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(6)$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$；

(7)$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(8)$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

例 1 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & -1\\ 5 & -3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 3 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & -1\\ 5 & -3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 0 & 5 & 5\\ -10 & 15 & -6 & 1\\ 10 & -4 & 19 & 6\end{pmatrix}$.

例 2 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}12 & 13 & 8\\ 6 & 5 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 6 & -1 & 0\\ -4 & -4 & 6\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 $\boldsymbol{X}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}9 & 9 & 6\\ 0 & 6 & 3\\ 6 & 3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

3. 矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，规定 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，它的元素 c_{ij} 由 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素相乘相加而成，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

微课

矩阵的乘法

例如，

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix},$$

可以看出，两矩阵相乘要求前者的列数与后者的行数相等，并且一个 $m\times s$ 矩阵与一个 $s\times n$ 矩阵相乘得到一个 $m\times n$ 矩阵.

因为矩阵是数表，所以矩阵乘以矩阵不同于数字之间的运算. 一般来说，

(1)$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$(交换律不成立).

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&3\\1&2\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\3&2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&0\\1&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\7&2&3\\5&2&2\end{pmatrix}.$$

(2)$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,但 $\boldsymbol{AB}$ 可以等于 $\boldsymbol{O}$.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\\0&0\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

(3)当 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AD}$ 时,$\boldsymbol{C}$ 可以不等于 $\boldsymbol{D}$(消去律不成立).

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0\\4&5\\0&2\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AD}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\4&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

矩阵乘法满足下列运算规律(假设下列运算都是可行的).

(1)同时左乘或右乘同一矩阵保持相等. 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时,$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$($\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{CB}$);

(2)结合律:$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(3)分配律:$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$,$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$;

(4)数乘结合律:$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$;

(5)任意矩阵乘以单位方阵仍为该矩阵. $\boldsymbol{A}_{m\times n}\cdot\boldsymbol{I}_{n\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$,$\boldsymbol{I}_{n\times n}\cdot\boldsymbol{B}_{n\times k}=\boldsymbol{B}_{n\times k}$.

4. 方阵的幂

有了矩阵的乘法就可定义方阵的幂.

设方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,规定

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}^k=\overbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}^{k\text{个}}(k\text{ 为自然数}),$$

$\boldsymbol{A}^k$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂.

方阵的幂满足下列运算规律(假设运算都是可行的).

(1)$A^mA^n=A^{m+n}$(m,n 是非负整数);

(2)$(A^m)^n=A^{mn}$.

注:因矩阵乘法不满足交换律,一般地,$(AB)^n\neq A^nB^n$,n 为自然数.

例 3 四个工厂均能生产甲、乙、丙三种产品,其单位成本如表 1-1 所示.

表 1-1 单位:元

单位成本		产品		
		甲	乙	丙
工厂编号	1	3	5	6
	2	2	4	8
	3	4	5	5
	4	4	3	7

现要生产甲种产品 600 件,乙种产品 500 件,丙种产品 200 件,问由哪个工厂生产,成本最低?

解 设 $A=\begin{pmatrix}3&5&6\\2&4&8\\4&5&5\\4&3&7\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}600\\500\\200\end{pmatrix}$,则

$$AB=\begin{pmatrix}3&5&6\\2&4&8\\4&5&5\\4&3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}600\\500\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\ 500\\4\ 800\\5\ 900\\5\ 300\end{pmatrix}.$$

计算结果表明,由第 2 个工厂生产,成本最低,为 4 800 元.

例 4 有三个水果生产基地,2019 年的水果产量和销售价格如表 1-2 所示,如何求得各基地的年产值?

表 1-2

销售价格		名称		
		苹果/t	梨/t	桃/t
产地	基地 1	218	140	95
	基地 2	345	220	114
	基地 3	186	188	225
销售价格/(万元·t^{-1})		0.28	0.26	0.31

解 用这些数据按其所在位置作简易表,并建立表格间的运算规则,直接求出各信息数据.

设 $A=\begin{pmatrix}218&140&95\\345&220&114\\186&188&225\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0.28\\0.26\\0.31\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}218 & 140 & 95\\345 & 220 & 114\\186 & 188 & 225\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.28\\0.26\\0.31\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}218\times0.28+140\times0.26+95\times0.31\\345\times0.28+220\times0.26+114\times0.31\\186\times0.28+188\times0.26+225\times0.31\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}126.89\\189.14\\170.71\end{pmatrix}.$$

显然,各基地的年产值依次为126.89万元、189.14万元和170.71万元.

5. 矩阵转置

把一个$m\times n$矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

的行与列互换,得到一个$n\times m$矩阵,称为$\boldsymbol{A}$的转置矩阵,记作$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

矩阵转置有以下规律.

(1)$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3)$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4)$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

6. 方阵的行列式

定义3 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为$n$阶方阵,按$\boldsymbol{A}$中元素的排列方式所构成的行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为方阵$\boldsymbol{A}$的行列式,记为$|\boldsymbol{A}|$.

注意:方阵$\boldsymbol{A}$与方阵$\boldsymbol{A}$的行列式是两个不同的概念,前者是一张数表,而后者是一个数值.

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶方阵,方阵的行列式满足下列规律:

(1)$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$;

(2)$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$;

(3)$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

例5 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\0 & -1 & 6\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\-3 & 2 & 0\\9 & 8 & 1\end{pmatrix}$,求$|2\boldsymbol{A}|$及$|\boldsymbol{AB}|$.

解 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都为三阶方阵，可求得 $|\boldsymbol{A}|=-6$，$|\boldsymbol{B}|=14$，而

$$2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 10 & -2\\ 0 & -2 & 12\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix},\ |2\boldsymbol{A}|=-48,$$

即 $|2\boldsymbol{A}|=2^3|\boldsymbol{A}|=-48.$

由

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ 9 & 8 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 2 & -1\\ 57 & 46 & 6\\ 27 & 24 & 3\end{pmatrix},$$

得 $|\boldsymbol{AB}|=-84.$

1.2.3 逆矩阵

在数的运算中，对于非零数 a，总存在唯一一个数 a^{-1}，使得 $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$. 数的倒数在解方程中起着重要作用. 例如，解一元线性方程 $ax=b$，当 $a\neq 0$ 时，其解为 $x=a^{-1}b$. 如果把它推广到矩阵上，就是要找到一个矩阵，不妨记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使得对一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 而矩阵乘法不可交换，因此不得不求 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，这就是矩阵可逆的概念.

1. 逆矩阵的概念

定义 4 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$，

可以证明：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(2) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

事实上，

(1)因为 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，所以 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(2)因为

$$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{AI})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I},$$

所以

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

微课
逆矩阵

2. 矩阵的求法——伴随矩阵求逆法

定义 5 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的矩阵

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**.

显然,$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是将 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中各元素换成相应的代数余子式再经转置而来的.

定理 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是其行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

证明 由 1.1.2 节定理 1 及定理 2,知

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}.$$

因而,当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$,定理得证.

例 6 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$,求:

(1)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$;

(2)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 (1)按定义,由

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=-5,A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}=10,A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=2,A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}=-2,A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2,A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

得

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} -5 & 10 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=2\neq 0$,又有 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 5 & -1 & 1 \\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

利用伴随矩阵法可求逆矩阵，但对于较高阶的矩阵，计算量太大. 下面介绍一种更为简便的方法——初等变换求逆法.

3. 初等变换求逆法

我们把由矩阵构成的方程称为**矩阵方程**.

设矩阵方程为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{A}$ 是方阵且可逆，则方程两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{IX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ ，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

同理，若矩阵方程为 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，当 $\boldsymbol{A}$ 是方阵且可逆时，方程两边同时右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$；若矩阵方程为 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$，当 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是方阵且可逆时，方程两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$.

例 7 求解矩阵方程 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

解 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$，则方程可表示为 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$.

先求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 3\\5 & 2\end{vmatrix}=-13，\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}2 & -3\\-5 & 1\end{pmatrix}，$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}2 & -3\\-5 & 1\end{pmatrix}.$$

再求 $\boldsymbol{X}$.

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}=-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\-5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{13} & -\frac{1}{13}\\-\frac{2}{13} & \frac{3}{13}\end{pmatrix}.$$

习题 1-2

1. 已知 $\begin{pmatrix}x & -2\\7 & y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2y & -3\\-1 & -4x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -5\\6 & -2\end{pmatrix}$，求 x，y 的值.

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3 & -1\\4 & 5\end{pmatrix}$，计算

(1)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(2)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$；(3)$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$；(4)$\boldsymbol{AB}$；

(5)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；(6)$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；(7)$|\boldsymbol{BC}|$；(8)$|\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{C}|$.

3. 计算题.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 4 & 3\\1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -3 & -3\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}(4\quad 3\quad 2\quad 1)$；

(3) $(1\quad 2\quad 3\quad 4)\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&7\\2&1&4\end{pmatrix}^2$.

4. 某个班级学习小组五名同学的两学期期末成绩与总评要求如表1-3所示. 两学期成绩平均计算,利用矩阵及其运算用百分制评定每位同学的总成绩.

表1-3

成　绩		科目成绩							
		数　学		英　语		制　图		平时考核	
学生编号	同学1	92	88	88	80	90	92	98	90
	同学2	86	90	94	86	86	90	96	90
	同学3	82	88	86	84	98	83	90	94
	同学4	90	84	84	90	80	76	95	88
	同学5	94	96	78	88	85	86	95	92
考核比例		0.3		0.3		0.2		0.2	

5. 某厂计划生产A,B,C三种产品,每件产品所需资源及现有资源如表1-4所示.

表1-4　　单位:t

资源名称	产　品			现有资源
	A	B	C	
钢材	1	2	0	210
燃料	2	1	3	390
电力	1	2	2	350

试确定这三种产品的产量使能充分利用现有资源. 若现有资源为 $\begin{pmatrix}100\\260\\200\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}250\\530\\450\end{pmatrix}$,则产量应为多少?

6. 求出下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}0&2&1\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$.

7. 解下列矩阵方程.

(1) $\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$;　　(2) $\boldsymbol{Y}\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$.

1.3 矩阵的初等变换

1.3.1 矩阵的初等变换

定义 1 对矩阵施行下列三种变换,称为矩阵的初等行变换.

(1)行对调:互换矩阵中任意两行,用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行与第 j 行互换.

(2)行倍乘:矩阵中某行各元素同乘以一非零常数,用 kr_i 表示第 i 行各元素同乘以常数 k.

(3)行倍加:矩阵中某一行的各元素乘以一个非零常数后加到另一行对应元素上,用 kr_i+r_j 表示将第 i 行各元素乘以常数 k 加到第 j 行对应元素上.

微课
矩阵的初等变换

相应有矩阵的初等列变换(表示记号中只需将行记号 r 换为列记号 c 即可). 矩阵的初等行、列变换,统称为矩阵的初等变换. 因为初等变换是矩阵元素的演变,变换使得矩阵不再是原矩阵,所以变换过程使用"→".

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**等价类矩阵**. 任何一个非零矩阵经过一系列的初等变换,都可以化为左上角为某阶单位矩阵、其余元素全为 0 的等价类,该等价类也称为**等价标准型**. 等价类矩阵有唯一相同的等价标准型,反之,具有相同等价标准型的矩阵都是等价类矩阵. 可逆方阵与同阶单位阵都是等价类矩阵.

例 1 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&1\\1&0&-1&3\\2&1&1&-2\end{pmatrix}$ 的等价标准型.

解
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&1\\1&0&-1&3\\2&1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2+(-2)r_1\\r_3+(-1)r_1\\r_4+(-2)r_1}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&-1&3\\0&1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&-1&3\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\substack{r_4+r_3\\(-1)r_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{c_4+(-1)c_2\\c_4+3c_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准型为 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

例 2 判断矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\2&1&2\\2&3&4\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&0\\0&0&0\\2&1&0\end{pmatrix}$ 是否属于等价类.

解 $$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\2&1&2\\2&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&1&2\\2&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_3+(-2)r_1\\r_4+(-2)r_1}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&1&-2\\0&3&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3+(-1)r_2\\r_4+(-3)r_2}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-3\\0&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_4+(-1)r_3\\(-\frac{1}{3})r_3}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2+(-1)r_3\\r_1+(-2)r_3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&0\\0&0&0\\2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\r_3\leftrightarrow r_4}}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&3\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2+(-1)r_1\\r_3+(-2)r_1}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\r_3+(-2)r_2\\(\frac{1}{3})r_3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的等价标准型,所以矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 属于等价类矩阵.

定义 2 一个 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}_{m\times n}$,将其进行一次初等行(列)变换得到的矩阵称为**初等方阵**.行初等方阵具有下列三种形式(列变换得到的初等方阵也可相应写出三种形式).

$$\boldsymbol{I}_{r_j\leftrightarrow r_i}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array};$$

$$\boldsymbol{I}_{kr_j}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行;}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$
\boldsymbol{I}_{r_j+kr_i}=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & k & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{array}.
$$

其中没有标注的元素均为 0.

可以验证初等方阵具有下列特性.

(1) $\boldsymbol{I}_{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{r_i\leftrightarrow r_j}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{I}_{r_i\leftrightarrow r_j}=\boldsymbol{B}_{c_i\leftrightarrow c_j}$.

(2) $\boldsymbol{I}_{r_j+kr_i}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{r_j+kr_i}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{I}_{r_j+kr_i}=\boldsymbol{B}_{c_i+kc_j}$.

(3) $\boldsymbol{I}_{k\cdot r_i}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{k\cdot r_i}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{I}_{k\cdot r_i}=\boldsymbol{B}_{k\cdot c_i}$.

即一个矩阵左乘初等方阵,矩阵进行相应的行初等变换;一个矩阵右乘初等方阵,矩阵进行相应的列初等变换. 例如,

$$
\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_3&b_3&c_3\\a_2&b_2&c_2\\a_1&b_1&c_1\end{pmatrix}(\boldsymbol{I}_{r_1\leftrightarrow r_3}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{r_1\leftrightarrow r_3});
$$

$$
\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&kb_1&c_1\\a_2&kb_2&c_2\\a_3&kb_3&c_3\end{pmatrix}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}_{k\cdot r_2}=\boldsymbol{A}_{k\cdot c_2});
$$

$$
\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+ka_3&b_1+kb_3&c_1+kc_3\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}(\boldsymbol{I}_{r_1+kr_3}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{r_1+kr_3}).
$$

1.3.2 矩阵的秩

定义 3 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m\times n$ 矩阵,任取 $\boldsymbol{A}$ 的 k 行 k 列($k\leqslant\min\{m,n\}$),处于其交叉位置的元素按原位置构成的 k 阶行列式,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式. 若其数值不等于 0,就称为一个非零的 k 阶子式.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有非零子式的最高阶数为 r(存在 r 阶非零子式,而任意 $r+1$ 阶子式全为 0),称 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,记为 $R(\boldsymbol{A})=r$.

可以证明:

(1)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的等价类具有相同的秩(初等变换不改变矩阵的秩);

(2)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的等价类中阶梯矩阵(或等价标准型)的非零行的行数就是其秩 $R(\boldsymbol{A})$.

上述结论为求矩阵的秩提供了方法.

例 3 求下列矩阵的秩.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&0\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}$;　　(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$.

解 (1)因为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&0\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&0\\0&-2&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&2&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

所以 $R(A)=3$.

(2)因为

$$B=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-1)r_3]{r_4+(-1)r_1 \atop r_4+r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(B)=3$.

1.3.3 用初等变换求逆矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个可逆 n 阶方阵,$\boldsymbol{I}$ 为一个 n 阶单位阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵可按下列方法求取.

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{I} \vdots \boldsymbol{A}^{-1}).$$

事实上,$\boldsymbol{A}$ 可逆时,它的等价标准型是单位矩阵,而求等价标准型的过程仅通过若干次初等行变换即可实现,又由初等方阵的特性,存在一系列初等方阵 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_n$,使得

$$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_n\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},[\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_n\cdot\boldsymbol{A}]\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_n\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

即当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等行变换变为单位阵时,单位阵也就经过相同的初等行变换变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right).$$

所以,$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

习题 1-3

1. 判定下列矩阵是否可逆？若可逆，用伴随矩阵法求其逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \dfrac{1}{2} \\ \sin 2\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. 求下列矩阵的秩.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

3. 求下列矩阵的等价标准型.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

4. 用初等变换求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4 线性方程组

线性方程组的求解是线性代数最主要的任务，这类问题在许多领域都有着相当广泛的应用. 前面我们学习了用克莱姆法则求解 n 元 n 个方程组成的方程组，当系数行列式不为零时解的情形，但计算量往往比较大，运算麻烦. 并且，当系数行列式为零，或者未知量的个数与方程的个数不相等时，克莱姆法则不能使用. 本节将在矩阵理论的基础上进一步讨论一般线性方程组的解法.

定义 对于一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示未知量，a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 表示未知量的系数，$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 表示常数项. 当 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ 时，方程组(1)称为**齐次线性方程组**，当 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零时，方程组(1)称为**非齐次线性方程组**.

方程组(1)的矩阵表示：

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}.$$

其中，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为线性方程组的系数矩阵；$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 称为未知矩阵；

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 称为常数项矩阵.

齐次线性方程组的矩阵表示：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$.

1.4.1 用逆矩阵解线性方程组

在上述方程组的矩阵表示 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 中，若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是方阵且可逆，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

例 1 用逆矩阵解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_3=5 \\ x_1-2x_2-x_3=1 \\ -x_1+3x_2+2x_3=1 \end{cases}$.

解 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则原方程组可写成矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

因为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -2 & -1\\-1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\1 & -5 & -3\\-1 & 6 & 4\end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\1 & -5 & -3\\-1 & 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}.$$

所以，原方程组的解为 $x_1=0,x_2=-3,x_3=5$.

用逆矩阵求解方程组，在求出系数矩阵的逆矩阵时，可以得到方程组的解. 但当系数矩阵不是方阵或虽是方阵而不可逆时，这种方法则不能使用. 下面讨论方程组更一般性的解法.

1.4.2　用初等行变换解线性方程组——高斯消元法

我们知道：

(1)对调方程组的两个方程；

(2)一个方程的两边同乘以一个非零常数；

(3)一个方程的两边同乘以一个常数后加在另一个方程上.

以上做法都不会改变方程组的解，称为方程组的同解变换.

对于一般线性方程组(1)，将其系数矩阵与自由常数项矩阵合成一个矩阵

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix},$$

称为**方程组的增广矩阵**.

对线性方程组的同解变形等价于对其增广矩阵的一系列初等行变换. 由矩阵的初等行变换解方程组的方法叫**高斯消元法**.

例 2　用高斯消元法解线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=3\\x_1+4x_2+3x_3=1\\2x_1+3x_2+4x_3=3\end{cases}$.

解　对增广矩阵作初等行变换

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&3&2&3\\1&4&3&1\\2&3&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{pmatrix}1&3&2&3\\0&1&1&-2\\0&-3&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&3&2&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_3}\begin{pmatrix}1&3&2&3\\0&1&1&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&3&2&3\\0&1&0&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+(-3)r_2]{r_1+(-2)r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&6\\0&1&0&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}.$$

由最后一个矩阵可知，方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=6\\x_2=1\\x_3=-3\end{cases}.$$

在例 2 解题中，也可对增广矩阵施行初等行变换到第四个阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix}1&3&2&3\\0&1&1&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$，写出同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=3\\x_2+x_3=-2\\x_3=-3\end{cases}.$$

从后到前依次求出各个未知量的值，得方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=6\\x_2=1\\x_3=-3\end{cases}.$$

例 3 用高斯消元法解线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\x_2+x_3-4x_4=1\\x_1+2x_2+3x_3=4\\2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6\end{cases}$.

解 对增广矩阵作初等行变换

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\1&2&3&0&4\\2&3&-1&-1&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\0&1&1&-3&3\\0&1&-5&-7&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\0&0&0&1&2\\0&0&-6&-3&-9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&1&-4&1\\0&0&2&1&3\\0&0&0&1&2\end{pmatrix},$$

得到阶梯形矩阵，因此有同解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\x_2+x_3-4x_4=1\\2x_3+x_4=3\\x_4=2\end{cases}.$$

从后到前依次求出各个未知量的值，得方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{29}{2}\\x_2=\dfrac{17}{2}\\x_3=\dfrac{1}{2}\\x_4=2\end{cases}.$$

1.4.3 矩阵的秩与线性方程组解的讨论

【思考】 解方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=5\\2x_1-x_2+3x_3=1\\4x_1-5x_2+9x_3=11\end{cases}$.

分析：观察方程组可知，第三个方程即为第一个方程乘以 2 后再与第二个方程相加得到的结果，即本方程组在形式上虽然有三个方程，但是有效方程只有两个. 因为方程的个数少于未知数的个数，所以方程组有无穷多个解.

记方程组的增广矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&-2&3&5\\2&-1&3&1\\4&-5&9&11\end{pmatrix},$$

则

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&-2&3&5\\2&-1&3&1\\4&-5&9&11\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{\substack{r_3+(-4)r_1\\r_2+(-2)r_1}}\begin{pmatrix}1&-2&3&5\\0&3&-3&-9\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}r_2\\r_1+2r_2}}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

从上面的结果可以看出，有效方程有两个，第三个方程为多余方程，且 x_1，x_2 的值可用 x_3 及常数项表示，即$\begin{cases}x_1=-1-x_3\\x_2=-3+x_3\end{cases}$就是该方程组的解.

对于线性方程组，不论方程组的未知数个数与方程个数有多少，只要对方程组的增广矩阵施以一系列初等行变换与列对调（对应方程组两个未知数位置的整体对调），总能使之成为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \xrightarrow{\text{一系列初等行变换及列对调}} \left(\begin{array}{cccccc:c} 1 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)=\boldsymbol{E}.$$

矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的秩数 $R(\boldsymbol{E})$ 就是原方程组中去掉多余方程后的方程个数(其中包括矛盾方程);又因为 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{E})$,容易看出有下列结论成立.

定理 1 对于线性方程组,当 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{E})$ 时,方程组必定有解.

(1)当 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{E})=n$($n$ 为未知数个数)时,有唯一一组解;

(2)当 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{E})<n$ 时,有无穷多组解.

定理 2 当 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})\neq R(\boldsymbol{E})$ 时,方程组中有矛盾方程,此时方程组无解.

定理 3 当 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})<m$($m$ 为方程组中方程的个数)时,方程组中有多余方程.

当常数列矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 时,线性方程组称为齐次线性方程组. 容易想到,齐次线性方程组总有解[因为 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})$],至少 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 是一组解.

例 4 用高斯消元法解下列方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 3x_1-4x_2+2x_3=4 \\ 2x_1-3x_2-x_3=0 \end{cases}$.

解 对该方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-3)r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}r_3]{r_3+(-2)r_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_2+3r_3 \\ r_1+2r_2 \\ r_1+(-1)r_3}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

因为 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{E})=3=n$,所以方程组有唯一的解

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例 5 讨论 λ 为何值时,下列方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

(1)有唯一的解;(2)有无穷多组解;(3)无解. 有解时写出解的结果.

解 因为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&\lambda^2\\1&\lambda&1&\lambda\\\lambda&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+(-\lambda)r_1]{r_2+(-1)r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda^3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(\lambda\neq1)]{\left(\frac{1}{\lambda-1}\right)r_2,\ \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)r_3}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&1&-1&-\lambda\\0&1&1+\lambda&1+\lambda+\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow[(\lambda\neq-2)]{r_3+(-1)r_2,\ \left(\frac{1}{2+\lambda}\right)r_3}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&1&-1&-\lambda\\0&0&1&\dfrac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3,\ r_1+(-\lambda)r_3,\ r_1+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-\dfrac{1+\lambda}{2+\lambda}\\0&1&0&\dfrac{1}{2+\lambda}\\0&0&1&\dfrac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}\end{pmatrix}.$$

(1)当 $\lambda\neq1,\lambda\neq-2$ 时,$R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{E})=3=n$,方程组有唯一一组解,解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1+\lambda}{2+\lambda}\\\dfrac{1}{2+\lambda}\\\dfrac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}\end{pmatrix}.$$

(2)当 $\lambda=1$ 时,$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$.

当 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{E})=1<n$ 时,方程组有无穷多组解,且因为 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=1<m$,所以方程组有多余方程.此时原方程组同解于方程 $x_1+x_2+x_3=1$.令 $x_2=c_1,x_3=c_2$,则原方程组的解为

$$\begin{cases}x_1+c_1+c_2=1\\x_2=c_1\\x_3=c_2\end{cases}\quad(c_1,c_2\text{ 为任意常数}).$$

也可做以下考虑,

$$\begin{cases}x_1=1-c_1-c_2\\x_2=0+c_1+0\cdot c_2,\\x_3=0+0\cdot c_1+c_2\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

这也是方程组所有解的通式,称为通解.

(3)当 $\lambda=2$ 时,

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+2r_1]{\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\ r_2+(-1)r_1}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&3&-3&9\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&3\end{array}\right).$$

因为 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3, R(\boldsymbol{A})=2, R(\widetilde{\boldsymbol{A}})\neq R(\boldsymbol{A})$，所以原方程组无解.

习题 1-4

1. 解下列矩阵方程.

(1) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}=(2\quad -1\quad 1)$；

(2) $\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&-1\\-3&1&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-1&4\\2&5\\1&-3\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$.

2. 求解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=0\\3x_1+x_2+2x_3=4\\x_1+2x_2-x_3=3\end{cases}$；

(2) $\begin{cases}5x_1-2x_2+4x_3-3x_4=0\\-3x_1+5x_2-x_3+2x_4=0\\x_1-3x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$；

(3) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=2\\-2x_2-5x_3=-3\\3x_1+4x_2+3x_3=-2\end{cases}$；

(4) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3\\x_1+2x_3=6\\x_2+x_3=3\\3x_1-x_2-4x_3=13\end{cases}$；

(5) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\x_2-x_3+x_4=-3\\x_1+3x_2+x_4=1\\-7x_2+3x_3+x_4=-3\end{cases}$；

(6) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=2\\4x_1-7x_2+4x_3-4x_4=5\\x_2-x_3+3x_4=1\\2x_1-4x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$.

3. 当 p,q 满足什么关系时，齐次线性方程组 $\begin{cases}px_1+x_2+x_3=0\\x_1+qx_2+x_3=4\\x_1+(p+q)x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解？

4. 确定 L,m 取何值时，下列方程组无解，有唯一解，有无穷多组解.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6\\2x_1+3x_2+x_3=-1\\x_1+x_2+Lx_3=-7\\3x_1+5x_2+4x_3=m\end{cases}.$$

◎数学文化聚焦

代数观念的变革时期

18 世纪数学发展的主流是微积分学的扩展，由于微积分与力学和天文学问题的紧密相

联和运用,不仅使这些自然科学领域迅猛发展,同时也使得微积分理论在18世纪末达到了一种相对完美的程度.

19世纪是数学史上创造精神和严格精神高度发扬的时代.复变函数论的创立和数学分析的严格化、非欧几何的问世和射影几何的完善、群论和非交换代数的诞生,是这一世纪典型的数学成就.它们所蕴含的新思想深刻地影响着20世纪的数学.

19世纪欧洲的社会环境也为数学发展提供了适宜的舞台,法国资产阶级大革命所造成的民主精神和重视数学教育的风尚,鼓励大批有才干的青年步入数学教育和研究领地.法国在19世纪一直是最活跃的数学中心之一,涌现出一批优秀人才,如傅里叶、泊松、彭赛列、柯西、刘维尔、伽罗瓦、埃尔米特、若尔当、达布、庞加莱、阿达马.他们在几乎所有的数学分支中都做出了卓越贡献.法国革命的影响波及欧洲各国,使整个学术界思想十分活跃,突破了一切禁区.

英国新一代数学家打破了近一个世纪以来以牛顿为偶像的故步自封的局面,成立了向欧洲大陆数学学习的"分析学会",使英国进入了世界数学发展的潮流.皮科克、格林、哈密顿、西尔维斯特、凯莱、布尔等英国数学界的杰出人物在代数学、代数几何、数学物理方面的成就尤为突出.

代数学思想的革命就发生在19世纪这个伟大的年代.19世纪的代数有两个看上去似乎针锋相对的特征:一个是越来越一般化、越来越抽象的趋势;另一个是专注于一些受约束的表达式.这种表面上的针锋相对直接关系着19世纪代数学家们提出并希望回答的问题在种类上的改变.

1830年,乔治·皮科克的《代数学》问世,书中对代数运算的基本法则进行了探索性研究.在这之前,代数的符号运算实际仅是实数与复数运算的翻版.皮科克试图建立一门更一般的代数,它仅是符号及其满足的某些运算法则的科学.他和德·摩根等英国学者围绕这一目标的工作,为代数结构观点的形成及代数公理化研究做了尝试,由此开启了代数系统的讨论.因而皮科克被誉为"代数中的欧几里得".

代数中更深刻的思想来自数学史上传奇式的人物——伽罗瓦.1829—1832年,伽罗瓦提出并论证了代数方程可用根式解的普遍判别准则,从概念和方法上为最基本的一种代数结构——"群"理论奠定了基础.

伽罗瓦在1832年去世前,几次向巴黎科学院递交他的论文,均未获答复.他的理论在1846年由刘维尔发表之前几乎无人知晓,到19世纪60年代后才引起重视,这是数学史上新思想历经磨难终放异彩的最典型的例证.19世纪60年代末,若尔当担起了向数学界阐明伽罗瓦理论的重任,在发表于1870年的《置换论》中,他对置换群理论及其与伽罗瓦方程论的联系做出清晰的总结,为群论在19世纪最后30年间的发展奠定了基础.

这一时期还诞生了代数不变量理论,这是从数论中的二次型及射影几何中的线性变换引申出的课题.1841年左右,凯莱受布尔的影响开始研究代数型在线性变换下的不变量.之后,寻找各种特殊型的不变量及不变量的有限基,成为19世纪下半叶最热门的研究课题,进而开辟了现在称为"线性代数"的研究领域.

虽然线性代数作为一个独立的数学分支到20世纪才形成,然而它的历史却非常久远.中国古代的"鸡兔同笼"问题实际上就是一个简单的线性问题,即最古老的线性问题是线性方程组的求解,在中国古代数学著作《九章算术·方程》中已经做了比较完整的叙述,其中所

述方法实质上相当于现代的对方程组的增广矩阵施行初等变换,消去未知量的方法.

由于费马、笛卡儿和莱布尼茨的工作,现代意义的线性代数基本上出现于17世纪.到18世纪末,线性代数的领域还只限于平面与空间.到19世纪上半叶完成了到n维线性空间的过渡.随着研究线性方程组和变量的线性变换问题的深入,行列式和矩阵理论在19世纪先后完善,为处理线性问题提供了有力的工具,从而推动了线性代数理论的发展.

早在17世纪后期,在关孝和及莱布尼茨的工作中就已经涉及行列式的早期思想,后经克莱姆、范德蒙、柯西等人的工作,到19世纪已取得了丰硕的成果.从某种意义上来说,行列式的系统化以及行列式的现代表示就是在19世纪完成的.1841年,凯莱发表了一篇名为《论位置几何学》的文章,在其中给出了行列式的现代符号.1850年,西尔维斯特提出了“矩阵”一词,1858年,凯莱发表了“关于矩阵理论的论文”,系统地提出矩阵概念及其运算法则,在凯莱之后,矩阵理论不断完善,不仅成为数学中的锐利武器,还是描述和解决物理问题的有效武器.另外,矩阵是又一类不满足乘法交换律的数学对象,它和群论都是推动抽象代数观点形成和发展的重要因素.

历经19世纪数学家的工作,数学不再局限于数和连续量的问题,破天荒第一次清楚地表达了这样一种观点:数学的本质特征更多地在于它的形式,而不是它的内容.

◎数学家简介

数学王子——高斯

幼年被誉为“神童”的卡尔·弗里德里希·高斯(Garl Friednich Gauss)是德国数学家、物理学家和天文学家.1777年4月30日生于德国的布伦瑞克,1855年2月23日病逝于哥廷根,终年78岁.他与阿基米德、牛顿一起被称为历史上最伟大的三位数学家.这位罕见的数学天才,用他光辉的数学成就和异常敏捷的数学思维为后人留下了许许多多近乎神话的传说.

高斯有一个很出名的故事:用很短的时间计算出了小学老师布置的任务——对自然数从1到100的求和.他所使用的方法是对50对构造成和101的数列求和(1+100,2+99,3+98,…),同时得到结果5 050.这一年,高斯9岁.这是一次令人难以置信的数学能力的显露.这使得高斯的老师布特纳和布伦瑞克公爵认识到了高斯在数学上异乎寻常的天赋,这个天才儿童给他们留下了深刻印象.于是他们从高斯14岁起便资助其学习与生活.

高斯12岁时,已经开始怀疑几何学中的一些基础证明.而当他16岁时,则预测在欧氏几何之外必然会产生一门完全不同的几何学,即非欧几里得几何学.高斯最终成为微分几何的始祖之一.

1795年,18岁的高斯进入哥廷根大学学习.次年,在他19岁时,第一个成功地证明了正十七边形可以用尺规作图.1799年,高斯在他的博士论文中给出了代数基本定理的圆满证明,并将其成功地运用到无穷级数中,从而发展了数学分析的理论.

1807年,高斯成为哥廷根大学的教授和当地天文台的台长.1818—1826年,高斯主导了汉诺威王国的大地测量工作,并通过最小二乘法为基础的测量平差的方法和求解线性方程组的方法,显著地提高了测量精度.此后数学上著名的算法“最小二乘法”和“高斯消元法”风靡于世.

汉诺威王国的大地测量工作于 1848 年结束. 这是大地测量史上的巨大工程. 如果没有高斯在理论上的仔细推敲,在观测上力图合理和精确,在数据处理上尽量周密和细致,就不可能圆满地完成.

出于对实际应用的兴趣,高斯发明了日光反射仪. 日光反射仪可以将光束反射至大约 450 km 以外的地方. 高斯后来不止一次地对原先的设计做出改进,试制成功了后来被广泛应用于大地测量的镜式六分仪. 此外,高斯还因为发明了磁强计而转向物理的研究. 他与比他年轻 27 岁的韦伯(1804—1891 年)在电磁学领域以亦师亦友的身份共同工作. 1833 年,通过受电磁影响的罗盘指针,他向韦伯发送出电报. 这不仅是韦伯实验室与天文台之间的第一个电话电报系统,也是世界第一个电话电报系统. 尽管线路只有 8 km 长. 1840 年,他和韦伯画出了世界上的第一张地球磁场图,并且定出了地球磁南极和磁北极的位置. 次年,这些位置得到美国科学家的证实.

高斯作为一个数学家闻名于世,他越来越多的学生,包括后来闻名于世的戴德金和黎曼等都成了有影响的数学家.