

# 小学数学解题概述



## 知识目标

1. 理解小学数学解题的相关概念。
2. 了解小学数学解题的意义及作用。



## 能力目标

1. 培养数学解题的基本思维能力。
2. 提高学生从事小学教师职业所必备的专业素养。



## 思政目标

了解数学解题的育人功能,培养辩证唯物主义观点。

数学解题研究是我国数学教育与研究的一项传统,古典名著《九章算术》以九卷 246 道题及其解答术构成篇章,开创了中国传统数学研究与数学教育研究的范式。近年来,我国的数学教育工作者在借鉴国内外同行研究成果的基础上,对解题的实践与理论开展了广泛的探索,并投入了大量精力,多角度地探求解题的规律与特征,取得了巨大的进展。例如,罗增儒的《数学解题学引论》通过对解题过程、解题经验、解题活动的总结和分析,归纳了解题的方法与技巧;戴再平的《数学习题理论》通过对习题的结构、功能、科学性等问题进行深入讨论,提出了判断数学题科学性的几条标准,并对开放题的特点及教育功能进行了详细的理论分析;单遵的《数学竞赛研究教程》分 50 个专题对数学竞赛题目的出题范围、解题思想、解题方法、解题模式进行了全面的论述。

《义务教育数学课程标准》(2022 年版)(以下简称《课标》)强调关注学生思维能力的培养,提出学生通过数学学习要“会用数学的眼光”观察问题,“会用数学的思维”思考问题,“会用数学的语言”表达问题。要“发展运用数学知识与方法发现、提出、分析和解决问题的能力”。本章旨在总结前人的经验及成果,并在此基础上探讨小学数学解题的相关概念、作用、意义及解题教学的要求和步骤。

## 第一节

## 有关概念的初步界定

## 一、数学题

## 1. 数学题的定义

数学题(简称题)是指数学上要求回答或解释的题目、需要研究或解决的矛盾。

对于数学家而言,未知的数学题被称为题,一些解决了的数学题被称为定理或公式。对于学生而言,结论已知的数学题目也称为题。这时候的数学题是“要求回答或解释的题目”,指的是为实现教学目标而要求师生解答的问题系统,既包括需要计算的答案、需要证明的结论(含定理、公式)、需要画出的图形、需要判断真假的命题、需要建立的概念、需要解决的实际问题等内容,也包括课堂提问、例题、练习、课外作业和测验考试题及一些研究性、应用性课题等内容。

## 2. 数学题的特点

乔治·波利亚在《数学的发现》中将数学问题理解为“有意识地寻求某一适当的行动,以便达到一个被清楚地意识到但又不能立即达到的目的”,“解决问题是寻找这种活动”。1986年第六届国际数学教育大会的一份报告指出:“一个(数学)问题是一个对人具有智力挑战特征的、没有现成的直接方法、程序或算法的未解决的情境。”例如,鸡兔同笼问题可能对于小学低年级学生构成问题;对于中、高年级的小学生来说,可以通过假设法进行“问题解决”;对于初中高年级学生来说,因为他们已学习了二元一次方程组及一元二次方程的解法,鸡兔同笼问题就不再构成问题(只是练习题)。

在小学数学中,传统的数学练习题的内容是众人熟知的,学生通过对教材例题的模仿和操作练习就能完成;其结构是常规的,答案是确定的,条件不多不少,可以按照现成的公式或常规的思路得到解决。传统数学题的主要目的在于巩固基础和变式训练,具有接受性、封闭性和确定性的特点。

在新课改背景下,小学数学题一方面更重视生活化,把生活实践当作学生认识发展的载体,把数学习题与生活实践紧密地联系起来,使学生认识到学习数学的有用、有趣,使其感受到学习数学的愉悦;另一方面更强化思维能力、科学素养及探究精神的培养,通过数学游戏、名题趣题及数学家的故事等多种形式吸引学生的注意力,激发学生的学习兴趣,树立学生在学习中的主导地位,从而达到引起学生主动探究的目的。

## 3. 小学数学题的种类

小学数学题按不同的标准有不同的分类方式,主要有以下几种。

(1)按习题的形式差异可将其分为式题、文字题、应用题、作图题等。式题是指参与运算

的数与对这些数的运算及运算顺序都有相应的数学符号表述清楚,即不仅给出了已知数,还通过运算符号及括号直接指明了运算方法和顺序的数学题。文字题是指将几个已知数量用数学术语联结起来的数学题,这些数学术语指明了运算方法和运算顺序。应用题是指不仅包含了实际的背景情节,还通过具体的情节表述了数量之间的关系的数学题。应用题有数据,但没有直接指明要对这些数据按什么运算顺序进行什么样的运算。

(2)按习题的结构差异可将其分为封闭题和开放题等。封闭题是指具有完备的条件和确定的答案的习题。开放题是指答案不确定或条件不完备的习题。

(3)按习题的功能差异可将其分为基本题、拓展题、探究题等。

(4)按教学需要的差异可将其分为基本性练习题、单一性练习题、综合性练习题、准备性练习题、针对性练习题、对比性练习题、尝试性练习题、发展性练习题、创造性练习题、诊断性练习题、变式性练习题、实践性练习题等。

## 二、解数学题

解题就是解决问题,即求出数学题的答案,这个答案在数学上也称为“解”。所以,解题就是找出题的解的活动。学生算出习题的答案,教师讲完定理的证明,由数学命题得出肯定或否定的结论,构建出实际问题的模型等,都称为解题。数学家的解题是一个创造和发现的过程,数学教学中的解题是一个再创造和再发现的过程。

数学的解题过程是一条寻找已知通往未知的通道,是一种探究的过程。它从问题中提取信息并将问题置于知识背景之中,忽略无用的、非本质的因素,用相关的定义、概念和知识对问题做出明确的表述,以寻求从已知到目标的合理途径。在这个过程中有猜测、有联想、有顿悟,最终有所发现,得到结果。

## 三、解题教学

### (一)解题教学的基本含义

解题教学是指学生在教师的引导下,通过对典型数学题的学习,探究、获得数学问题解决的基本规律,引导学生学会“数学思维”的教学过程。在数学教学过程中,解题是一种最基本的活动形式,无论是数学概念的形成、数学命题的掌握、数学方法与技能的获得,还是学生能力的培养与发展,都要通过解题活动来完成。

### (二)解题教学的基本形式

解题教学包括例题教学和习题教学。例题教学往往是以教师为主导的示范性活动,在这一活动中,教师引导学生将概念、命题应用于数学问题的解决过程。习题教学则是以学生为主体的活动,在这一活动中学生按照教师的示范和通过对例题的模仿,把数学知识应用于解题实践之中。

### (三)解题教学的基本要求

#### 1. 目的性

例题、习题的选配应该有明确的目的性,针对某一概念、法则、性质或方法的应用要做到

有的放矢。

### 2. 示范性

解题教学中需要教师的示范,让学生通过例题的教学,遵循和模仿基本的解题方法,掌握基本的解题模式和解题技能,能用正确的格式表达解题过程。

### 3. 启发性

解题教学应充满启发性思维,能充分发挥学生的主体作用,引导学生积极思考。

### 4. 变通性

解题教学中提倡由特殊到一般、抽象概括、总结规律、推广应用等活动,使学生弄清基本规律的来龙去脉,使其思维得到优化、概括能力得到发展。教师要采用一题多解、变式训练等不同的方式和角度分析问题、解决问题,以培养学生选择最优解法的能力。

### 5. 方法性

教师在解题教学时,不仅要给学生讲解题目的解法,更要注重讲解解法的发现过程,避免学生只知其然而不知其所以然,只会简单机械地模仿。教师要重视解题的思维过程,把解题思路的探索过程(包括成功的思路和失败的尝试)呈现给学生,在解题中渗透数学思想,引导学生学会解题,提高其思维能力。

## 四、解题策略

数学的解题策略是为了实现解题目标而采取的方针。解题策略的思维基础是逻辑思维、形象思维和直觉思维。

戴再平在《数学习题理论》中提出了八个解题策略:枚举法、模式识别、问题转化、中途中、以退求进、推进到一般、从整体看问题、正难则反。

任樟辉在《数学思维论》中提出了十个解题策略:以简驭繁、进退互用、数形迁移、化生为熟、正难则反、倒顺相通、动静转换、分合相辅、引参求变、以美启真。并且认为数学思维策略的研究就是数学解题策略的研究。

罗增儒在《数学解题学引论》中提出了十个解题策略:模式识别、映射化归、差异分析、分合并用、进退互化、正反相辅、动静转化、数形结合、有效增设、以美启真。

解题策略介于具体的求解方法和抽象的解题思想之间,是思想转化为方法的桥梁。一方面,它是用来指导解题过程的具体方法;另一方面,它是运用解题方法的方法、寻找解题方法的方法、创造解题方法的方法。



### 思考与练习

- (1)请你对小学数学题进行分类,说出你的分类标准。
- (2)你觉得在解题教学过程中教师应该注意哪些问题?请通过案例进行说明。

## 第二节

# 小学数学解题的作用及意义

乔治·波利亚认为,“掌握数学就意味着善于解题”,可见小学数学解题在小学数学教育中有着重要的作用及意义。

### 一、解题是数学的核心内容

问题是数学的心脏,解题是数学研究与数学学习的主要活动。美国数学家哈尔莫斯认为:“数学家存在的主要理由就是解问题,数学的真正的组成部分是问题和解。”对于数学工作者来说,“题”是研究的对象,“解”是研究的目标,“解题”是数学活动的基本形式和主要内容,“解题”也是数学活动的存在目的和兴奋中心。对于数学教学而言,不仅要把“题”作为研究的对象,把“解”作为研究的目标,而且要把“解题”也作为研究的对象,把“开发智力、促进人的发展”作为数学学习活动的目标。解题是真正发生在数学教育中的关键环节。

### 二、解题是学生掌握知识、形成数学能力的基本途径

初学数学概念、公式、法则的小学生基础薄弱,对知识的理解不够深入,容易产生错误的观点。解题教学能使教师及时发现学生学习过程中存在的问题,并及时纠正其错误的观点,帮助其正确掌握知识。

另外,小学生数学概念的掌握、数学技能的熟练、数学定理的理解、数学能力的培养及数学素质的提高等都离不开解题实践活动。

### 三、解题是培养学生思维能力和良好心理品质的重要方法

概念、定理、法则、公式同属于数学对象,拥有着共同的属性,可用于解决一系列的数学问题。通过解题教学,学生不仅可以加深对概念、定理、法则、公式的理解,达到思维训练的目的,还可以形成数学基本技能,为以后更高难度的数学学习奠定坚实的基础。

经常进行数学解题练习既可以培养学生认真负责、有始有终、一丝不苟的优良品质,也可以培养学生形成勇于克服困难的顽强意志和主动完成任务的工作精神。这些良好的心理品质对学生的成长及以后的工作都极为重要。

### 四、解题是评价学生学习效果的重要方式

解题教学及对学生的解题作业的分析可以帮助教师检查学生的认知水平,了解学生的解题能力,为其教学内容的设计和教法的调整提供依据。

尽管解题不是唯一的评价学生数学学习效果的方式，但它是当前用得最多、操作最方便、公众认可度较高的一种方式。可以这样认为：解题贯穿于认知主体的整个学习生活乃至整个生命历程，它既是内在的个人追求，也是外在的工作需要。



### 思考与练习

- (1) 数学解题活动对于小学生学习数学有哪些作用？
- (2) 你认为影响小学生数学解题能力提升的因素有哪些。

## 第三节

# 小学数学解题的要求及步骤

解题过程是指人们寻找问题解答的活动，它包括从接触问题到完全解出问题的所有环节与步骤。经过规范化的可操作的解题过程就是解题程序。

### 一、解题程序

#### (一) 国外对解题程序的研究

在国外诸多对解题程序的研究成果中，较为著名的是乔治·波利亚的“怎样解题表”，它包括“弄清问题”“拟订计划”“实现计划”和“回顾”四个步骤，具体内容如下：

##### 1. 弄清问题

弄清问题即弄清问题未知的是什么，已知的是什么，条件是什么，条件是否充分或者多余；如果画张图，在其中引入适当的符号把条件的各个部分分开，能否把它们全都写下来。

##### 2. 拟订计划

拟订计划即找出已知与未知之间的联系，回顾以前是否见过这个问题，或类似的但是形式稍有不同的问题，或与此问题有关的其他问题；是否知道一个可能用得上的定理；是否能够利用这个问题及其结果，能否利用它的方法；为了能利用这个问题，是否应该引入某些辅助元素；如果不能解决所提出的问题，可否先解决一个与此有关的问题，或一个更容易着手的问题，或一个更普遍的问题，或一个更特殊的问题，或一个类似的问题；能否解决这个问题的一部分，仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知能确定到什么程度，它会怎样变化；能否从已知数据推导出某些有用的东西，能否想出适合于确定未知的其他数据；能否改变未知或数据，或者二者都改变，以使新未知和新数据彼此更接近；是否利用了所有的已知数据，是否利用了整个条件，是否考虑了包含在问题中的必要的概念；等等。

##### 3. 实现计划

实现计划即实现求解的计划，检验每一步骤，确定这一步骤的正确性，并证明所做的每一步骤。

#### 4. 回顾

回顾即及时总结解题的经验与教训,判断自己能否检验这个结果,能否用其他方法推导出这个结果,能否对这个结果做出改进或推广,能否把这个结果或方法用于解决其他问题,能否提出新的问题。

#### (二)国内对解题程序的研究

在国内诸多对数学解题程序的研究成果中,比较著名的是解题动态流程及解题机制的控制论模型。

##### 1. 解题动态流程

面对一个问题,首先应审题,并对其进行模式识别。如果有现成的模式,则直接给出解答;如果没有现成的模式,则选择合适的解题策略,接着判断阶梯问题是否有效,有效就得出解答,无效再回到审题环节重新进行解题。在审题时,无论是否有现成的模式,最后得到的解答都需要进行验证,如图 1-1 所示。

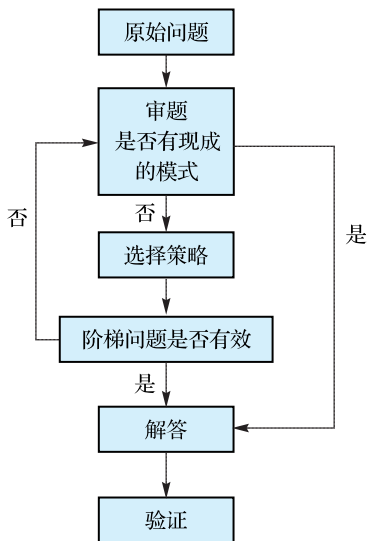


图 1-1

##### 2. 解题机制的控制论模型

根据控制论的“反馈-控制”原理,有专家提出了解题机制的控制论模型,如图 1-2 所示。

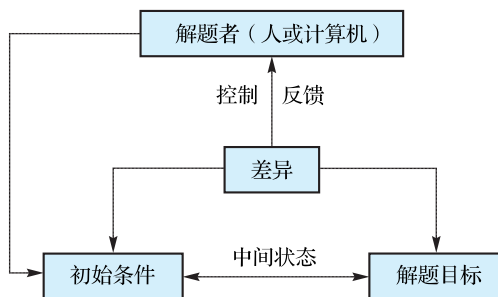


图 1-2

该模型要求解题者首先按照问题的要求确立一个解题目标，然后比较初始条件、中间状态与解题目标之间的差异，以此来调整和确定解题方向，使差异逐步缩小，最终实现解题目标。

## 二、解题训练

传统的解题训练通常需要经历以下四个阶段。

### 1. 模仿

学生通过简单地模仿教师的示范或教科书的例题去解题。这是一个模仿者通过被模仿者的行为获得相应的表象，从而产生类似结果的过程，在这一过程中学生通过解题体验初步理解解题方法。

### 2. 变式

变式即学生在简单模仿的基础上迈出主动实践的一步，其主要表现为学生做足够数量的形式变化的习题，其本质是学生对所学的基础知识进行操作性活动与初步应用。变式的作用首先是通过变换问题形式和增加训练次数使学生达到增强理解、巩固记忆、熟练技能（使其形成条件反射）的效果；其次是通过必要的实践使学生积累、掌握该知识所需要的操作数量、活动强度和经验体会。

学习数学虽然不能单靠模仿和练习，但这两步却是不可或缺的。如果没有亲身的体验、没有足够的练习、没有过硬的“双基”（基础知识、基本技能），那么学习者对于数学的理解就会被架空。模仿和变式练习应是学生获得本质领悟的基础或必要前提，对于解题者来说，更重要的是跨越这两步而产生新的理解。

### 3. 领悟

领悟即学生在模仿与变式的基础上产生新的理解，是当事者在解题实践中领悟到了知识的深层结构，具体表现为当事者的豁然开朗和恍然大悟。这种领悟常常是直觉性的，“只可意会，不可言传”。因而，这是一个潜意识与显意识相互交错、由“双基”升华为能力的过程，也是学生自己去体会“解题思路的探求”“解题能力的提高”“解题策略的形成”，从而获得自身能力增长与实质性提高的过程。

### 4. 提升

提升是学生在数学学习过程中从自发到自觉、从被动到主动、从感性到理性的飞跃阶段，具体表现为解题思路的主动设计、模式的形成、知识的应用及解题策略的自觉调控。



## 思考与练习

- (1) 你觉得解题教学对学生以后的发展有什么作用。
- (2) 请自行设计一道小学数学题，用乔治·波利亚的“怎样解题表”的四个步骤解题并进行模拟教学。