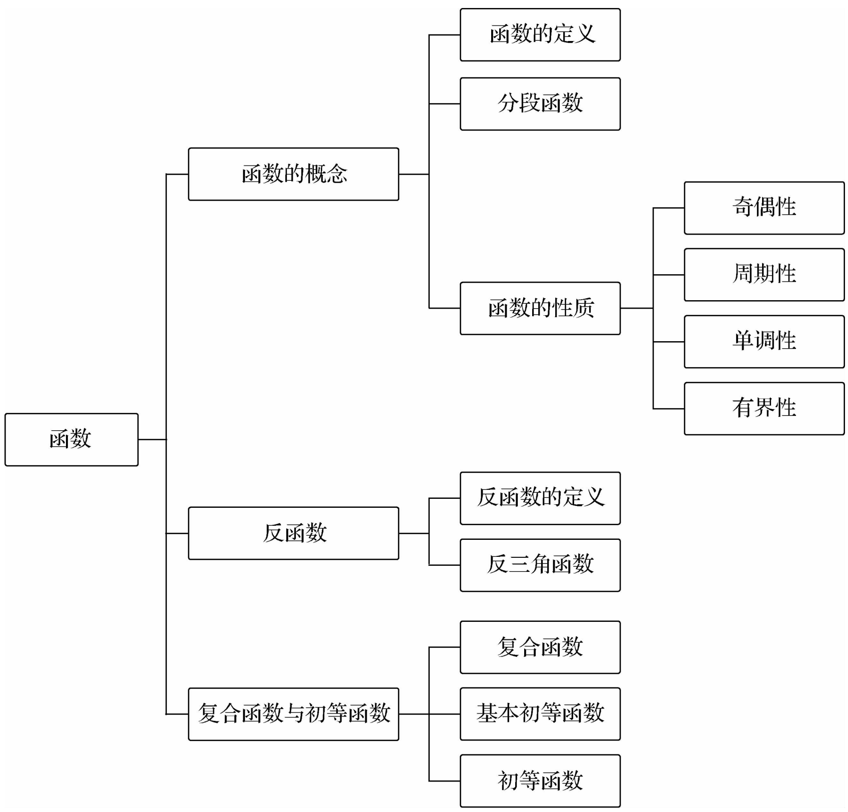
第一章　函　　数

【思维导图】



【知识归纳与总结】

一、函数的定义

变量 x 的取值范围是 D，对任意 $x(x\in D)$ 按照某种对应法则 f，总有唯一确定的 y 与之对应，则 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

构成函数的两个要素：定义域 D 和对应法则 f.

二、分段函数

在定义域的不同范围内用不同的解析式来表示的函数称为分段函数.

例如,分段函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -2\leqslant x<0 \\ 0, & x=0 \\ 3-x, & 0<x<3 \end{cases}$ 的定义域为$[-2,3)$.

三、函数的性质

1. 奇偶性

奇函数:$f(-x)=-f(x)$,图像关于原点对称.

偶函数:$f(-x)=f(x)$,图像关于 y 轴对称.

2. 周期性

若 $f(x+T)=f(x)$(T 为正数),则 $f(x)$为周期函数,T 为周期.

3. 单调性

单调增加函数:当 $x_1<x_2$ 时,$f(x_1)<f(x_2)$.

单调减少函数:当 $x_1<x_2$ 时,$f(x_1)>f(x_2)$.

4. 有界性

若$|f(x)|\leqslant M$(M 为正数),则 $f(x)$为有界函数.

四、反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 A. 若对于数集 A 中的每个数 y,在 D 中都有唯一的一个数 x 使 $f(x)=y$ 成立,则称 x 是变量 y 的函数,记为 $x=f^{-1}(y)$. 称 $x=f^{-1}(y)$为 $y=f(x)$的反函数. 通常用 x 表示自变量,将 x 与 y 交换,将反函数表示成 $y=f^{-1}(x)$.

注意:(1)函数 $y=f(x)$在其定义域 D 内,只有 x 和 y 一一对应,即每一个 x 对应唯一的 y,每一个 y 对应唯一的 x,才有反函数存在.

(2)$y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$在直角坐标系中对应同一条曲线.

$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$在直角坐标系中是关于 $y=x$ 对称的两条曲线.

(3)$y=f^{-1}(x)$的单调性与 $y=f(x)$一致.

如图 1-1 所示,函数 $y=4x-1$ 和其反函数 $y=\dfrac{x+1}{4}$的图像关于 $y=x$ 对称,且两个函数都是单调增加的.

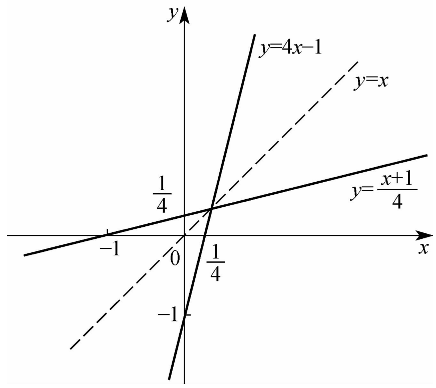


图 1-1

1. 指数函数与对数函数互为反函数

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，a 为常数），$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,+\infty)$.

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，a 为常数），$x\in(0,+\infty)$，$y\in(-\infty,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，如图 1-2 所示；当 $0<a<1$ 时，如图 1-3 所示.

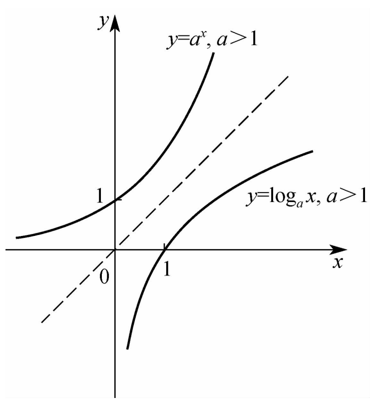


图 1-2

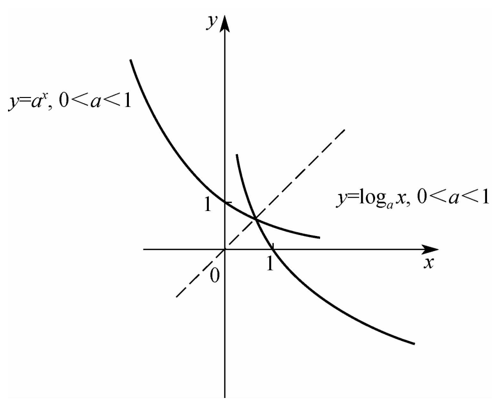


图 1-3

2. 三角函数与反三角函数互为反函数

(1)正弦函数与反正弦函数(见图 1-4).

一个单调区间内的正弦函数：$y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$y\in[-1,1]$.

一个单调区间内的反正弦函数：$y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(2)余弦函数与反余弦函数(见图 1-5).

一个单调区间内的余弦函数:$y=\cos x, x\in[0,\pi], y\in[-1,1]$.

一个单调区间内的反余弦函数:$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$.

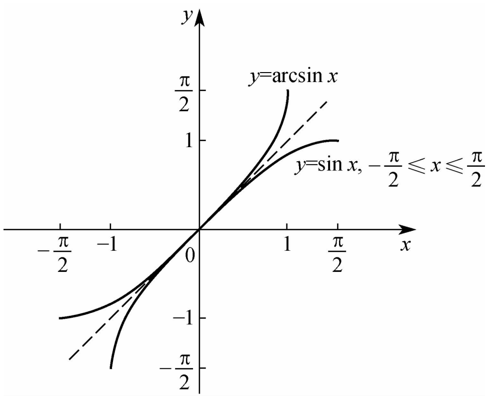


图 1-4

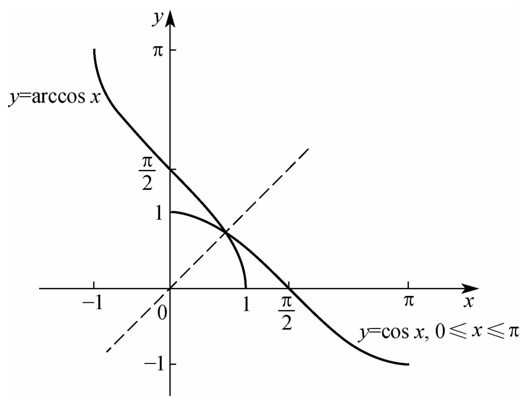


图 1-5

(3)正切函数与反正切函数(见图 1-6).

一个单调区间内的正切函数:$y=\tan x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), y\in(-\infty,+\infty)$.

一个单调区间内的反正切函数:$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

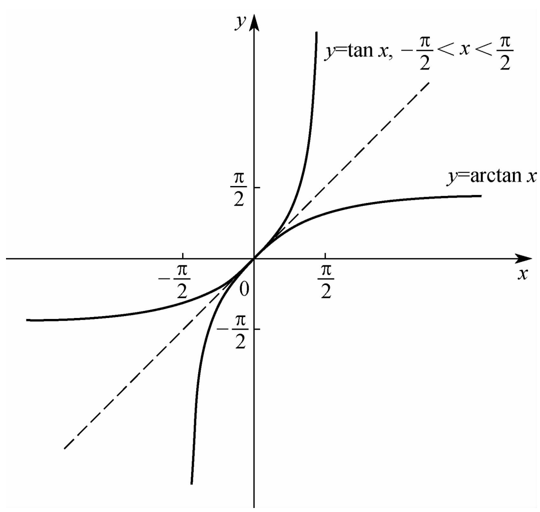


图 1-6

(4)余切函数与反余切函数(见图 1-7).

一个单调区间内的余切函数:$y=\cot x, x\in(0,\pi), y\in(-\infty,+\infty)$.

一个单调区间内的反余切函数:$y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$.

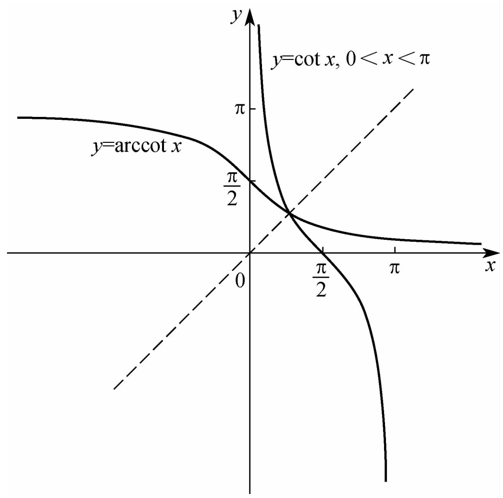


图 1-7

五、复合函数

若函数 $y=F(u)$的定义域为 U_1，函数 $u=\varphi(x)$的值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过 u 成为 x 的函数，记作 $y=F[\varphi(x)]$，称为由函数 $y=F(u)$和函数 $u=\varphi(x)$构成的复合函数.

六、基本初等函数

基本初等函数包括六种常见函数，分别是常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 指数函数、对数函数、反三角函数已经在反函数知识点内做了详细说明，此处不再赘述.

1. 常数函数

$y=C$(C 为常数)，定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$，有界，偶函数.

2. 幂函数

$y=x^\alpha$(α 为常数)，如图 1-8 所示. 根据 α 的不同，幂函数的定义域、值域、单调性、奇偶性不相同. 在第一象限内，当 $\alpha>0$ 时，单调增加；当 $\alpha<0$ 时，单调减少.

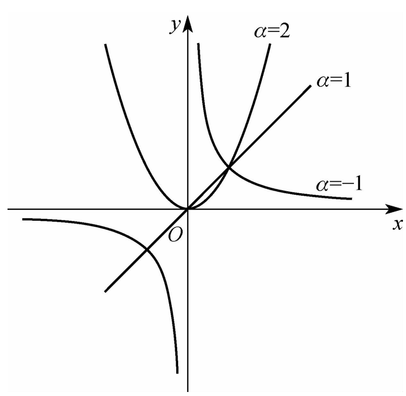
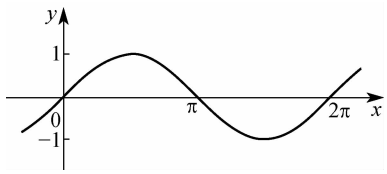
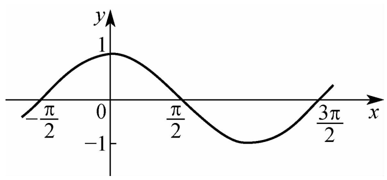
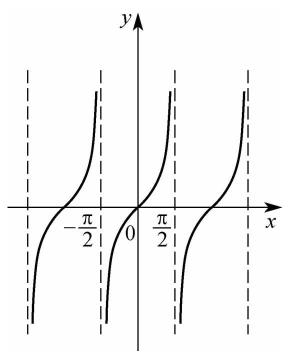
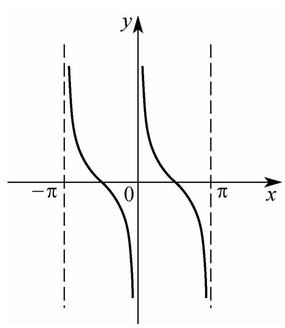


图 1-8

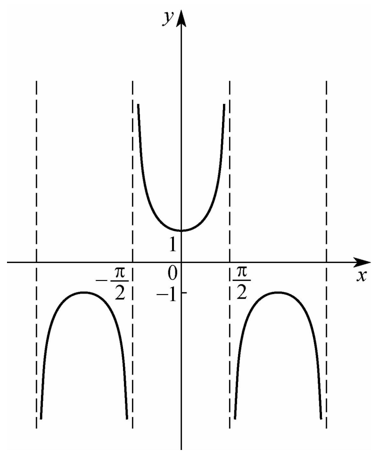
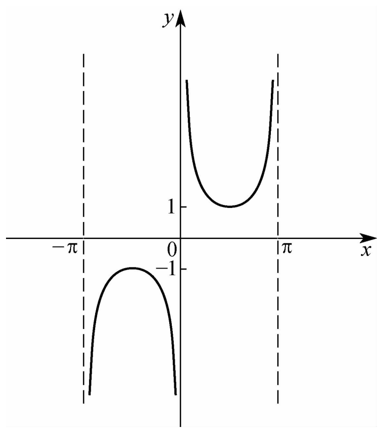
3. 三角函数

三角函数的表达式、定义域、值域、图形、性质见表 1-1.

表 1-1

三角函数及其表达式	定义域和值域	图　　形	性　　质
正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，有界，周期为 2π，在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$)
余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，有界，周期为 2π，在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 内单调增加，在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 内单调减少
正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，无界，周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，无界，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少

续表

三角函数及其表达式	定义域和值域	图 形	性 质
正割函数 $y=\sec x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$		偶函数,无界,周期为 2π,在 $\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$和$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right)$内单调增加,在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right)$和$\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少
余割函数 $y=\csc x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$		奇函数,无界,周期为 2π,在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right)$和$\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调增加,在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right)$和$\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调减少

七、初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合而成,并且可用一个数学式子表示的函数叫作初等函数.

【典型例题解析】

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{(x-2)\ln(x+5)}$的定义域.

解 由$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-2\neq 0\\ \ln(x+5)\neq 0\\ x+5>0\end{cases}$得$\begin{cases}x\geqslant 1\\ x\neq 2\\ x\neq -4\\ x>-5\end{cases}$,取交集,得到此函数的定义域为$[1,2)\cup(2,+\infty)$.

例 2 判断下列函数是否表示同一函数.

(1)$f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$,$g(x)=\dfrac{1}{x+2}$; (2)$f(x)=e^{\ln 3x}$,$g(x)=3x$.

解 (1)由 $f(x)$可知 $x^2-4\neq 0$,得 $x\neq\pm 2$,即 $f(x)$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

由 $g(x)$可知 $x+2\neq 0$,得 $x\neq -2$,即 $g(x)$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

因为 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不同,所以两个函数不是同一函数.

(2)由 $f(x)$可知 $3x>0$,即 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. $g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

因为 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不同,所以两个函数不是同一函数.

例 3 若 $f(x)$的定义域为$(-1,1)$,求 $f(\tan x)$的定义域.

解 令 $u=\tan x$,由 $f(u)$的定义域为 $u\in(-1,1)$,即 $\tan x\in(-1,1)$,求得 $x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$. 所以 $f(\tan x)$的定义域为$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.

例 4 求下列函数的反函数.

(1)$y=3x-2$; (2)$y=x^2-5$,$x\in(0,+\infty)$.

解 (1)$y=3x-2$ 的定义域和值域均为$(-\infty,+\infty)$. 将 y 作为自变量,x 作为因变量,得 $x=\dfrac{y+2}{3}$. 将 x,y 交换位置,得反函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)$y=x^2-5$ 的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-5,+\infty)$. 将 y 作为自变量,x 作为因变量,得 $x=\sqrt{y+5}$. 将 x,y 交换位置,得反函数 $y=\sqrt{x+5}$,其定义域为$(-5,+\infty)$.

例 5 求分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-9, & 0\leqslant x\leqslant 3\\ x^2, & -3\leqslant x<0\end{cases}$的反函数.

解 在 $0\leqslant x\leqslant 3$ 区间内,$f(x)=x^2-9$ 的值域为$-9\leqslant f(x)\leqslant 0$. 将 $f(x)$作为自变量,x 作为因变量,得 $x=\sqrt{f(x)+9}$. 将 x,$f(x)$交换位置,得反函数 $f(x)=\sqrt{x+9}$,其定义域为$[-9,0]$. 在$-3\leqslant x<0$ 区间内,$f(x)=x^2$ 的值域为 $0<f(x)\leqslant 9$. 将 $f(x)$作为自变量,x 作为因变量,得 $x=-\sqrt{f(x)}$. 将 x,$f(x)$交换位置,得反函数 $f(x)=-\sqrt{x}$,其定义域为$(0,9]$.

综上,此分段函数的反函数为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+9}, & -9\leqslant x\leqslant 0\\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 9\end{cases}$.

例 6 指出下列函数的复合过程.

(1)$y=\ln(\sin\sqrt{x^2+3})$; (2)$y=\left(\arctan\dfrac{x}{5}\right)^5$.

解 (1)$y=\ln u, u=\sin v, v=\sqrt{w}, w=x^2+3$.

(2)$y=u^5, u=\arctan\dfrac{x}{5}$.

例 7 写出下列函数所构成的复合函数.

(1)$y=\sqrt{u}, u=3x^2+4$； (2)$y=\ln u, u=\dfrac{v^2}{3}+1, v=\sin x$.

解 (1)$y=\sqrt{3x^2+4}$.

(2)$y=\ln\left(\dfrac{v^2}{3}+1\right)=\ln\left(\dfrac{(\sin x)^2}{3}+1\right)=\ln\left(\dfrac{\sin^2 x}{3}+1\right)$.

例 8 设 $f(x-1)=x^2$,求 $f(2x+1)$.

解 令 $x-1=t$,则 $x=t+1$,得到函数 $f(t)=(t+1)^2$.

将函数 $f(t)$中的 t 用 $2x+1$ 代换,得 $f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=4(x+1)^2$.

例 9 判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=x\sin x$； (2)$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1)由题意可知,函数 $f(x)=x\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且

$$f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x),$$

所以 $f(x)=x\sin x$ 为偶函数.

(2)由题意可知,函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的定义域为 $\mathbf{R}$,且

$$\begin{aligned} f(-x)&=\ln[(-x)+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln(-x+\sqrt{1+x^2}) \\ &=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数.

本章测试题

一、填空题

1. 函数 $y=3x-1$ 的反函数为________.

2. 若 $f(x)=2x^2-1, g(x)=\cos x$,则 $f[g(x)]=$________,$g[f(x)]=$________.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,则 $f[f(x)]=$________.

4. 已知 $f(3x)=\log_2(9x^2-6x+5)$,则 $f(1)=$________.

5. 已知 $f(x)=x^3-x^2-2x+1$,则 $f(x+1)=$________.

6. 函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$的定义域为________.

7. 函数 $y=\sqrt{3+2x-x^2}$的定义域为________.

8. 函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\ln(x-1)$的定义域为________.

9. 函数 $f(x)$的定义域为$(0,1)$，则 $f(\tan x)$的定义域为________.

10. 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}+1$，则 $f(x)=$________.

11. 已知 $f(x)=\ln x, g(x)=\sin x$，则 $f[g(x)]=$________，$g[f(x)]=$________.

12. 函数 $f(x)=4-2\cos\dfrac{x}{3}$的最小值为________；当 $f(x)$取得最大值时，x 的值为________.

13. 若 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$________.

二、选择题

1. 函数 $y=2+\sqrt{x+1}$ 的反函数为(　　).

A. $x=(y-2)^2-1$　　B. $y=(x-2)^2-1, x\in[2,+\infty)$

C. $y=(x-2)^2-1, x\geqslant -1$　　D. 不存在

2. 若 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x-1}$，则 $f(3x)=$(　　).

A. $\dfrac{1}{1-3x}$　　B. $\dfrac{3}{1-3x}$

C. $\dfrac{3x-1}{3}$　　D. $\dfrac{3x-1}{x}$

3. 函数 $f(x)=\arcsin(1-x)+\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$的定义域为(　　).

A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$

C. $x\neq 1$　　D. $(-\infty,+\infty)$

4. 下列函数为复合函数的是(　　).

A. $e^x+\cos x$　　B. $\sin\sqrt{2x}$

C. $-2+\sin x$　　D. 2^x

5. 函数 $f(x)=|x\sin x|, x\in(-\infty,+\infty)$是(　　).

A. 有界函数　　B. 单调函数

C. 周期函数　　D. 偶函数

6. 函数 $y=\lg(x^2-1)$在区间(　　)内有界.

A. $(1,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

7. 下列函数为偶函数且在$(-\infty,0)$内单调减少的是(　　).

A. $y=(x+1)^2$　　B. $y=1-2x^2$

C. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　D. $y=\log_2|x|$

8. 函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是( ).

A. 偶函数 B. 奇函数

C. 非奇非偶函数 D. 周期函数

9. 下列函数在其定义域内是无界的有( ).

$f(x)=|1-2x|$, $f(x)=x\sin x$, $f(x)=\sin x+\cos x$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$

A. 1 个 B. 2 个

C. 3 个 D. 4 个

10. 设 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}(x\neq 0, a^2\neq b^2)$，则 $f(x)=$( ).

A. $\dfrac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\dfrac{a}{x}\right)$ B. $\dfrac{c}{a^2-b^2}\left(bx-\dfrac{a}{x}\right)$

C. $\dfrac{c}{a^2-b^2}\left(bx+\dfrac{a}{x}\right)$ D. $\dfrac{c}{b^2-a^2}\left(bx+\dfrac{a}{x}\right)$

三、综合题

1. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sin^2 x$； (2) $y=\cos x^2$；

(3) $y=\sin(x^3+5)$； (4) $y=7^{\cos\frac{1}{x}}$；

(5) $y=\sqrt[3]{3+x}$； (6) $y=(\operatorname{arccot} x)^2$；

(7) $y=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$；

(8) $y=\ln[\sin(3-3x^2)]$；

(9) $y=\ln[\ln(\ln x)]$；

(10) $y=e^{\sqrt{\tan 3x}}$；

(11) $y=\sec^4\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$；

(12) $y=\cot^2(e^{3x})$；

(13) $y=\sin(x^2+2)$；

(14) $y=e^{\sqrt{2x^2+1}}$；

(15) $y=\arctan[\lg(x+1)]$；

(16) $y=2^{\cos(x^2-1)}$.

2. 写出下列函数所构成的复合函数.

(1) $y=\cos u, u=2x$;

(2) $y=u^2, u=3x+1$;

(3) $y=\sqrt{u}, u=\cos v, v=x-\frac{\pi}{4}$;

(4) $y=\sqrt[3]{u}, u=5-x^3$;

(5) $y=e^u, u=\frac{1}{x}$;

(6) $y=e^u, u=\sin 3x$;

(7) $y=\arcsin u, u=\lg v, v=2x+1$;

(8) $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=1+x^2$;

(9) $y=2^u, u=v^2, v=\sin\frac{1}{x}$;

(10) $y=\sin u, u=\lg v, v=x^2+1$.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{25-x^2}+\ln(\sin x)$；

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{3}-1\right)$；

(3) $y=\dfrac{4}{5x^2+4x}$；

(4) $y=\sqrt{49-x^2}$；

(5) $y=\lg(2x+1)$；

(6) $y=\log_2(4x-3)-\sqrt{4x+3}$；

(7) $y=\dfrac{1}{x^2+6x+5}$；

(8) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$；

(9) $y=\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$；

(10) $y=\ln(x+1)-\sqrt{x^2-9}$；

(11) $y=-\ln(-\ln x)$；　　(12) $y=\sqrt{10-x}+\sin\sqrt{x}$.

4. 判断下列函数是否表示同一函数.

(1) $f(x)=\sqrt{(3-x)^2}$, $g(x)=3-x$；　　(2) $f(x)=\ln x^{10}$, $g(x)=10\ln x$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$, $g(x)=x-1$；　　(4) $f(x)=x$, $g(x)=\sin(\arcsin x)$；

(5) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg|x|$；　　(6) $f(x)=\sqrt{(x-2)^2}$, $g(x)=|x-2|$；

(7) $f(x)=\mathrm{e}^{\ln 2x}$, $g(x)=2x$；　　(8) $f(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$, $g(x)=1$.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^4-2x^2$;

(2) $f(x)=x-x^2+1$;

(3) $f(x)=\tan\dfrac{1}{4x}$;

(4) $f(x)=\sin x-\cos 2x$;

(5) $f(x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$;

(6) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

(7) $f(x)=a^x+a^{-x}(a>0)$;

(8) $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^{-x}+1}(a>0)$.

6. 已知 $f(\cos x)=\cos 2x+1$，求 $f(\sin x)$.

7. 已知 $f(x)=x^3-x^2-x$，$\varphi(x)=\sin 2x$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

8. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.