计算机数学基础配套辅导

JISUANJI SHUXUE JICHU PEITAO FUDAO

主编 孙海青
闫艳花
李艳宁

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

计算机数学基础配套辅导

主编 孙海青 闫艳花 李艳宁

北京邮电大学出版社

计算机数学基础
配套辅导

策划编辑：金颖杰
责任编辑：高　宇
封面设计：张瑞阳

ISBN 978-7-5635-6910-6

定价：29.80元

内 容 简 介

本书是主教材《计算机数学基础》的配套辅导用书.本书共7章,内容包括一元函数微分学、定积分与不定积分、线性代数初步、概率论基础、随机变量和数字特征、数理逻辑初步、图论基础.

本书适合作为高等职业院校计算机和通信类相关专业数学课程的辅导用书.

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础配套辅导 / 孙海青,闫艳花,李艳宁主编. -- 北京:北京邮电大学出版社,2023.5
ISBN 978-7-5635-6910-6

Ⅰ.①计… Ⅱ.①孙… ②闫… ③李… Ⅲ.①电子计算机—数学基础 Ⅳ.①TP301.6

中国国家版本馆CIP数据核字(2023)第077332号

策划编辑: 金颖杰　　**责任编辑:** 高　宇　　**封面设计:** 张瑞阳

出版发行: 北京邮电大学出版社
社　　址: 北京市海淀区西土城路10号
邮政编码: 100876
发 行 部: 电话:010-62282185　传真:010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经　　销: 各地新华书店
印　　刷: 大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司
开　　本: 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张: 9
字　　数: 186千字
版　　次: 2023年5月第1版
印　　次: 2023年5月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-6910-6　　定　价:29.80元

前 言

PREFACE

学好数学离不开自己做习题，学生认真学习教材内容的同时，若能参考辅导教材做一些分析和比较，便能更好地理解基础知识，掌握常用的数学方法，达到触类旁通、举一反三的效果.

本书是主教材《计算机数学基础》的配套辅导用书. 本书共 7 章，内容包括一元函数微分学、定积分与不定积分、线性代数初步、概率论基础、随机变量和数字特征、数理逻辑初步、图论基础.

本书每章内容如下.

(1)“知识结构图”，使学生能尽快掌握本章的主要学习内容，同时起到复习、小结的作用.

(2)“典型例题分析”，根据主教材小节内容编写一些有代表性的题目，不仅给出详细的解答过程，更侧重于解题思路的分析，从而提高学生分析问题和解决问题的能力.

(3)“教材习题详解”，给出主教材中的习题解答全过程，以便学生学习时进行对照.

(4)“习题自测”，帮助学生更好地进行自我反馈. 习题自测的答案可通过扫描书中二维码查看.

本书由天津电子信息职业技术学院孙海青、闫艳花、李艳宁任主编，天津电子信息职业技术学院张远镇、孟宪杰，唐山职业技术学院纪张伟任副主编. 全书由孙海青设计、统稿.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，给出的解题方法也未必都是最优的，敬请广大读者批评指正.

编　者

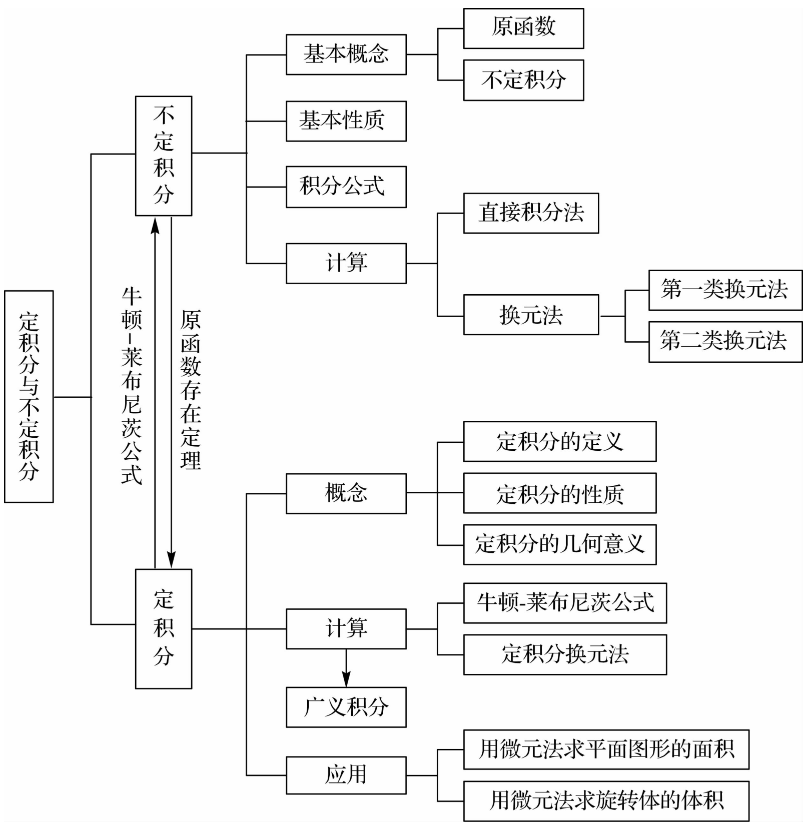
目 录

CONTENTS

第 2 章

定积分与不定积分

知识结构逻辑图



2.1 定积分的概念与性质

一、典型例题分析

例 1 利用定积分的几何意义,求$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$的值.

解 如图 2-1 所示,定积分$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$在几何上表示以$O(0,0)$为圆心,半径为 1 的四分之一圆的面积,所以$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

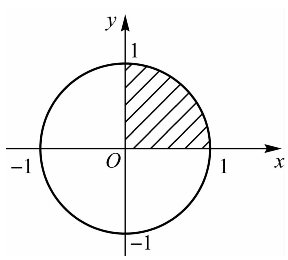


图 2-1

例 2 比较积分$\int_0^1 x\mathrm{d}x$与$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$的大小.

解 因为在区间$[0,1]$上有$x \geqslant x^3$,所以由定积分的比较性质得

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 x^3\mathrm{d}x.$$

例 3 比较$\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$与$\int_1^2 (1+x)\mathrm{d}x$的大小.

解 令$f(x) = 1 + x - \ln x$.

因为$f(x)$在$[1,2]$上连续,且$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,当$1 < x < 2$时,$f'(x) > 0$,所以$f(x)$在$[1,2]$上单调递增. 故当$x > 1$时,$f(x) > f(1) = 2 > 0$,即$1 + x > \ln x$,所以

$$\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x < \int_1^2 (1+x)\mathrm{d}x.$$

二、教材习题详解

1. 用定积分表示下列各组曲线围成的平面图形的面积A.

(1)$y = x^3, x = 1, x = 2, y = 0$;

(2) $y=\cos x, x=\frac{\pi}{6}, x=\pi, y=0$;

(3) $y=\ln x, x=\mathrm{e}, y=0$.

解 (1) $A=\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$;

(2) $A=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x$;

(3) $A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$.

2. 求下列定积分的值.

(1) 已知$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$, $\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, 求$\int_0^1(3x^2+2x-1)\mathrm{d}x$;

(2) 求$\int_1^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ 的值;

(3) 已知$\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2$, 求$\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t$;

(4) 已知$\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$, 求$\int_{-2}^2 x^2\mathrm{d}x$;

(5) 求$\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_0^1(3x^2+2x-1)\mathrm{d}x=3\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}x=1$;

(2) $\int_1^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=0$　　依据:当 $a=b$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$;

(3) $\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=2$　　依据: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$;

(4) $\int_{-2}^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$　　依据:当 $y=f(x)$ 为偶函数时, $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

(5) $\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x=0$　　依据:当 $y=f(x)$ 为奇函数时, $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

3. 利用定积分的几何意义,求下列定积分.

(1) $\int_{-1}^3(3-2x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^4\sqrt{4x-x^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_{-1}^3(3-2x)\mathrm{d}x=4$;

(2) 被积函数 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 与 x 轴围成的几何图形是以点(2,0)为圆心,2为半径的上半圆,半圆的面积为 2π. 由定积分的几何意义得

$$\int_0^4\sqrt{4x-x^2}\mathrm{d}x=2\pi.$$

三、习题自测

1. 选择题.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $c<d$,则下列定积分值不为零的是(　　).

A. $\int_c^d 0\mathrm{d}x$　　B. $\int_c^c f(x)\mathrm{d}x$

C. $\int_c^d \mathrm{d}x$　　D. $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int_d^c f(x)\mathrm{d}x$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续,且 $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x=0$,则 $\int_c^d [f(x)+1]\mathrm{d}x=d-c$(　　).

A. 对一切 $f(x)$ 及 c,d 都成立　　B. 当 $c>d$ 时才成立

C. 在 $f(x)\equiv 0$ 时才成立　　D. 当 $c<d$ 时才成立

(3) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是(　　).

A. $f(x)$ 的一个原函数　　B. $f(x)$ 的全体原函数

C. 任意常数　　D. 确定的常数

2. 填空题.

(1) 根据定积分的几何意义计算:$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

(2) 比较定积分的大小:$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x\mathrm{d}x$ ________ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^8 x\mathrm{d}x$.

3. 计算题.

(1) 利用定积分的几何意义,求 $\int_0^6 \sqrt{6x-x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

(2) 若 $\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}\mathrm{d}x=1$,求 $\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)+g(x)}\mathrm{d}x$.

2.2 不定积分

一、典型例题分析

例 1 求$\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}x = -3x^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$.

例 2 求$\int \left(-\sin x + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$.

解 $\int \left(-\sin x + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \cos x + 2\ln|x| + C$.

例 3 求$\int (2x-3)^4\,\mathrm{d}x$.

解 $\int (2x-3)^4\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-3)^4\mathrm{d}(2x-3) = \frac{1}{10}(2x-3)^5 + C$.

例 4 求$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x}) = 2\sin\sqrt{x} + C$.

例 5 求$\int \cos^3 x\sin^3 x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\sin^3 x\mathrm{d}x &= \int \cos^3 x\sin^2 x\sin x\mathrm{d}x \\ &= -\int \cos^3 x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\cos x) \\ &= -\int (\cos^3 x - \cos^5 x)\mathrm{d}(\cos x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C.\end{aligned}$$

例 6 求$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}\,\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int (3-2x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3-2x) \\ &= -\sqrt{3-2x} + C.\end{aligned}$$

例 7 求$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C$.

例 8 求不定积分$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

解 令 $u=\sqrt[4]{x}$,则 $x=u^4$,于是 $dx=4u^3du$,代入原积分得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=4\int \frac{u^3}{u^2+u}du=4\int \frac{u^2}{u+1}du=4\int\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=4\left(\frac{1}{2}u^2-u+\ln|u+1|\right)+C$$

$$=4\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+\ln|\sqrt[4]{x}+1|\right)+C.$$

二、教材习题详解

1. 求下列不定积分.

(1)$\int (2^x+x^2+e^2)dx$;

(2)$\int \left(x^2-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$;

(3)$\int \sin(2x-3)dx$;

(4)$\int \frac{1}{1+2x}dx$.

解 (1)$\int (2^x+x^2+e^2)dx=\int 2^xdx+\int x^2dx+\int e^2dx=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{3}x^3+e^2x+C$;

(2)$\int \left(x^2-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx=\int x^2\,dx-\int \frac{1}{x^2}dx+\int \sqrt{x}\,dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$;

(3)$\int \sin(2x-3)dx=\frac{1}{2}\int\sin(2x-3)d(2x-3)=-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$;

(4)$\int \frac{1}{1+2x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2x}d(2x)=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2x}d(1+2x)=\frac{1}{2}\ln|1+2x|+C.$

2. 求下列不定积分.

(1)$\int (2x-1)^2dx$;

(2)$\int \sqrt{1+2x}dx$;

(3)$\int \cos(2x+3)dx$;

(4)$\int x(1+x^2)dx$;

(5)$\int \frac{1+\ln x}{x}dx$;

(6)$\int e^x(1-e^x)dx$.

(7) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(8) $\int \frac{2}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int (2x-1)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-1)^2\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int (2x-1)^2\mathrm{d}(2x-1)$

$$= \frac{1}{6}(2x-1)^3 + C;$$

(2) $\int \sqrt{1+2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+2x}\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+2x}\mathrm{d}(1+2x) = \frac{1}{3}(1+2x)^{\frac{3}{2}} + C$;

(3) $\int \cos(2x+3)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos(2x+3)\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int\cos(2x+3)\mathrm{d}(2x+3)$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C;$$

(4) $\int x(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+x^2)\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\int (1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2) = \frac{1}{4}(1+x^2)^2 + C$;

(5) $\int \frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int (\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x})\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \ln x + \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

$$= \ln x + \int \ln x\mathrm{d}\ln x = \ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x + C;$$

(6) $\int \mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \int (1-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x = -\int (1-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(-\mathrm{e}^x) = -\int (1-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(1-\mathrm{e}^x)$

$$= -\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^x)^2 + C;$$

(7) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$;

(8) $\int \frac{2}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = 2\int\left(1 - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$

$$= 2\left(x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\right) = 2\left(x - \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x\right)$$

$$= 2\left[x - \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)\right]$$

$$= 2[x - \ln(\mathrm{e}^x+1)] + C.$$

3. 求下列不定积分.

(1) $\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $u = \sqrt{1+x}$，则 $u^2 = 1+x$，$x = u^2-1$，$\mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u$，代入原式得

$$\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{换元}} \int (u^2-1)u\cdot 2u\mathrm{d}u \xlongequal{\text{变形}} 2\int (u^4-u^2)\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{\text{求积分}} 2\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3\right)+C$$

$$\xlongequal{\text{变量还原}} 2\left[\frac{1}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]+C;$$

(2) 令 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t$，$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，则

$$\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int \sin t\cos^2 t\mathrm{d}t=-\int \cos^2 t\mathrm{d}\cos t=-\frac{1}{3}\cos^3 t+C.$$

再将 $\cos t=\sqrt{1-x^2}$ 代入上式，得

$$\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

三、习题自测

1. 选择题.

(1) 若 $f(x)$ 的导数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为(　　).

A. $2+\cos x$　　B. $2-\cos x$

C. $2+\sin x$　　D. $2-\sin x$

(2) 设 x^3 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$(　　).

A. x^3　　B. $3x^3+1$

C. $3x^2$　　D. $3x^2+C$

(3) 下列等式正确的是(　　).

A. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$　　B. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)=f(x)$

C. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x)+C$　　D. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)=f(x)\mathrm{d}x$

(4) $\int 6^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$(　　).

A. $\frac{6^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 6}+C$　　B. $\frac{6^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 6}$

C. $\frac{6^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 3}+C$　　D. $\frac{6^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 3}+C$

(5) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=$(　　).

A. $x-\arctan x+C$　　B. $2x-2\arctan x+C$

C. $x+\arctan x+C$　　D. $2x+2\arctan x+C$

(6) $\int \cos 2x \mathrm{d}x =$ (　　).

A. $\sin 2x + C$　　B. $\frac{1}{2}\sin 2x + C$

C. $-\sin 2x + C$　　D. $-\frac{1}{2}\sin 2x + C$

(7) $\int \frac{g'(x)}{g(x)} \mathrm{d}x =$ (　　).

A. $\ln|g(x)| + C$　　B. $\frac{1}{2}[g'(x)]^2 + C$

C. $\frac{g'(x)}{g(x)} + C$　　D. $\frac{1}{2}[g(x)]^2 + C$

2. 填空题.

(1) 设 $\int f(x)\mathrm{d}x = 3\sin\frac{x}{3} + C$,则 $f(x) =$ ________.

(2) 一阶导数 $\left(\int 5^2 \sin x \mathrm{d}x\right)' =$ ________.

(3) $\int \mathrm{d}\cos(2-3x) =$ ________.

(4) 在积分曲线族 $\int x^2 \mathrm{d}x$ 中,过点(1,1)的积分曲线是________.

(5) 若 $F'(x) = f(x)$,则 $\int f(ax+b)\mathrm{d}x =$ ________.

3. 计算题.

(1) 求下列不定积分.

① $\int x^5 \mathrm{d}x$;

② $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$;

③ $\int \sqrt{x}\mathrm{d}x$;

④ $\int (\cos x + 2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$;

⑤ $\int (2x^3 - 3\mathrm{e}^x - \mathrm{e})\mathrm{d}x$.

（2）用换元法求下列不定积分.

①$\int e^{3x+1} dx$；

②$\int (2x+1)^{10} dx$；

③$\int \frac{1}{x} \ln x dx$；

④$\int x \sqrt{x+1} dx$；

⑤$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$；

⑥$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$.

2.3 定积分的计算及应用

一、典型例题分析

例 1 计算$\int_1^4 (2x-\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

解 $\int_1^4 (2x-\sqrt{x})\mathrm{d}x=\left[x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=\left(16-\frac{16}{3}\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{31}{3}$.

例 2 计算$\int_0^{\pi}(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{\pi}(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x=[\sin x-\cos x]_0^{\pi}=(\sin\pi-\cos\pi)-(\sin 0-\cos 0)=2$.

例 3 求$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)\Big|_{-1}^{1}=1$.

例 4 计算$\int_1^4\frac{1}{2x+2}\mathrm{d}x$.

解 $\int_1^4\frac{1}{2x+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{1}{2x+2}\mathrm{d}(2x+2)=\frac{1}{2}[\ln|2x+2|]_1^4=\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 4)=$
$\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$.

例 5 求$\int_0^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 设$\sqrt{x}=t$,即$x=t^2(t\geqslant 0)$,则$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

当$x=0$时,$t=0$;当$x=9$时,$t=3$,因此有

$$\int_0^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^3\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t}=2\int_0^3\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2(t-\ln|1+t|)\Big|_0^3=2(3-2\ln 2).$$

例 6 求$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解 令$x=\sin t$,则$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,当$x=0$时,$t=0$,当$x=1$时,$t=\frac{\pi}{2}$,所以有

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t^2\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

例 7 求 $\int_{-2}^{2}(1+3x^2+5x^4)\mathrm{d}x$.

解 $\int_{-2}^{2}(1+3x^2+5x^4)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2}(1+3x^2+5x^4)\mathrm{d}x$

$$= 2(x+x^3+x^5)\Big|_0^2 = 2\times(2+2^3+2^5) = 84.$$

例 8 求曲线 $y=x^2$ 及 $y=2-x^2$ 所围成的平面图形的面积.

解 画出简图(见图 2-2).

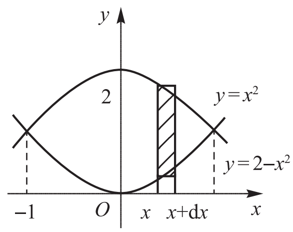


图 2-2

由$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x^2 \end{cases}$求出交点为$(-1,1)$和$(1,1)$.

选取积分变量为 x,积分区间为$[-1,1]$.

面积微元为 $\mathrm{d}A=(2-x^2-x^2)\mathrm{d}x$,求定积分,得面积为

$$A=\int_{-1}^{1}(2-2x^2)\mathrm{d}x=\left[2x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}.$$

例 9 连接坐标原点 O 及点 $P(h,r)$ 的直线、直线 $x=h$ 及 x 轴围成一个直角三角形. 将它绕 x 轴旋转构成一个底面半径为 r、高为 h 的圆锥体,计算圆锥体的体积.

解 画出简图(见图 2-3).

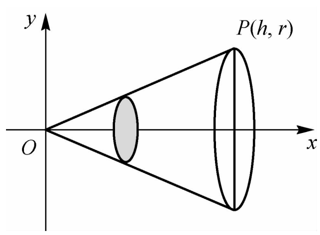


图 2-3

积分变量 x 的变化区间为$[0,h]$,

此时 $y=\frac{r}{h}x$ 为直线 OP 的方程,

则圆锥体的体积为

$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi h r^2}{3}.$$

二、教材习题详解

1. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 e^x dx$；

(2) $\int_4^9 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$；

(3) $\int_0^1 (2x-1)^{100} dx$；

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

解 (1) $\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e-1$；

(2) $\int_4^9 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_4^9 \sqrt{x}dx + \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_4^9 + 2\sqrt{x}\Big|_4^9 = \frac{44}{3}$；

(3) $\int_0^1 (2x-1)^{100} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x-1)^{100} d(2x-1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{101}(2x-1)^{101}\Big|_0^1 = \frac{1}{101}$；

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

2. 计算下列定积分.

(1) $\int_{-1}^0 \frac{1}{(2-3x)^2}dx$；

(2) $\int_0^1 x(x^2+1)^5 dx$；

(3) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；

(4) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

解 (1) $\int_{-1}^0 \frac{1}{(2-3x)^2}dx = -\frac{1}{3}\int_{-1}^0 \frac{1}{(2-3x)^2}d(2-3x) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2-3x}\Big|_{-1}^0 = \frac{1}{10}$；

(2) $\int_0^1 x(x^2+1)^5 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^5 d(x^2+1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}(x^2+1)^6\Big|_0^1 = \frac{21}{4}$；

(3) 令 $x=u^4$，则 $dx=4u^3du$，且 $x=0$ 时，$u=0$，$x=16$ 时，$u=2$，于是有

$$\begin{aligned}\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} &= 4\int_0^2 \frac{u^3}{u^2+u}du = 4\int_0^2 \frac{u^2}{u+1}du \\ &= 4\int_0^2 \left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)du \\ &= 4\left(\frac{1}{2}u^2-u+\ln|u+1|\right)\Big|_0^2 \\ &= 4\ln 3；\end{aligned}$$

(4)$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= (x-\arctan x)\Big|_0^1$$

$$= 1-\frac{\pi}{4}.$$

3. 求出下列曲线所围成的平面图形的面积.

(1)$y=\mathrm{e}^x, x=0, x=1, y=0$;

(2)$y=x^3, y=1, x=0$;

(3)$y=x^2, x+y=2$.

解 (1)$S=\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-1$;

(2)$S=\int_0^1(1-x^3)\mathrm{d}x=\left(x-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$;

(3)$S=\int_{-2}^1(2-x-x^2)\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^1=\frac{9}{2}$.

4. 求下列曲线所围成的图形按指定的轴旋转产生的旋转体的体积.

(1)$y=x^2, y=0, x=2$,绕 x 轴;

(2)$y=x, x=2, y=0$,绕 x 轴;

(3)$y=\ln x, x=0, y=1$ 及 $y=\mathrm{e}$,绕 y 轴.

解 (1)$V=\pi\int_0^2(x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}x^5\Big|_0^2=\frac{32}{5}\pi$;

(2)$V=\pi\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3}\pi$;

(3)$V=\frac{\pi}{2}\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{2y}\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{e}}-\mathrm{e}^2)$.

三、习题自测

1. 选择题.

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,且为偶函数,则在对称区间$[-a,a]$上的定积分$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=$(   ).

A. 0　　B. $2\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$

C. $\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$　　D. $\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$

(2) 由曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 x 轴围成的平面图形的面积为(   ).

A. 0　　B. 2

C. 4　　D. 1

(3) 由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积是(　　).

A. $\frac{3\pi}{10}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{5}$　　D. $\frac{7\pi}{10}$

2. 填空题.

(1) 已知 $f(x)=x^3$,则$\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(2) 设 k 为常数,且$\int_{0}^{1}(2x+k)\mathrm{d}x=3$,则 $k=$ ________.

(3)$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=$ ________.

3. 计算题.

(1) 计算下列定积分.

①$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

②$\int_{1}^{4}\sqrt{x}\mathrm{d}x$;

③$\int_{1}^{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$;

④$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x$;

⑤$\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$;

⑥$\int_{0}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

（2）求由直线 $x-y=0$ 和抛物线 $y=x^2-2x$ 围成的平面图形的面积.

（3）求由曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 和直线 $y=\mathrm{e}^2$ 及 $x=0$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积.

2.4 广义积分

一、典型例题分析

例 1 计算广义积分$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}[\mathrm{e}^{-x^2}]_0^b = \frac{1}{2}$.

例 2 讨论$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$的敛散性.

解 因 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x) = [\ln|\ln x|]_2^{+\infty} = +\infty$,

所以$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$发散.

例 3 计算广义积分$\int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.

二、教材习题详解

计算下列广义积分.

(1)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$;

(2)$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(3)$\int_1^{+\infty} x^{-4}\mathrm{d}x$;

(4)$\int_{-\infty}^0 \cos x\mathrm{d}x$.

解 (1)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = (\ln|x|)\Big|_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln 1 = \infty$(不存在);

(2)$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^0 = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-\infty} = 1$;

(3)$\int_1^{+\infty} x^{-4}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{3}$;

(4)$\int_{-\infty}^0 \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_{-\infty}^0 =$ 不存在.

三、习题自测

1. 选择题.

(1) 下列广义积分发散的是(　　).

A. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$　　B. $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi x}\mathrm{d}x$

C. $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　D. $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

(2) 广义积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=$(　　).

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $-\frac{\pi}{2}$　　D. 发散

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$(　　).

A. π　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{1}{\pi}$　　D. $-\frac{\pi}{2}$

2. 计算题.

(1) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

2.5 教材本章测试题参考答案

一、填空题

1. 曲边梯形

2. $4,2\pi$

3. 原函数

4. $2x$

5. $2x+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C,\sin x-\frac{1}{2}\ln|x|+C$

6. 0

二、选择题

1. A　2. B　3. D　4. D　5. C

三、计算与应用题

1. 利用直接积分法求下列积分.

(1)$x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$;(2)$\frac{1}{3}x^3+5x-2\ln|x|+C$;(3)$e^x-\ln|x|+C$;

(4)$\frac{7}{3}$;(5)$\frac{29}{6}$;(6)$e-\frac{1}{3}$.

2. 利用换元法求下列积分.

(1)$\frac{1}{10}(2x-5)^5+C$;(2)$\sqrt{1+2x}+C$;(3)$-\cos e^x+C$;

(4)$\ln 2$;(5)$\frac{1}{2}$;(6)$2\left(1+\ln\frac{2}{3}\right)$.

3. 求下列广义积分.

(1) 发散;(2)$\frac{1}{2}$.

4. $\frac{4}{3}$

5. $e-1$

6. $\frac{\pi}{2}$

7. $\frac{32\pi}{5}$