第 1 章

随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中的一类不确定性现象(随机现象)及其规律性的一门应用数学学科,也是理论联系实际最活跃的学科之一. 生活中的很多问题都可归结为概率问题,而概率方法在各领域的广泛应用和卓有成效的贡献,几乎使它成为一切专家、学者、实业家手中强有力的工具,它在科学上的地位也越来越被人们重视. 本章所介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一.

许宝禄是我国概率统计事业的奠基人,也被誉为是该方向第一个具有国际声望的中国数学家,同时他也是爱国主义和无私奉献精神的完美体现。许宝禄于 1936 年在英国伦敦大学攻读博士学位,并于 1938 年和 1940 年分别获得哲学博士学位和科学博士学位。他在多元统计分析和内曼－皮尔逊(Neyman－Pearson) 理论等领域取得了非凡的成就,得到了国际同行的认可,在他学有所成后,放弃伦敦大学教职工作,于 1940 年,抱着满腔热血和坚定信念返回祖国,并立志为我国的教学和数学科学研究穷尽毕生心血。回国后,许宝禄任云南昆明西南联合大数学系教授,与华罗庚、陈省身并称“三杰”。之后一直任教于北京大学数学系,并举办了国内第一个概率论与数理统计的讲习班,这是中国数理统计学科从无到有的转变,也为我国培养了高质量的教学和科研人才。许宝禄教授一生未娶,穷尽毕生所学将我国的概率论与数理统计学科发扬光大,被推选为中央研究院首届院士,而且他的相片还被悬挂在斯坦福大学统计系的走廊上,与世界著名的统计学家并列。这些都是热衷于数学学科的研究人员,因为他们有着持之以恒和认真专注的态度,才会取得最终的成功,我们要学习他们不畏艰难和锲而不舍的人生态度。

1.1 随机事件

1.1.1 随机现象

在自然界以及生产实践和科学实验中普遍存在着两类现象. 一类是在一定条件下重复进行试验,某一结果必然发生或必然不发生,即是可以事先预言的,称为**确定性现象**. 例如:

(1) 一口袋中有十只完全相同的红球,从中任取一只必然为红球.

(2) 异性电荷相互吸引,同性电荷相互排斥.

除去确定性现象,人们发现还存在另一类现象,它是事先不可预言的,即在相同条件下重复进行试验,每次的结果不一定相同,称这一类现象为**偶然性现象**或**随机现象**. 例如:

(1) 在相同条件下,抛掷一枚质地均匀的硬币,结果可能是正面向上,也可能是反面向上,每次抛掷之前无法确定结果.

(2) 从一批产品中,随机抽取检验,结果可能是合格品,也可能是不合格品. 在每次抽检

之前无法预知结果.

是否这些随机现象都没有什么规律可循呢?事实上并非如此.人们在长期的观察和实践中逐渐发现,所谓的不可预言只是对一次或是少数几次观察或实践而言,当在相同条件下进行大量观察时,这类现象都呈现出某种规律.例如,均匀的硬币抛掷足够多次,正面向上和反面向上的比例总是近似 1∶1,而且大致上抛掷次数越多,就越接近这个比例.表 1-1 给出了历史上抛掷硬币实验的记录.再比如人的高度虽然各不相同,但通过大量的统计,如果在一定范围内按同一高度人的数量占总人数的比例画出“直方图”(x 轴表示人的高度,y 轴表示同一高度的人的数量占总人数的比例),就可以连成一条曲线(见图 1-1).

表 1-1　历史上抛均匀硬币试验的记录

实　验　者	试验次数(n)	正面向上次数(n_A)	正面向上频率($\frac{n_A}{n}$)
德摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
布丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

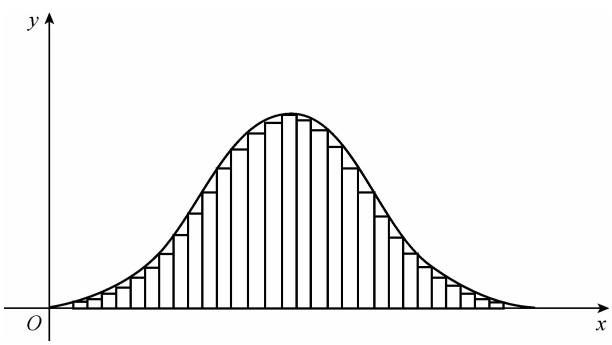


图 1-1

在一定条件下,随机现象有多种可能的结果发生,事先不能预知将出现哪种结果,但通过大量的重复观察,出现的结果会呈现出某种规律,称为随机现象的**统计规律性**.

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科,由于随机现象的普遍性,概率论与数理统计的理论与方法得到了越来越广泛的应用,其应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济各个部门.例如,气象预报、水文、地震预报、寻求最佳生产条件的试验设计等.与其他学科相结合发展了许多边缘学科:生物统计、数学地质、环境数学等.概率论与数理统计也是一些重要学科的理论基础,如可靠性理论、控制论、人工智能等.

1.1.2　随机试验与样本空间

要对随机现象的统计规律性进行研究,就需要对随机现象进行重复观察.对随机现象的一次观察称为一个**试验**.如果这个试验具有如下特点:

(1) **可重复性**　试验可以在相同条件下重复进行.

(2) **可观察性** 每次试验的可能结果不止一个，但能事先明确试验的所有可能结果.

(3) **不确定性** 每次试验前不能确定哪个结果将出现.

称这样的试验为**随机试验**，通常用字母 E 表示. 在实际问题中，也有很多随机现象是不能重复的. 例如，某场球赛的输赢、某个学生参加一次大型考试的成绩等都是不能重复的，对这些现象的观察就不再是一个随机试验了. 本书中以后提到的试验都是指随机试验，就是通过研究随机试验来研究随机现象的.

例 1.1 下列试验都是随机试验.

(1) 考试结束后，某个学生做了这样几个阄：A 表示"90 分及 90 分以上"，B 表示"80 ～ 89 分"，C 表示"70 ～ 79 分"，D 表示"60 ～ 69 分"，E 表示"不及格"，从中抓一个，观察出现的结果.

(2) 掷两颗骰子，观察骰子朝上的点数.

(3) 3 件产品中 2 件正品，1 件次品，① 依次取出 2 件；② 同时取出 2 件，观察结果.

(4) 从一批电脑中，任取一台，① 观察无故障运行的时间 t；② 若电脑无故障运行1 000小时以上为合格品，否则为不合格品，观察取出的电脑是合格品还是不合格品.

(5) 向坐标平面区域 $D: x^2 + y^2 \leqslant 100$ 内随机投掷一点 M(设点必落在 D 上)，观察点 M 的坐标.

随机试验 E 的每一种可能的结果称为一个**样本点**，它们的全体称为 E 的**样本空间**，记为 S(或 Ω).

例 1.2 写出例 1.1 中各随机试验的样本空间.

(1) $S = \{A, B, C, D, E\}$.

(2) $S = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，其中 (i, j) 表示第一颗骰子朝上的点数为 i，第二颗骰子朝上的点数为 j.

(3) ① $S_1 = \{$(正品，次品)，(正品，正品)，(次品，正品)$\}$；② $S_2 = \{$(正品，次品)，(正品，正品)$\}$.

若用"1" 表示"正品"，"0" 表示"次品"，这里的两个样本空间又可表示为

① $S_1 = \{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$；② $S_2 = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

(4) ① $S_1 = \{t \mid t \geqslant 0\}$；② $S_2 = \{$合格品，不合格品$\}$.

若用"1" 表示"合格品"，"0" 表示"不合格品"，S_2 又可表示为 $S_2 = \{1, 0\}$.

(5) $S_5 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 100\}$.

由上例可知，样本空间可以是有限集，也可以是无限集.

注：① 对于同一个随机试验，试验的样本点和样本空间可能不一样，这要根据需要观察的内容来确定，如上例中的(3) 和(4).

② 有时，同一个样本空间可概括各种实际内容完全不同的问题. 例如，只包含两个样本点的样本空间 $S = \{1, 0\}$，既可以作为抛硬币出现正面或反面的模型，也可表示学生成绩及格或不及格的模型，还可表示产品验收中合格与不合格的模型等.

1.1.3 随机事件

在进行随机试验时，人们除了关心试验的结果，常常还关心试验的结果是否具备某种指定的可观察的特性. 例如，在例 1.1(1) 中，抓阄者关心的是抓到的阄能否表达"考试及格" 这

一信息,即抓到的阄是否是$\{A,B,C,D\}$中的一个. 随机试验中,类似这样的样本空间的子集,称之为**随机事件**,简称**事件**. 通常用大写字母$A,B,C,\cdots$表示. 在一次试验中,当且仅当这一子集中的某个样本点出现时,称这一**事件发生**. 随机事件是概率论研究的主要对象. 特别地,

(1) **基本事件**　由样本空间S中单个样本点组成的单点集称为**基本事件**,常用e或ω表示.

(2) **复合事件**　由样本空间S中两个或两个以上样本点组成的集合称为**复合事件**.

(3) **必然事件**　样本空间S作为自身的子集,它在每次试验中必然发生,称为**必然事件**,用S表示.

(4) **不可能事件**　样本空间S的最小子集(即空集),它在每次试验中必然不发生,称为**不可能事件**,用$\varnothing$表示.

必然事件和不可能事件都是确定性事件,为了讨论问题方便,将其作为两个特殊的随机事件,它们在概率问题讨论中起着重要作用.

例 1.3　掷一颗骰子的样本空间为$S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

记$A=\{$出现1点$\}$,A为基本事件;

$B=\{$出现奇数点$\}$,B为复合事件;

$C=\{$出现的点数不超过6$\}$,C为必然事件;

$D=\{$出现8点$\}$,D为不可能事件.

1.1.4　事件的关系与运算

在实际问题中,往往要在同一个试验中同时研究几个事件,这些事件是相互联系的,因而就不能只是孤立地研究单个事件,还要考虑它们之间的关系和运算性质. 分析事件之间的关系和运算,不仅能帮助人们更深入地认识事件的本质,还可以大大简化一些复杂事件的计算.

下面的讨论总假设在同一样本空间中进行. 事件作为样本空间的一个子集,它们之间的关系和运算与集合之间的关系和运算是类似的. 20世纪30年代初,冯·米泽斯(Von Mises)最先开始用集合论的观点来研究随机事件. 下面给出这些关系和运算在概率论中的含义.

(1) **包含关系**　若$A\subset B$,称事件B包含事件A,或事件A包含于事件B,或A是B的子事件. 其含义为:如果事件A发生必然导致事件B发生.

注: 不可能事件$\varnothing$因不含有任何样本点,因此对于任意事件A,有$\varnothing\subset A$.

(2) **相等关系**　若$A=B$,称事件A与事件B**相等**. 其含义为:若事件A发生必然导致事件B发生,同时若事件B发生也必然导致事件A发生,即$A\subset B$且$B\subset A$. 此时事件A与事件B所包含的样本点相同.

(3) **事件的和**　事件$A\cup B=\{x \mid x\in A$或$x\in B\}$称为事件A与事件B的**和事件**. 其含义为:事件A与B中至少有一个发生,即由事件A与B中所有的样本点(相同的只计入一次)组成的新事件. 称$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和事件,称$\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和事件.

(4) **事件的积**　事件$A\cap B=\{x \mid x\in A$且$x\in B\}$称为事件A与事件B的**积事件**. 其含义为:事件A与事件B同时发生. 事件$A\cap B$也记作AB. 称$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$为$n$个事件$A_1,A_2,$

$\cdots, A_n$ 的积事件，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件.

(5) **事件的差**　事件 $A-B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 其含义为：事件 A 发生且事件 B 不发生.

(6) **互不相容(或互斥)**　若 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的或互斥的**. 其含义为：事件 A 和事件 B 不同时发生.

(7) **对立事件(或逆事件)**　若 $A \cup B=S$ 且 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，或称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 其含义是：在每次试验中，事件 A 与事件 B 中有且仅有一个发生. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，因而 $\overline{A}=S-A$.

注：互不相容的事件不一定是对立事件，但对立事件一定是互不相容的.

英国逻辑学家韦恩(Venn)给出了一种用几何图形表示事件之间关系和运算的方法，这些几何图形称为**韦恩图(或文氏图)**(见图 1-2).

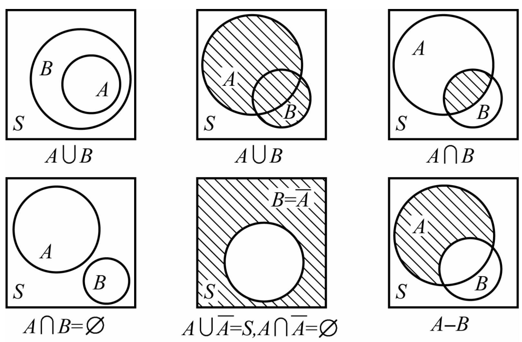


图 1-2

注：由事件的关系和运算的定义，不难看出，事件的运算满足下列关系：

① 若 $A \subset B$，则 $A \cup B=B, A \cap B=A$.

② $A\overline{B}=A-B=A-AB, A \cup B=A \cup(B-A)$.

事件的运算具有如下基本性质：

(1) **交换律**　$A \cup B=B \cup A, A \cap B=B \cap A$.

(2) **结合律**　$A \cup(B \cup C)=(A \cup B) \cup C, A \cap(B \cap C)=(A \cap B) \cap C$.

(3) **分配律**　$A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(A \cup C), A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)$.

(4) **对偶律(德摩根律)**　$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$.

注：上述运算律可推广到有限个或可列个事件的情形. 例如，对偶律有 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$.

例 1.4　向指定目标连续射击三枪，设 $A_i=\{$第 i 枪击中目标$\}(i=1,2,3)$，则

(1) “至少有一枪击中目标”：$A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(2) “三枪都击中目标”：$A_1 A_2 A_3$.

(3) “只有第一枪击中目标”：$A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$.

(4) “恰有一枪击中目标”：$A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$.

(5) “三枪都没有击中目标”：$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}=\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$.

(6)“至少有一枪没有击中目标”:$\overline{A_1A_2A_3}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$.

1.2 随机事件的概率

随机事件在大量重复试验中表现出频率的稳定性,历史上德摩根、蒲丰、费勒、皮尔逊等试验者用抛硬币进行了千次甚至万次的试验,其中皮尔逊抛了24000次,正面朝上12012次,很难想象他们追求科学真理的意志和毅力。科学家正是以呕心沥血、精益求精、坚持不懈的精神奋斗在科研一线上,他们应该是我们青年人的偶像,是我们青年人的榜样。正是科学家们的不懈探索精神,发现了频率的稳定性,进一步推动了科学家对随机现象统计规律的研究,科学规律的发现需要敏锐的眼光和锲而不舍的探索精神,面对困难一定要不抛弃、不放弃。

在一次随机试验中,一个事件的发生是具有偶然性的. 人们常常希望知道在一次试验中某事件发生的可能性有多大. 事件的概率就是用来描述事件在试验中出现的可能性大小的数量指标,那么如何定义概率?很自然地想到做试验,如果某事件出现得越频繁,就认为其概率越大. 为了引入概率这个概念,下面先讨论事件频率的概念及相关性质.

1.2.1 频率及其性质

定义1.1 在相同条件下,将随机试验重复进行了n次,随机事件A发生的次数n_A称为事件A发生的**频数**,$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$称为事件A发生的**频率**.

易见,频率具有下述基本性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(2) $f_n(S)=1$.

(3) 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n).$$

以抛硬币试验为例,抛掷一枚均匀硬币,可能有两种结果:出现正面或出现反面. 就一次试验而言,看不出这些结果发生的规律,但进行大量重复试验时,发现出现正面和反面的次数大致相等(见表1-1),即出现正面的频率总是在0.5左右摆动,而且随着试验次数的增加,这个频率更加稳定地趋于0.5.

例1.5 考察英语中给定字母出现的频率时人们发现,当观察字母的数量n较小时,频率有较大幅度的波动,但随着n值的增大,频率呈现出稳定性(见表1-2).

表1-2 英文字母的使用频率

字母	使用频率	字母	使用频率	字母	使用频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0

续表

字母	使用频率	字母	使用频率	字母	使用频率
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

字母频率分析有着重要的实用价值，如在密码学解码理论中可以利用它有效地破解单字母替换密码；在编码理论中可以用较短的码编排使用频率较高的字母；计算机键盘设计时使用频率较高的字母安排在较方便的位置等.

在实际观察中，通过大量重复试验得到随机事件频率稳定于某个数值的实例还有很多. 它们都表明，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数，这个性质称为“频率的稳定性”. 由此可以看出，随机事件发生的可能性的大小可以用一个数来表示，下面给出随机事件概率的统计定义.

1.2.2 概率的定义

定义 1.2 在相同条件下重复进行 n 次试验，若随机事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 随着试验次数的增大而稳定地在某个常数 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 附近摆动，则称 p 为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)$.

此定义给出了随机事件概率的近似计算方法，在许多实际问题中，当事件的概率不容易计算时，往往可用频率近似估计概率的大小，而且随着试验次数的增加，估计的精度会越来越高，这正是 1946 年冯·诺依曼(Von Neumann)和乌拉姆(Ulam)创立的蒙特卡洛方法的基本思想.

但是概率的统计定义有一定的局限性，在实际问题中，不可能对每一个事件都做大量试验，再求得事件的概率. 1933 年前苏联著名数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在他的《概率论的基本概念》一书中提出了概率的公理化结构，使概率论成为严谨的数学分支. 下面给出概率的公理化定义.

定义 1.3 设随机试验 E 的样本空间为 S，对于 E 的每个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足如下三个条件：

(1) **非负性** $P(A)\geqslant 0$.

(2) **规范性** $P(S)=1$.

(3) **可列可加性** 对可列个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的**概率**.

1.2.3 概率的性质

由概率的公理化定义,可以得到概率的一些重要性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

证明 令 $A_i=\varnothing, i=1,2,3,\cdots$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i=\varnothing$,且有 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,3,\cdots$,由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(\varnothing),$$

由概率的非负性知 $P(\varnothing)\geqslant 0$,结合上式可得 $P(\varnothing)=0$.

注:由 $P(A)=0$,不能得到 $A=\varnothing$;由 $P(A)=1$,也不能得到 $A=S$.

性质 2(有限可加性) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证明 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则有 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j, i,j=1,2,3,\cdots)$,由概率的可列可加性知

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{+\infty}P(A_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+0=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

性质 3(减法公式) 若 A,B 为任意两个事件,则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

特别地,若 $B\subset A$,则有

$$P(A-B)=P(A)-P(B),\text{且 } P(A)\geqslant P(B).$$

证明 由于 $A=AB\cup(A-B)$,且 AB 与 $A-B$ 互不相容,由性质 2 得

$$P(A)=P(AB)+P(A-B),$$

因此

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

特别地,若 $B\subset A$,则

$$P(A)=P(AB)+P(A-B)=P(B)+P(A-B),$$

即

$$P(A-B)=P(A)-P(B),$$

且由概率的非负性知 $P(A-B)\geqslant 0$,因而 $P(A)\geqslant P(B)$.

性质 4 对任一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明 由于 $A\cup\overline{A}=S$,且 $A\overline{A}=\varnothing$,由性质 2 得

$$1=P(S)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

即 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 5 对于任意一个事件 A,有 $P(A)\leqslant 1$.

证明 因 $A\subset S$,由性质 3 得

$$P(A)\leqslant P(S)=1.$$

性质 6(加法公式) 若 A,B 为任意两个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明 因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$, $A\cap(B-AB)=\varnothing$ 且 $AB\subset B$,因而

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

注:性质 6 可以推广到 n 个事件的情形,如当 $n=3$ 时,

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 1.6 设事件 $A,B,A\cup B$ 的概率分别为 p,q,r. 求:

(1) $P(AB)$;(2) $P(A\overline{B})$;(3) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 (1) 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 知

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=p+q-r.$$

(2) 由 $A=AS=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$, 且 AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容知

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}),$$

即

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=r-q.$$

(3) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-r.$

例 1.7 观察某地区未来 5 天的天气情况,记 $A_i=\{$有 i 天不下雨$\}$, $i=0,1,2,3,4,5$. 已知 $P(A_j)=jP(A_0)$, $j=1,2,3,4,5$. 求下列各事件的概率:

(1) 5 天均下雨;(2) 至少 1 天不下雨;(3) 至多 3 天不下雨.

解 显然 $A_0,A_1,\cdots,A_5$ 是两两不相容的事件且 $\bigcup_{i=0}^{5}A_i=S$,故

$$1=P(S)=P\left(\bigcup_{i=0}^{5}A_i\right)=\sum_{i=0}^{5}P(A_i)=P(A_0)+\sum_{i=1}^{5}iP(A_0)=16P(A_0),$$

于是

$$P(A_0)=\frac{1}{16},\ P(A_i)=\frac{i}{16}, i=1,2,3,4,5.$$

记(1),(2),(3) 中三个事件分别为 A,B,C,则

(1) $P(A)=P(A_0)=\dfrac{1}{16}$.

(2) $P(B)=P\left(\bigcup_{i=1}^{5}A_i\right)=1-P(A_0)=\dfrac{15}{16}$.

(3) $P(C)=P\left(\bigcup_{i=0}^{3}A_i\right)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)=\dfrac{7}{16}$.

1.3 古典概型和几何概型

概率的公理化定义并没有告诉我们怎么去确定一个事件的概率. 本节将讨论两类比较

简单的随机试验,这两类随机试验中每个样本点的出现是等可能的.下面先介绍在有限集计数中常用的排列与组合公式.

1.3.1 排列与组合公式

排列与组合都是用来计算"从 n 个元素中任取 r 个"的取法总数的公式,它们的区别在于,如果不考虑取出元素间的次序,则用组合公式,否则用排列公式.有限集合的计数都基于如下两条基本计数原理:

(1) **加法原理** 若完成一件事有 m 类不同途径,其中第一类途径有 n_1 种方法,第二类途径有 n_2 种方法,…,第 m 类途径有 n_m 种方法,则完成这件事的方法总数为 $n_1+n_2+\cdots+n_m$.

(2) **乘法原理** 若一件事需经 m 个步骤才能完成,其中第一个步骤有 n_1 种方法,第二个步骤有 n_2 种方法,…,第 m 个步骤有 n_m 种方法,则完成这件事的方法总数为 $n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_m$.

排列与组合的定义及其计算公式如下:

(1) **排列** 从 n 个不同元素中任取 $r(r\leqslant n)$ 个排成一列(考虑元素间的先后次序),称此为一个排列,此种排列的总数记为 P_n^r.按乘法原理,取出的第一个元素有 n 种取法,第二个元素有 $n-1$ 种取法,…,第 r 个元素有 $n-r+1$ 种取法,因而有

$$\mathrm{P}_n^r=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

特别地,当 $r=n$ 时,$\mathrm{P}_n^n=n!$.

(2) **组合** 从 n 个不同元素中任取 $r(r\leqslant n)$ 个并成一组(不考虑元素间的先后次序),称此为一个组合,此种组合的总数记为 C_n^r 或 $\binom{n}{r}$,按乘法原理,此种组合的总数为

$$\mathrm{C}_n^r=\frac{\mathrm{P}_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

这里规定 $0!=1$ 和 $\mathrm{C}_n^0=1$.

注:组合数满足下列性质:

① $\mathrm{C}_n^r=\mathrm{C}_n^{n-r}$.

② $\mathrm{C}_n^r=\mathrm{C}_{n-1}^r+\mathrm{C}_{n-1}^{r-1}$.

③ $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$.

④ $\mathrm{C}_n^1+2\mathrm{C}_n^2+\cdots+n\mathrm{C}_n^n=\sum\limits_{i=1}^{n}i\mathrm{C}_n^i=n2^{n-1}$.

⑤ $\sum\limits_{i=0}^{m}\mathrm{C}_n^i\mathrm{C}_m^{m-i}=\mathrm{C}_{m+n}^m(n\geqslant m)$.

1.3.2 古典概型

在概率论发展的初期,人们研究的是一类特殊的随机试验,这类试验具有以下两个特点:

(1) **有限性** 随机试验只有有限个样本点.

(2) **等可能性** 每一个样本点发生的可能性相同.

具备以上两个特征的随机试验称为**等可能概型**,由于这种等可能的数学模型曾经是概率论发展初期的主要研究对象,所以也称为**古典概型**.古典概型在概率论中有很重要的地

位,它是一类简单、直观的随机试验,如抛硬币、掷骰子、抽签等.下面利用概率的性质来讨论古典概型中事件概率的计算公式.

设试验的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$.在古典概型的假设下,试验中每个基本事件发生的可能性相同,即有

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

又由于基本事件是两两互不相容的,因而

$$\begin{aligned}1=P(S)&=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})\\&=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\}),\end{aligned}$$

即

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n},\ i=1,2,\cdots,n.$$

若事件 A 包含其样本空间 S 中 k 个基本事件,即

$$A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_k}\},$$

则事件 A 发生的概率

$$P(A)=P\left(\bigcup_{j=1}^{k}\{e_{i_j}\}\right)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}. \tag{1.1}$$

式(1.1)就是古典概型中概率的计算公式,它把计算事件概率的问题转化为对基本事件的计数问题.

例 1.8 将 1,2,3,4 四个数随意地排成一行,求下列各事件的概率:

(1) 自左至右或自右至左恰好排成 1,2,3,4 的顺序.

(2) 数字 1 排在最右边或最左边.

(3) 数字 1 与数字 2 相邻.

(4) 数字 1 排在数字 2 的右边(不一定相邻).

解 将 4 个数随意地排成一行有 $4!=24$ 种排法,即基本事件总数为 24.记(1),(2),(3),(4) 的事件分别为 A,B,C,D.

(1) 事件 A 中共有 2 种排法,因而

$$P(A)=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}.$$

(2) 事件 B 中有 $2\times(3!)=12$ 种排法,故有

$$P(B)=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

(3) 先将数字 1 和 2 排在任意相邻两个位置,共有 2×3 种排法,其余两个数可在其余两个位置任意排放,共有 $2!$ 种排法,因而事件 C 有 $2\times3\times2=12$ 种排法,即

$$P(C)=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

(4) 数字 1 排在数字 2 的右边的每一种排法,交换数字 1 和数字 2 的位置便对应于数字 1 排在数字 2 的左边的一种排法,反之亦然.因而,数字 1 排在数字 2 的右边与数字 1 排在数字 2 的左边的排法种数相同,各占总排法数的 $\frac{1}{2}$,故有

$$P(D)=\frac{1}{2}.$$

例 1.9 一盒中共有 N 只球,其中 M 只红球,$N-M$ 只白球,从中抽取 n 个,考虑两种取球方式:

(1) 每次取一只球,观察其颜色后放回盒中,搅匀后再取,直至取 n 次,这种取球方式称为**放回抽样**;

(2) 第一次取一球不放回,第二次从剩余的球中再取一球,如此继续下去,直至取出 n 只球,这种取球方式称为**不放回抽样**.

试分别就上面的两种情况,设 $A_m=\{$取出的 n 只球中至少有 m 只红球$\}$,$B_m=\{$取出的 n 只球中恰有 m 只红球$\}$,求 $P(A_m)$ 及 $P(B_m)$ $(m<\min(n,M))$.

解 (1) 放回抽样.

在放回抽样的情况下,从 N 只球中取 n 只,共有 N^n 种取法.

事件 A_m 相当于从 n 次取球中先选取 m 次,使得这 m 次都取红球,剩下的 $n-m$ 次可以任意取,因而 A_m 中总的取法有 $\mathrm{C}_n^m M^m N^{n-m}$ 种.

事件 B_m 相当于从 n 次取球中先选取 m 次,使得这 m 次都取红球,剩下的 $n-m$ 次都取白球,因而 B_m 中总的取法有 $\mathrm{C}_n^m M^m (N-M)^{n-m}$ 种.

从而,根据古典概率计算

$$P(A_m)=\frac{\mathrm{C}_n^m M^m N^{n-m}}{N^n},$$

$$P(B_m)=\frac{\mathrm{C}_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n}.$$

(2) 不放回抽样.

在不放回抽样的情况下,从 N 只球中取 n 只,从排列的角度看共有 $\mathrm{C}_N^1\mathrm{C}_{N-1}^1\cdots\mathrm{C}_{N-n+1}^1=\mathrm{P}_N^n$ 种取法.

事件 A_m 相当于从 n 次取球中先选取 m 次,这 m 次是不放回地顺次取 m 只红球,剩下的 $n-m$ 次可以不放回地任意取,因而 A_m 中总的取法有 $\mathrm{C}_n^m\mathrm{P}_M^m\mathrm{P}_{N-m}^{n-m}$ 种.

事件 B_m 相当于从 n 次取球中先选取 m 次,使得这 m 次都不放回地顺次取红球,剩下的 $n-m$ 次都不放回地顺次取白球,因而 B_m 中总的取法有 $\mathrm{C}_n^m\mathrm{P}_M^m\mathrm{P}_{N-M}^{n-m}$ 种.

从而,根据古典概率计算

$$P(A_m)=\frac{\mathrm{C}_n^m\mathrm{P}_M^m\mathrm{P}_{N-m}^{n-m}}{\mathrm{P}_N^n},P(B_m)=\frac{\mathrm{C}_n^m\mathrm{P}_M^m\mathrm{P}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{P}_N^n}.$$

注: 对于(2)不放回抽样的情形,也可以从组合的角度来计数,这时“从 N 只球中取 n 只”共有 C_N^n 种取法,事件“取出的 n 只球中至少有 m 只红球”共有 $\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-m}^{n-m}$ 种取法;事件“取出的 n 只球中恰有 m 只红球”共有 $\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}$ 种取法.

在用排列组合公式计算古典概率时,先要看清所考虑的是排列问题还是组合问题,在计算样本空间 S 和事件 A 所包含的基本事件数时,两者一定要保持一致,是排列就都是排列,是组合就都是组合.不要重复计数,也不要遗漏.

例 1.10 袋中有 a 支红签,b 支白签,它们除颜色外无差别,现有 $a+b$ 个人无放回地去抽签,求第 k 个人抽到红签的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

解法一 记 $A=\{$第 k 个人抽到红签$\}$.

假设这 $a+b$ 支签都不相同,让这 $a+b$ 个人抽完签以后排成一排,相当于把这 $a+b$ 支签

排成一排，共有$(a+b)!$种排法. 第 k 个人抽到红签相当于第 k 个位置放的是红签，先在第 k 个位置放一支红签，有 C_a^1 种放法，其余各签随意放，有$(a+b-1)!$种放法，故事件 A 包含 $C_a^1(a+b-1)!$个基本事件，因而

$$P(A)=\frac{C_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法二 记 $A=\{$第 k 个人抽到红签$\}$.

假设这 $a+b$ 支签都不相同，只看前 k 个人的抽签情况，共有 P_{a+b}^k 种可能排法，事件 A 包含了 $C_a^1P_{a+b-1}^{k-1}$ 个基本事件，所以

$$P(A)=\frac{C_a^1P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k}=\frac{a(a+b-1)!(a+b-k)!}{(a+b-k)!(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

注：由上例可以看到，对于古典概型可用不同的等可能基本事件组来描述，对同一事件的概率也常有多种不同的解法. 本题结果还说明，每个人抽到红签的概率与抽签的先后次序无关. 所以，进行分组的时候采用抽签或抓阄的方法是公平的.

例 1.11 在 $1\sim 2\,000$ 的整数中随机地取一个数，问取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率.

解 记 $A=\{$取到的数能被 6 整除$\}$，$B=\{$取到的数能被 8 整除$\}$，则所求概率为

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$.

由于 $333<\dfrac{2\,000}{6}<334$，因而

$$P(A)=\frac{333}{2\,000}.$$

同理，由于$\dfrac{2\,000}{8}=250$，得

$$P(B)=\frac{250}{2\,000}.$$

又由于一个数同时能被 6 与 8 整除，就相当于能被 24 整除，且由 $83<\dfrac{2\,000}{24}<84$，得

$$P(AB)=\frac{83}{2\,000}.$$

于是所求概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-\left(\frac{333}{2\,000}+\frac{250}{2\,000}-\frac{83}{2\,000}\right)=\frac{3}{4}.$$

1.3.3 几何概型

古典概型考虑的是有有限个样本点且每个样本点是等可能发生的随机试验的概率模型，当试验的样本点有无穷多个的时候，古典概型就不适用了. 下面考虑如何将古典概型作必要的推广，使给出的模型能适用于有无穷多个样本点且每个样本点发生的可能性相等的试验.

设随机试验 E 的样本空间有无限多个样本点，其可用欧氏空间的某个区域 S 来表示(假设区域 S 以及 S 中的任意小区域 A 都是可以度量的，其度量大小用 $\mu(A)$ 表示. 例如，一维区间的长度、二维平面的面积、三维空间的体积等)，各个样本点出现的可能性相同，即向 S 中

任投一点,则此点落在 S 中某区域 A 中的可能性大小只与区域的度量成正比,而与区域 A 的位置及形状无关,设事件 A 的概率为 $P(A)=k\mu(A)$,其中 k 为常数,而 $P(S)=k\mu(S)$,于是 $k=\frac{1}{\mu(S)}$,从而事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)},$$

称具有这种特性的试验为**几何概型**.

例 1.12 (会面问题) 甲、乙两人相约在 8 点到 9 点之间在某处会面,并约定先到者应等候另一人 20 分钟,过时就离开. 如果每个人可在指定的一小时内任意时刻到达,试计算二人能够会面的概率.

解 设 $A=\{$甲、乙两人能会面$\}$. 记 8 点为计算时刻的 0 时,以分钟为单位,设甲、乙两人到达的时刻分别是 x,y,则样本空间为

$$S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,0\leqslant y\leqslant 60\}.$$

事件 A(见图 1-3) 可表示为

$$A=\{(x,y)\mid (x,y)\in S,\ |x-y|\leqslant 20\}.$$

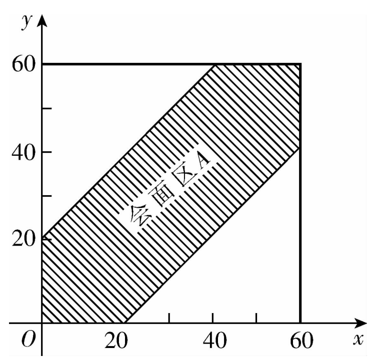


图 1-3

由题意知,这是一个几何概型问题,于是

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

注: 求几何概型的概率关键是用图形(一般用线段、平面或空间图形) 清楚地描述样本空间 S 和所求事件 A,然后计算出相关图形的度量(一般为长度、面积或体积).

例 1.13 (三角形构成问题) 在长度为 a 的线段内任取两点将其分为三段,求它们可以构成一个三角形的概率.

解 令被截成的三段线段长度分别为 $x,y,a-x-y$,设 $A=\{$截成的三线段能构成三角形$\}$,则样本空间 S 和事件 A(见图 1-4) 可表示为

$$\begin{aligned}S&=\{(x,y)\mid 0<x<a,0<y<a,0<a-x-y<a\}\\&=\{(x,y)\mid 0<x<a,0<y<a,0<x+y<a\},\\A&=\{(x,y)\mid 0<x<a,0<y<a,0<x+y<a,\\&\qquad x+y>a-x-y,a-x>x,a-y>y\}\\&=\{(x,y)\mid x<\frac{a}{2},y<\frac{a}{2},x+y>\frac{a}{2}\}.\end{aligned}$$

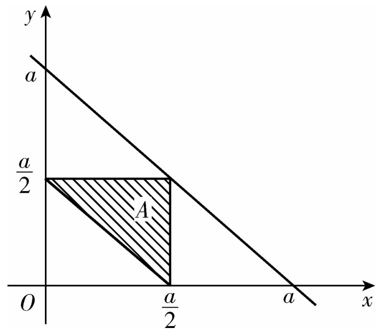


图 1-4

所以

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}=\frac{1}{4}.$$

1.4 条件概率与事件的独立性

1.4.1 条件概率

在实际问题中，除了考虑某个事件 A 的概率 $P(A)$，经常还需要考虑在另一个事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率. 例如，在遗传学上，考虑在已知父亲的身高不低于 1.75 米的情况下，子辈的身高不低于 1.70 米的概率；在统计某城市居民人均年收入时，通常也是考虑在已知居民的学历水平为本科的条件下，他们的人均年收入不低于某个值的概率. 类似于这样的，在某个事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率，称为条件概率，记为 $P(A\mid B)$. 下面通过一个例子来给出条件概率的数学定义.

例 1.14 掷一颗均匀的骰子，若已知掷出的是奇数点，问掷出的点数小于 3 的概率.

解 这个问题的解决并不困难，由题意知掷出的是奇数点，只是不能肯定这个奇数点是 1,3,5 中的哪一个. 显然，"掷出的点数小于 3" 这一事件就相当于"掷出的是 1 点"，因而，在已知掷出的是奇数点的条件下，掷出的点数小于 3 的概率是$\frac{1}{3}$. 记"掷出的点数小于 3" 这一事件为 A，"掷出的是奇数点" 这一事件为 B，即$P(A\mid B)=\frac{1}{3}$.

注意到 $P(A\mid B)=\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$.

事实上，不难验证，对于一般的古典概型问题，只要 $P(B)>0$，都有

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

同样，在几何概型中，在已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率也可以表示为

$$P(A\mid B)=\frac{\mu(AB)}{\mu(B)}=\frac{\mu(AB)/\mu(S)}{\mu(B)/\mu(S)}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

因而,在古典概型和几何概型中都有 $P(A \mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$. 在一般场合,将上述关系式作为条件概率的数学定义.

定义 1.4 设 A,B 为两个事件,且 $P(B)>0$,称

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.

注: 相对于条件概率 $P(A \mid B)$,$P(A)$ 称为**无条件概率**. $P(A)$ 表示在样本空间 S 中事件 A 发生的概率. 而 $P(A \mid B)$ 则是局限在事件 B 发生的范围内,事件 A 发生的概率,相当于把事件 A 所在的样本空间缩小了.

设 B 是一事件, 且 $P(B)>0$. 容易验证,条件概率 $P(\cdot \mid B)$ 符合概率定义中的三个条件, 即

(1) 对于任意事件 A, $0 \leqslant P(A \mid B) \leqslant 1$.

(2) $P(S \mid B)=1$.

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \mid B\right)=\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i \mid B).$$

此外,前面证明的概率的性质都适用于条件概率.

计算条件概率有两种方法:

(1) 在缩减的样本空间 B 中求事件 A 的概率,就得到 $P(A \mid B)$.

(2) 在样本空间 S 中,先求 $P(AB)$ 和 $P(B)$,再按定义计算 $P(A \mid B)$.

例 1.15 袋中有 3 个红球和 2 个白球. 现从袋中不放回地连取 2 个. 已知第一次取得红球,求第二次取得白球的概率.

解 记 $A=\{$第二次取得白球$\}$,$B=\{$第一次取得红球$\}$,依题意要求 $P(A \mid B)$.

解法一 从袋中不放回地连续取两个球,则第一次取得红球的取法有 $\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_4^1$ 种,在缩减的样本空间 B 中考虑第二次取得白球的取法有 $\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_2^1$ 种,所以

$$P(A \mid B)=\frac{\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_2^1}{\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_4^1}=\frac{1}{2}.$$

也可以直接计算,因为第一次取走了 1 个红球,袋中只剩下 4 个球,其中有 2 个白球和 2 个红球,再从中任取 1 个,取得白球的概率为$\dfrac{2}{4}$,所以

$$P(A \mid B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

解法二 在 5 个球中不放回连取 2 个球的取法有 P_5^2 种,其中第一次取得红球的取法有 $\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_4^1$ 种,第一次取得红球第二次取得白球的取法有 $\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_2^1$ 种,所以

$$P(B)=\frac{\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_4^1}{\mathrm{P}_5^2}=\frac{3}{5},P(AB)=\frac{\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_2^1}{\mathrm{P}_5^2}=\frac{3}{10}.$$

由定义得

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3/10}{3/5}=\frac{1}{2}.$$

1.4.2 乘法公式

由条件概率的定义,容易得到

$$P(AB)=P(A)P(B|A)(P(A)>0) \tag{1.2}$$

或者

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)(P(B)>0). \tag{1.3}$$

式(1.2)和式(1.3)称为**乘法公式**,利用乘法公式可以计算积事件的概率.

乘法公式可以推广到多个事件的积事件的情形. 例如,对于 3 个事件 A_1,A_2,A_3,且 $P(A_1A_2)>0$,有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1).$$

一般地,对于n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,n\geqslant 2$,且$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$(此假设可保证下式中所有条件概率都有意义),有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1).$$

例 1.16 一批零件共有 100 个,其中有 10 个不合格品. 从中一个一个取出,求第三次才取得不合格品的概率.

解 令 $A_i=\{$第 i 次取出的是不合格品$\}$,$i=1,2,3$,则所求概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{10}{98}\times\frac{89}{99}\times\frac{90}{100}\approx 0.082\,6.$$

例 1.17 (罐子模型,又叫**波利亚模型**)**设罐中有b个黑球、r个红球,每次随机取出一个球,观察其颜色后将球放回,同时加进 c 个同色球和 d 个异色球. 若在袋中连续取球四次,试求第一、三次取红球且第二、四次取黑球的概率.**

解 令 $B_i=\{$第 i 次取出的是黑球$\}$,$i=1,2,3,4$;$R_j=\{$第 j 次取出的是红球$\}$,$j=1,2,3,4$. 由题意,所求概率为

$$\begin{aligned}P(R_1B_2R_3B_4)&=P(B_4\mid R_1B_2R_3)P(R_3\mid R_1B_2)P(B_2\mid R_1)P(R_1)\\&=\frac{b+c+2d}{b+r+3c+3d}\cdot\frac{r+c+d}{b+r+2c+2d}\cdot\frac{b+d}{b+r+c+d}\cdot\frac{r}{b+r}.\end{aligned}$$

1.4.3 事件的独立性

条件概率$P(A\mid B)$反映了事件B对事件A的影响,一般来说,$P(A)$与$P(A\mid B)$是不相等的. 但在许多实际问题中,常会遇到这样一种情况:两个事件中的一个事件的发生不影响另一个事件的发生,即有 $P(A)=P(A\mid B)$. 由此引出了事件独立的概念.

定义 1.5 若两事件 A 与 B 满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A 与 B **相互独立**,简称 A 与 B **独立**.

注:① 不可能事件及必然事件与任何事件都独立.

② 两事件相互独立与互不相容是两个完全不同的概念,它们分别从不同角度刻画了两事件之间的某种关系. 互不相容是事件的集合属性,而相互独立是事件的概率属性. 可以知道,若 $P(A)>0$,$P(B)>0$,则事件 A 与 B 互不相容和独立不能同时成立,或者说,若 A 与 B 既独立又互不相容,则一定有 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

由条件概率和独立性的定义,有下面的结论.

定理 1.1 设 A 与 B 是两事件,且 $P(B)>0$,若 A 与 B 相互独立,则 $P(A)=P(A\mid B)$. 反之亦然.

定理 1.2 若事件 A,B 相互独立,则 (1) A 与 $\overline{B}$ 独立;(2) $\overline{A}$ 与 B 独立;(3) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

证明 (1) 因为

$$\begin{aligned}P(A\overline{B}) &= P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)\\ &= P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B}),\end{aligned}$$

所以 A 与 $\overline{B}$ 独立.

同理可证(2),(3).

因此,从概率的角度看,两事件相互独立是指一个事件的发生不影响另一个事件的发生. 在实际应用中,判断两事件是否独立也常采用这个标准.

独立的概念可以推广到多个事件的情形.

定义 1.6 设 A,B,C 是三个事件,如果有

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$

则称事件 A,B,C **两两独立**.

若同时还有

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称事件 A,B,C **相互独立**.

注:相互独立的事件一定是两两独立的,反之不成立.

例 1.18 设有 4 张卡片,其中 3 张上分别标有数字 1,2,3,剩下的 1 张上同时标有这 3 个数字. 现从 4 张卡片中任取 1 张,记 $A_i=\{$取出的卡片上标有数字 $i\}$,$i=1,2,3$. 试分析 A_1,A_2,A_3 三个事件间的独立情况.

解 由题意知

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{4}.$$

由于

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_2),$$

$$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}=P(A_2)P(A_3),$$

因而 A_1,A_2,A_3 三个事件两两独立.

又知 $P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{4}$, 但 $P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8}$, 即 $P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$,因而 A_1,A_2,A_3 不相互独立.

一般地,任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若对任意的 $k(1<k\leqslant n)$ 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$,$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称此 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

显然,若 n 个事件相互独立,则它们中的任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件也相互独立.

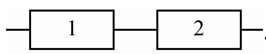
此外,对于多个相互独立的事件也有类似于两个事件独立的定理 1.2 的结论,即若 A_1,$A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则将它们中的任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个事件换成它们的对立事件后所得到的 n 个事件仍相互独立.

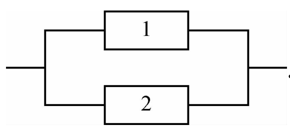
注:在计算 n 个相互独立的事件的和的概率时,常常用到如下计算公式:

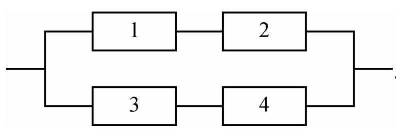
$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})\\&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).\end{aligned}$$

近年来,可靠性理论得到迅速发展.元件的可靠度指的是一个原件在规定的时间内和规定的条件下能完成规定功能的概率.系统的可靠度是指由元件组成的一个系统在规定时间内和规定的条件下能正常工作的概率.下面通过例子来说明事件的独立性在可靠性理论中的应用.

例 1.19 系统由多个元件组成,且所有元件都独立地工作.设每个元件正常工作的概率都是 $p=0.9$,试求以下系统正常工作的概率:

(1) 串联系统 S_1: .

(2) 并联系统 S_2: .

(3) 混联系统 S_3: .

解 设 $A_i=\{$第 S_i 个系统正常工作$\}$,$i=1,2,3$;$B_j=\{$第 j 个元件正常工作$\}$,$j=1$,$2,3,4$.

(1) $P(A_1)=P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2)=p^2=0.81$.

(2) $P(A_2)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1)P(B_2)=p+p-p^2=0.99$.

(3) 易知 $A_3=B_1B_2\cup B_3B_4$,由此

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(B_1B_2\cup B_3B_4)=P(B_1B_2)+P(B_3B_4)-P(B_1B_2B_3B_4)\\&=P(B_1)P(B_2)+P(B_3)P(B_4)-P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(B_4)\\&=2p^2-p^4=0.963\,9.\end{aligned}$$

1.4.4 伯努利试验

利用事件的独立性可以定义两个或更多个试验的独立性.

定义 1.7 设有两个试验 E_1 和 E_2,假如试验 E_1 的任一结果(事件)与试验 E_2 的任一结果(事件)都是相互独立的事件,则称这**两个试验相互独立**.

类似地,可定义 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 的相互独立性:如果 E_1 的任一结果、E_2 的任一结果、$\cdots$、E_n 的任一结果都是相互独立的事件,则称**试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 相互独立**.如果这 n 个试验还是相同的,则称其为 **n 重独立重复试验**;如果在 n 重独立重复试验中,每次试验只有两个

可能结果:事件 A 发生及事件 $\overline{A}$ 不发生,则称这类试验为 **n 重伯努利(Bernoulli)试验**,也称为**伯努利概型**.

例如,掷 n 枚硬币、掷 n 颗骰子、检查 n 个产品等等都是 n 重独立重复试验,它们也可以看做 n 重伯努利试验.

定理 1.3 在 n 重伯努利试验中,设每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次试验中,事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

证明 记 $A_i=\{$第 i 次试验中事件 A 发生$\}$, $i=1,2,\cdots,n$. 在 n 次试验中,事件 A 在指定的 k 次试验中发生(比如前 k 次),其余 $n-k$ 次试验中不发生的概率为

$$P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n)=P(A_1)\cdot\cdots\cdot P(A_k)\cdot P(\overline{A}_{k+1})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A}_n)=p^k(1-p)^{n-k}.$$

由于 n 次试验中 A 发生 k 次的方式共有 C_n^k 种,而 C_n^k 种方式对应 C_n^k 个事件. C_n^k 个事件中的任一个发生都可导致事件 A 的发生,且这 C_n^k 个事件两两互不相容,于是有

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

由于 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 正好是二项式 $(px+(1-p))^n$ 的展开式中 x^k 的系数,因此称上述公式为**二项概率公式**.

注:在 n 重伯努利试验中,事件 A 至少发生一次的概率为 $1-P_n(0)=1-(1-p)^n$.

例 1.20 一袋中有 4 个红球和 6 个白球,甲、乙两人采用取后放回的方式各取 n 次,每次取 1 个球,求甲取到的红球数与乙取到的白球数相等的概率.

解 设 $A_k=\{$甲取到 k 个红球$\}$,$B_k=\{$乙取到 k 个白球$\}$,$C=\{$甲取到的红球数与乙取到的白球数相等$\}$.

采用取后放回的方式取 n 次球是一个 n 重伯努利试验,所以

$$P(A_k)=C_n^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k},P(B_k)=C_n^k\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{n-k},$$

又 $C=\bigcup\limits_{k=0}^{n}A_kB_k$,由于 A_k 与 B_k 相互独立,且 A_iB_i 与 $A_jB_j(i\neq j)$ 互不相容,因此事件 C 发生的概率为

$$P(C)=P\left(\bigcup_{k=0}^{n}A_kB_k\right)=\sum_{k=0}^{n}P(A_k)P(B_k)=\left(\frac{6}{25}\right)^n\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_n^{n-k}=\left(\frac{6}{25}\right)^nC_{2n}^n.$$

1.5 全概率公式与贝叶斯公式

1.5.1 全概率公式

从已知简单事件的概率推算出未知复杂事件的概率是概率论的重要研究课题之一. 为了计算复杂事件的概率,经常把一个复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件的和,通过分别计算简单事件的概率,并利用概率的加法公式和乘法公式等得到最终的结果. 在这类计算中,全概率公式起着重要作用. 下面先介绍样本空间划分的定义.

定义 1.8 设 S 为试验 E 的样本空间,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件. 若有

(1) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$.

(2) $B_iB_j=\varnothing(i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n)$,

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 构成了样本空间 S 的一个**划分**.

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分,那么对于每次试验,事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中有一个且仅有一个发生.

注:划分可看作是对立事件概念上的推广,其特点是“不重不漏”. 对于给定试验的样本空间,其划分是不唯一的.

定理 1.4(全概率公式) 若事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 构成了试验E 的样本空间S 的一个划分,且 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,则对 E 的任一事件 A 都有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i). \tag{1.4}$$

式(1.4) 称为**全概率公式.**

证明 由划分的定义知

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap S)=P\Big(A\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\Big)\Big)=P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)\Big)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).\end{aligned}$$

特别地,当 $n=2$ 时,若 $0<P(B)<1$,记 B_1 为 B,则 B_2 为$\overline{B}$,于是

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

全概率公式的直观意义:对于某一复杂事件A,若A的发生有各种可能的原因$B_i,i=1,2,\cdots,n$,则事件 A 发生的概率即是在各事件 B_i 发生的条件下引起 A 发生的概率的总和.

例 1.21 设在 n 张彩票中有一张奖券,求第二个人摸到奖券的概率.

解 记 $A_i=\{$第 i 个人摸到奖券$\},i=1,2,\cdots,n$,则

$$P(A_1)=\frac{1}{n},P(\overline{A}_1)=\frac{n-1}{n},P(A_2\mid A_1)=0,P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{1}{n-1}.$$

由全概率公式可得

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

类似可得

$$P(A_3)=P(A_4)=\cdots=P(A_n)=\frac{1}{n}.$$

如果设 n 张彩票中有 $k(k\leqslant n)$ 张奖券,则

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=\frac{k}{n}.$$

这说明,购买彩票时,不论先买后买,中奖的机会是均等的.

例 1.22 设某仓库有一批产品,已知其中甲、乙、丙三个工厂生产的产品依次占 50%,30% 和 20%,且甲、乙、丙厂的次品率分别为$\frac{1}{10},\frac{1}{15}$ 和$\frac{1}{20}$,现从这批产品中任取一件,求取得正品的概率.

解 记 $A_1=\{$取得的这件产品是甲厂生产的$\}$,$A_2=\{$取得的这件产品是乙厂生产的$\}$,$A_3=\{$取得的这件产品是丙厂生产的$\}$,$B=\{$取得的产品是正品$\}$. 于是

$$P(A_1)=\frac{5}{10},\ P(A_2)=\frac{3}{10},\ P(A_3)=\frac{2}{10},$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{9}{10},\ P(B\mid A_2)=\frac{14}{15},\ P(B\mid A_3)=\frac{19}{20},$$

由全概率公式知

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3) \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{14}{15} \times \frac{3}{10} + \frac{19}{20} \times \frac{2}{10} = 0.92.\end{aligned}$$

注:利用全概率公式计算复杂事件的概率时,最关键的一步是找样本空间的划分.

例 1.23 要验收一批产品(共 100 件),验收方案如下:从这批产品中随机取 3 件检测(设对 3 件产品的检测是独立的),若 3 件中至少有 1 件在检测中被认为不合格,则这批产品被拒收.设一件不合格品被检测为不合格的概率为 0.95,而一件合格品被误测为不合格品的概率为 0.01,如果已知 100 件产品中恰有 4 件是不合格品,试求这批产品被接收的概率.

解 记 $A = \{$这批产品被接收$\}$,$B_i = \{$随机地取出 3 件产品,其中恰有 i 件不合格品$\}$,$i = 0,1,2,3$,则有

$$P(A \mid B_0) = (0.99)^3,P(A \mid B_1) = (0.99)^2 \times 0.05,$$
$$P(A \mid B_2) = 0.99 \times (0.05)^2,P(A \mid B_3) = (0.05)^3,$$

而

$$P(B_0) = \frac{C_{96}^3}{C_{100}^3},P(B_1) = \frac{C_4^1 C_{96}^2}{C_{100}^3},P(B_2) = \frac{C_4^2 C_{96}^1}{C_{100}^3},P(B_3) = \frac{C_4^3}{C_{100}^3},$$

由全概率公式知

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(A \mid B_i)P(B_i) = 0.862\,9.$$

1.5.2 贝叶斯公式

利用全概率公式,可通过综合分析一事件发生的不同原因及其可能性来求得该事件发生的概率.但在实践中,往往会遇到这样的问题:一事件已经发生了,要考虑该事件发生的各种原因的可能性的大小.例如,在疾病诊断问题中,已知出现某种症状有多种原因,要研究引起这种症状的各种病因的概率是多少,哪种病因的概率最大,以此来作为疾病诊断的依据.对于类似于这种"由果溯因"的推断问题,可用下面的贝叶斯公式来解决.

定理 1.5 若事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 构成了试验 E 的样本空间 S 的一个划分,且 $P(B_i) > 0,i = 1,2,\cdots,n$,$A$ 为 E 的任一事件,$P(A) > 0$,则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)},i = 1,2,\cdots,n. \tag{1.5}$$

公式(1.5)称为**贝叶斯公式**,也称为**后验公式**.

证明 由条件概率的定义和全概率公式即得

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)},i = 1,2,\cdots,n.$$

特别地,若取 $n = 2$,记 B_1 为 B,则 B_2 为 $\overline{B}$,于是

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B})}.$$

例 1.24 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号"•"和"—",由于通讯系统受到干扰,当发出信号"•"时,收报台未必收到信号"•",而是分别以 0.8 和 0.2 的概率收到"•"和

“—”；同样，发出“—”时分别以 0.9 和 0.1 的概率收到“—”和“•”. 如果收报台收到“•”，求它没收错的概率.

解 记 $A=\{$发出信号“•”$\}$，$B=\{$收到信号“•”$\}$，则 $\overline{A}=\{$发出信号“—”$\}$，$\overline{B}=\{$收到信号“—”$\}$. 于是

$$P(A)=0.6,P(\overline{A})=0.4,P(B\mid A)=0.8,$$
$$P(\overline{B}\mid A)=0.2,P(B\mid \overline{A})=0.1,P(\overline{B}\mid \overline{A})=0.9,$$

由贝叶斯公式知

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})}$$
$$=\frac{0.6\times 0.8}{0.6\times 0.8+0.4\times 0.1}=\frac{12}{13},$$

所以没收错的概率为 $\frac{12}{13}$.

例 1.25 对于例 1.22，若取出的是正品，问该产品是由甲厂生产的概率.

解 沿用例 1.22 的记号，要求的是 $P(A_1\mid B)$，由贝叶斯公式知

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_1)P(A_1)}{P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)}$$
$$=0.489\,1.$$

在此例中，$P(A_1)$ 和 $P(A_1\mid B)$ 分别称为 A_1 的**先验概率与后验概率**，$P(A_1)$ 是在没有进一步信息（不知道事件 B 是否发生）的情况下 A_1 发生的概率，在获得新的信息（知道 B 发生）后，人们对 A_1 发生的概率可以重新加以修正，得到 $P(A_1\mid B)$，因而称为后验概率.

本章小结

概率论的研究对象是随机现象，是通过研究随机试验来研究随机现象的. 随机试验的全部可能结果组成的集合称为样本空间. 样本空间作为一个集合，它的子集称为事件，在一次随机试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 事件之间的关系和运算可按照集合之间的关系和运算来处理.

在一次随机试验中，一个事件可能发生也可能不发生，怎样来描述某一事件在一次试验中发生的可能性的大小？频率是处理这个问题的一个古老、直观的概念. 从频率的稳定性以及频率的性质得到启发，给出了概率的公理化定义. 本章定义了一个集合（事件）的函数 $P(\cdot)$，它满足三条基本性质：非负性、规范性、可列可加性. 这样定义的函数的函数值 $P(A)$ 称为事件 A 的概率.

对于一个事件的概率值具体是多少，概率的定义并没有给出一个通用的计算方法. 对于两种经典的等可能情形的概率模型 —— 古典概型和几何概型，给出了事件概率的求法.

从古典概型和几何概型中得到启发和抽象，给出了条件概率的公式

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},P(B)>0. \tag{1}$$

计算条件概率的时候，通常采用两种方法：① 在样本空间 S 中计算 $P(AB)$ 和 $P(B)$，按式(1)计算；② 在事件 B 已发生的范围内，求事件 A 的概率，即在缩减的样本空间 $S'=B$ 中计算事件 A 的概率.

式(1) 也可以表示为

$$P(AB)=P(A\mid B)P(B),P(B)>0, \tag{2}$$

式(2) 称为乘法公式.

一般情况下,条件概率 $P(A\mid B)$ 和无条件概率 $P(A)$ 是不相等的,当两者相等时,称两事件 A 和 B 相互独立.事件的独立性是概率论中的一个非常重要的概念,概率论和数理统计中很多内容都是在独立的前提下讨论的.在实际应用中,往往是根据实际背景判断事件的独立性.

在求一个复杂事件 A 的概率时,若 A 的发生有各种可能的原因 $B_i,i=1,2,\cdots,n$,则事件 A 发生的概率是各事件 B_i 发生的条件下引起 A 发生的概率的总和,即将复杂事件 A 分解成若干个互不相容的简单事件之和,通过利用全概率公式求解.若一事件已经发生了,要考虑引发该事件发生的各种原因的可能性的大小,可利用贝叶斯公式求解.

本章知识要点

随机试验　样本空间　随机事件　事件的关系和运算　频率　概率的公理化定义　古典概型　几何概型　条件概率　乘法公式　事件的独立性　伯努利试验　全概率公式　贝叶斯公式

本章常用结论

1) 事件的运算律

交换律　$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A.$

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$

对偶律(德摩根律)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B};$

减法运算　$A-B=A\overline{B}=A-AB.$

2) 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0,P(S)=1.$

(2) 对于任意一个事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1.$

(3) 有限可加性　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(4) 可列可加性　对可列个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i).$$

(5) 减法公式　若 A,B 为任意两个事件,则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

特别地,若 $B\subset A$,则有

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

(6) 加法公式　若 A,B 为任意两个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

(7) $P(\overline{A})=1-P(A).$

3）古典概型概率的计算

古典概型中事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}.$$

4）条件概率与乘法公式

设 A,B 为两个事件，且 $P(B)>0$，则

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

此时

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)(P(B)>0).$$

5）事件独立性的结论

(1) 事件 A 与 B 独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

(2) 若事件 A 与 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i}).$$

6）伯努利试验的概率公式

在 n 重伯努利试验中，设每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 次试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n.$$

7）全概率公式与贝叶斯公式

若事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 构成了试验 E 的样本空间 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则对 E 的任一事件 A 都有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

若有 $P(A)>0$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)},i=1,2,\cdots,n.$$

习题 1

(1) 填空题.

① 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________.

② 设 A,B 是相互独立的随机事件，A,B 都不发生的概率为 $\frac{1}{16}$，A 发生 B 不发生的概率等于 A 不发生而 B 发生的概率，则 $P(A)=$________.

③ 一个小组有 8 名学生,每个学生在一周 7 天的任何一天出生是等可能的,则 8 个人的生日都不在星期一的概率为________.

④ 设工厂甲和工厂乙的产品的次品率分别为 1% 和 2%,现从由甲和乙的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该次品属甲生产的概率是________.

⑤ 从数 1,2,3,4 中任取一数,记为 X,再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 Y 是 2 的概率为________.

(2) 选择题.

① 设随机事件 A,B 同时发生时,事件 C 一定发生,则(　　).

A. $P(C)=P(AB)$　　B. $P(C)=P(A\cup B)$

C. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　D. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

② 随机事件 A,B 满足 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$,$P(A\cup B)=1$,则下列结论正确的是(　　).

A. $A\cup B=S$　　B. $AB=\varnothing$

C. $P(A-B)=P(A)$　　D. $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0$

③ 袋中有 5 只球,其中 3 只红球,2 只黑球,先后从袋中取 3 次球,每次任取 1 只不放回,则第二次取到红球的概率为(　　).

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$

C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

④ 设随机事件 A,B 互不相容,且 $P(A)>0$,$P(B)>0$,则下列结论正确的是(　　).

A. $\overline{A}$ 与$\overline{B}$ 互不相容　　B. $\overline{A}$ 与$\overline{B}$ 不是互不相容的

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(A-B)=P(A)$

⑤ 某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为(　　).

A. $3p(1-p)^2$　　B. $6p(1-p)^2$

C. $3p^2(1-p)^2$　　D. $6p^2(1-p)^2$

(3) 袋中有 10 个球,分别标有号码 $1\sim10$,从中任取一球,设 $A=\{$取到的球的号码是偶数$\}$,$B=\{$取到的球的号码是奇数$\}$,$C=\{$取到的球的号码小于 5$\}$,试问下列运算分别表示什么事件:

① $A\cup B$;② $\overline{B\cup C}$;③ AB;④ AC;⑤ $\overline{A}\,\overline{C}$.

(4) 若要击落飞机必须同时击毁两个发动机或击毁驾驶舱,记 $A_1=\{$击毁第一个发动机$\}$,$A_2=\{$击毁第二个发动机$\}$,$B=\{$击毁驾驶舱$\}$,试用 A_1,A_2,B 表示事件“飞机被击落”.

(5) 若 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.4$,$P(A-B)=0.3$,求 $P(A\cup B)$ 和 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

(6) 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

(7) 将 3 个球随机放入 4 个杯子中，问杯子中球的个数最多为 1，2，3 的概率各是多少？

(8) 某个家庭有两个小孩，求至少有一个女孩的概率(设男女出生率相同).

(9) 一盒子中有 9 张卡片分别编号 1，2，…，9，采用取后放回的方式，连续取 3 张卡片，求前两次取到卡片编号为偶数最后取到卡片编号为奇数的概率.

(10) 掷两颗均匀的骰子，求出现点数之和为 8 的概率.

(11) 口袋中有 4 个白球，6 个红球. 从中任取 2 个，求取到 1 个白球 1 个红球的概率.

(12) 一赌徒认为掷一颗骰子 4 次至少出现一次 6 点与掷两颗骰子 24 次至少出现一次双 6 点的机会是相等的，你认为如何？

(13) 将 15 名新生(其中有 3 名优秀生) 随机地分配到三个班级中，其中一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名，求：

① 每一个班级各分配到 1 名优秀生的概率；

② 3 名优秀生被分配到一个班级的概率.

(14) 一个袋子中装有 $a+b$ 只球，其中 a 只黑球，b 只白球，随意的每次从中取出一只球(不放回)，求下列各事件的概率：

① 第 i 次取到的是黑球；

② 第 i 次才取到黑球.

(15) 有 n 个球，每个球都等可能地被放到 N 个不同盒子中的任一个，每个盒子所放球数不限，试求：

① 指定的 $n(n\leqslant N)$ 个盒子中各有一球的概率 $P(A)$；

② 恰好有 $n(n\leqslant N)$ 个盒子中各有一球的概率 $P(B)$.

(16) 从 1，2，…，9 中任取 1 个数，取后放回，先后取出 5 个数，求下列事件的概率：

① “最后取出的数字是奇数”；

② “5 个数字全不同”；

③ “1 恰好出现 2 次”；

④ “1 至少出现 2 次”；

⑤ “恰好出现不同的 2 对数字”；

⑥ “总和为 10”.

(17) 在一个有 n 个人参加的晚会上，每个人带了一件礼物，且假定每个人带的礼物都不相同. 晚会期间各人从放在一起的 n 个礼物中随机地抽取一件，求至少有一个人自己抽到自己的礼物的概率.

(18) 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求这 4 只鞋子中至少有 2 只能配成 1 双的概率.

(19) 500 km^2 的海域里有面积达 40 km^2 的大陆架藏着石油. 在此海域里任选一点钻探，求钻到石油的概率.

(20) 一个家庭有两个小孩，问该家在有一个女孩的条件下，另一个也是女孩的概率是多少？

(21) 设某光学仪器厂制造的透镜,第一次落下时被打破的概率为$\frac{1}{2}$;若第一次落下未被打破,第二次落下时被打破的概率为$\frac{7}{10}$;若前两次落下都未被打破,第三次落下时被打破的概率为$\frac{9}{10}$. 试求透镜落下三次而未被打破的概率.

(22) 播种用的一等小麦种子中混有 5% 的二等种子和 10% 的三等种子,这三个等级的种子长出的穗含有50颗以上麦粒的概率分别为0.90,0.80和0.65. 求这批种子任选一粒,长出的穗含有 50 颗以上麦粒的概率.

(23) 甲袋中有 6 个红球和 4 个白球,乙袋中有 12 个红球和 8 个白球,现从两袋子中任选一个袋子,然后采用不放回的方式连续取 2 个球,求第一次取到白球的概率.

(24) 某彩票每周开奖一次,每次提供十万分之一的中奖机会,且各周开奖是相互独立的. 某彩民每周买一次彩票,坚持十年(每年 52 周),那么他从未中奖的可能性是多少?

(25) A系与B系举行篮球、排球、足球比赛,篮球赛A胜B的概率为0.8,排球赛A胜B的概率为0.4,足球赛A胜B的概率为0.4,若在三项比赛中至少胜两项才算获胜,试计算哪个系获胜的概率较大.

(26) 对以往数据分析结果表明,当机器调整得良好时,产品的合格率为 98%,而当机器发生某种故障时,其合格率为 55%. 每天早上机器开动时,机器调整良好的概率为 95%. 试求已知某日早上第一件产品是合格时,机器调整得良好的概率.

(27) 有两箱零件,第一箱装 50 件,其中 10 件一等品;第二箱装 30 件其中 18 件一等品,现从两箱中随意挑出一箱,然后从该箱中任取 2 个零件,试求:

① 第一次取出的零件是一等品的概率;

② 在第一次取出的是一等品的条件下,第二次取出的仍是一等品的概率.

(28) 假设每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%,100 人的血清混合在一起,求此中含有肝炎病毒的概率.

(29) 一猎人用猎枪射击一只兔子,第一枪距离兔子 200 m远,如果未击中,他追到离兔子150 m远处进行第二次射击,如果仍未击中,他追到离兔子100 m远处再进行第三次射击,此时击中的概率为$\frac{1}{2}$,如果这个猎人射击的命中率与他离兔子的距离的平方成反比,求猎人击中兔子的概率.

(30) 根据临床记录,某种诊断癌症的试验有如下的效果:若记 $A=\{$试验反应为阳性$\}$,$C=\{$被诊断者患有癌症$\}$,则有 $P(A\mid C)=0.95$,$P(\overline{A}\mid\overline{C})=0.95$. 现在对自然人群进行普查,设被试验的人患有癌症的概率为 0.005,即 $P(C)=0.005$,试求 $P(C\mid A)$.

(31) 一个人的血型为 A,B,AB,O 型的概率分别为 0.37,0.21,0.08,0.34. 现任意挑选四个人,试求:

① 此四人的血型全不相同的概率;

② 此四人的血型全部相同的概率.

(32) 甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛,已知在每局中甲胜的概率为 0.6,乙胜的概率为 0.4,比赛可采用三局二胜制或五局三胜制,问哪一种比赛制度对甲更有利?