第 1 章

函　　数

阅读与欣赏

函数的发展

最早提出函数概念的是17世纪德国数学家莱布尼茨.最初,莱布尼茨用“函数”一词表示幂.后来,他又用“函数”表示直角坐标系中曲线上一点的横坐标或纵坐标.1718年,莱布尼茨的学生约翰·伯努利在莱布尼茨函数概念的基础上对函数进行了明确定义:“由某个变量及任意的一个常数结合而成的数量.”其含义是:凡由变量 x 和常量构成的式子,都叫作 x 的函数.他强调函数应以公式表示.

随着康托尔创立的集合论被广泛接受,人们开始用集合之间的对应关系来定义函数的概念.

我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》(1859年)一书时,将“function”译为“函数”.中国古代“函”字与“含”字通用,均有“包含”之意.李善兰给出的定义是:“凡式中含天,为天之函数.”中国古代常以“天、地、人、物”表示四个不同的未知数或变量.这个定义的含义是:凡是公式中含有变量 x,则该式子称为 x 的函数.因此,“函数”是指在公式中含有变量.

1.1　函数及其性质

在现实世界中,许多量之间存在依赖关系,当一个量发生变化时,另一个量也随之变化.函数正是描述各个量之间确定性依赖关系的数学模型.

1.1.1 区间与邻域

1. 区间

区间是一类常见的数集. 设 a,b 为两个实数,且 $a<b$.

(1) 有限区间.

①$\{x \mid a<x<b\}$称为**开区间**,记作(a,b).

②$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$称为**闭区间**,记作$[a,b]$.

③$\{x \mid a \leqslant x<b\}$或$\{x \mid a<x \leqslant b\}$称为**半开半闭区间**,分别记作$[a,b)$或$(a,b]$.

上述区间统称为**有限区间**,其中 a,b 分别称为区间的**左端点**和**右端点**,$b-a$ 称为**区间的长度**.

(2) 无限区间. 以下类型的区间称为**无限区间**.

①$\{x \mid x \geqslant a\}$,记作$[a,+\infty)$;$\{x \mid x>a\}$,记作$(a,+\infty)$.

②$\{x \mid x \leqslant b\}$,记作$(-\infty,b]$;$\{x \mid x<b\}$,记作$(-\infty,b)$.

③ 实数集 $\mathbf{R}$ 可记作$(-\infty,+\infty)$.

有限区间和无限区间统称为区间.

2. 邻域

给定实数 x_0,以点 x_0 为中心的任何开区间称为 x_0 的**邻域**,记作 $U(x_0)$.

设 $\delta>0$,则开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

其中,点 x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.

有时需要将邻域的中心点去掉,此时得到的邻域称为 x_0 **的去心邻域**,记作$\mathring{U}(x_0)$,将 x_0 的 δ 邻域去掉中心点 x_0 后,称为去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

为了方便,有时将开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为 x_0 的左邻域,将开区间$(x_0,x_0+\delta)$称为 x_0 的右邻域.

1.1.2 函数的概念

在某些自然现象或社会现象中,往往存在多个不断变化的量,即变量. 这些变量并不是孤立变化的,而是相互联系并遵循一定规律的. 函数就是用来描述这种联系的数学工具. 下面先讨论两个变量之间的情形.

例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,并假定开始下落的时刻为 $t=0$,则变量 s 与 t 之间的依赖关系可由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给出,其中 g 是重力加速度.

又例如,我国自主研发的能力日趋成熟,其中高铁技术已处于世界领先水平. 目前国内高铁的平均时速为350 km/h,但这只是一个相对安全的运行速度,而非中国高铁的上限速度. 京沪线的最高时速可达486.1 km/h. 假设高铁以350 km/h匀速行驶,则运行里程与时间之间的关系为

$$s=350t$$

其中,s 为运行里程,t 为运行时间.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集. 若对于每个 $x \in D$,变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作

$$y=f(x), x \in D$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为该函数的**定义域**.

对每个 $x \in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在点 x 处的**函数值**，记作 $f(x)$. 因变量与自变量之间的这种依赖关系，通常称为**函数关系**.

当自变量 x 遍取定义域 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 M，即

$$M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定一个函数所必不可少的两个要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，则这两个函数就是相同的函数. 例如，函数 $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $g(x) = 1$ 是相同的函数，而 $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2\ln x$ 则不是相同的函数.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义来确定；若讨论的是纯数学问题，则通常取使函数表达式有意义的一切实数（分母不能为零，偶次方根的被开方数不能为负，对数函数的真数必须为正，等等）所构成的集合作为该函数的定义域.

例如，函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为开区间 $(-1,1)$.

再如，若用长为 24 m 的铁丝围成一个面积为 S 的长方形，则面积 S 与长 x 之间的函数关系为 $S = (12-x)x$，此函数的定义域为 $x \in (0,12)$.

对函数 $y = f(x)(x \in D)$，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在平面直角坐标系 xOy 中便确定了一个点 (x,y). 当 x 遍取定义域 D 中的每一个数值时，平面上的点集

$$C = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**图像**（见图 1-1）.

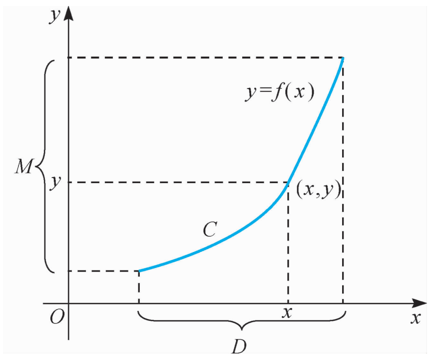

图 1-1

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是唯一的，则该函数称为**单值函数**；否则称为**多值函数**.

例如，方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上可确定一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数. 对每一个 $x \in (-a,a)$，都有两个 y 值 $(\pm\sqrt{a^2-x^2})$ 与之对应，因此 y 是多值函数.

注意　*若无特别声明，本书所指函数均为单值函数.*

函数的常用表示方法有以下三种.

(1) **列表法**：将自变量的值与其对应的函数值列成表格，用以表示函数关系的方法.

(2) **图像法**：在坐标系中用图像表示函数关系的方法.

(3) **公式法（解析法）**：用数学表达式（解析表达式）表示自变量与因变量之间关系的方法.

例 1-1 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$,其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $M=[0,+\infty)$,其图像如图 1-2 所示.

例 1-2 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$,其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $M=\{-1,0,1\}$. 对任一实数 x,总有 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$,其图像如图 1-3 所示.

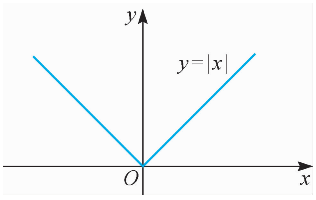

图 1-2

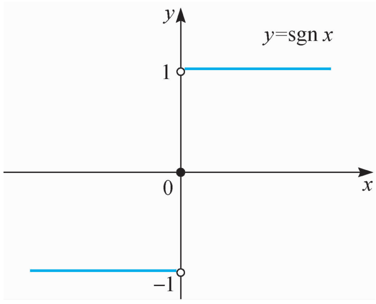

图 1-3

有些函数在自变量的不同取值范围内有不同的对应法则,这种函数称为**分段函数**,如例 1-1 和例 1-2 中的两个函数.

例 1-3 取整函数 $y=[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数. 例如,

$$[2.3]=2,[5]=5,[\pi]=3,[-6.7]=-7$$

取整函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $M=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$,其图像如图 1-4 所示.

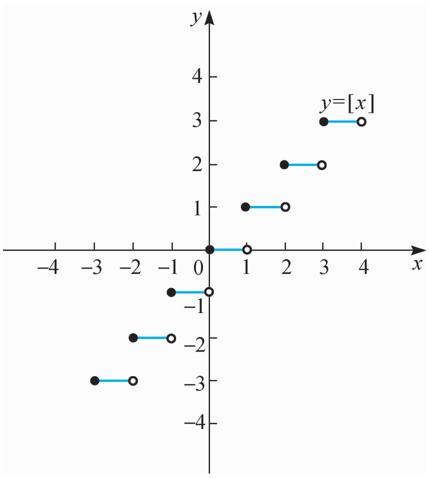

图 1-4

例 1-4 我国改革开放初期,许多地区面临严重的电力短缺问题. 经过多年努力,这一状况得到了根本改善. 为了倡导居民节约用电,我国实施了阶梯电价政策,该政策不仅有助于节能环保,还能有效遏制电力资源的浪费,使居民用电更加稳定,停电现象大幅减少. 以某城市的居民用电阶梯电价规则为例,该城市按年度用电量(单位:kW・h)实行分档计价:当年用电量不超过 2 160 kW・h 时,按每千瓦时 0.56 元计算;用电量在 2 160 ~ 3 120 kW・h 的部分,电价在基础电价上加收 0.05 元,即每千瓦时 0.61 元;超出 3 120 kW・h 的部分,电价在基础电价上加收 0.30 元,即每千瓦时 0.86 元. 请根据上述规则,列出该阶梯电价的函数关系式. 若该城市陈先生某年年用电量为 2 850 kW・h,请计算出陈先生应缴纳的用电费用.

解　设该城市某居民用电量为 x 千瓦时，应缴纳电费为 y 元. 则

当 $x \leqslant 2\ 160$ 时，$y = 0.56x$；

当 $2\ 160 < x \leqslant 3\ 120$ 时，$y = 0.56 \times 2\ 160 + 0.61 \times (x - 2\ 160) = 0.61x - 108$；

当 $x > 3\ 120$ 时，

$$y = 0.56 \times 2\ 160 + 0.61 \times (3\ 120 - 2\ 160) + 0.86 \times (x - 3\ 120) = 0.86x - 888$$

即函数关系式为

$$y = \begin{cases} 0.56x, & 0 \leqslant x \leqslant 2\ 160 \\ 0.61x - 108, & 2160 < x \leqslant 3\ 120 \\ 0.86x - 888, & x > 3\ 120 \end{cases}$$

该城市陈先生应缴纳的用电费用为

$$y = 0.61 \times 2\ 850 - 108 = 1\ 630.5(\text{元})$$

阶梯电价的实施提高了能源效率，减少了能源浪费，是实现经济健康可持续发展的重要途径之一. 从更深层次的意义上来说，我国阶梯电价的实施增强了国家的能源安全和社会稳定能力，使得我国电价水平长期以来在世界上的主要国家中处于低位，它对我国增进民生福祉、提高人民生活品质起到了一定的促进作用.

1.1.3　函数的性质

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，区间 I 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域，或其定义域的某一部分，则函数通常具有以下几种性质.

1. 有界性

如果存在正数 M，使得对任意 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上**有界**；否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

从图像上看，有界函数的图像位于两条直线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间(见图 1-5). 例如，函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，因为对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$，恒有 $|\sin x| \leqslant 1$；而函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，但在区间 $(1,2)$ 内有界.

2. 单调性

若对任意 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(或**单调减少**). 区间 I 称为**单调增区间**(或**单调减区间**)；单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**；单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

一般地，单调增加函数的图像在 x 轴正方向上呈单调上升(见图 1-6)；单调减少函数的图像在 x 轴正方向上呈单调下降(见图 1-7).

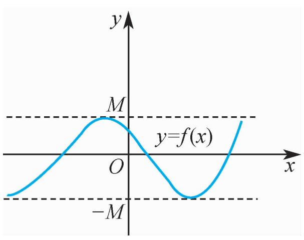

图 1-5

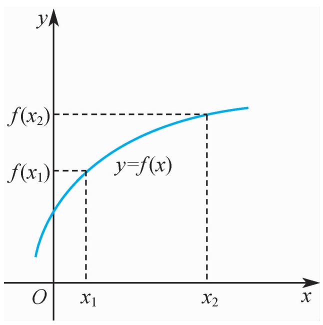

图 1-6

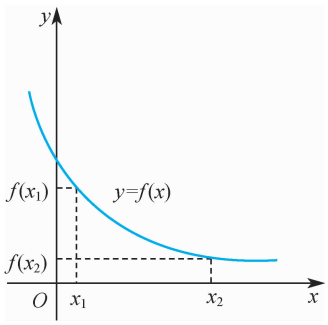

图 1-7

例如,函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加函数;函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少,在 $[0,+\infty)$ 上单调增加,但在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义区间 I 关于原点对称.若对任意 $x\in I$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**偶函数**;若对任意 $x\in I$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**奇函数**;若函数既不是奇函数,也不是偶函数,则称为**非奇非偶函数**.

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称(见图 1-8),奇函数的图像关于原点对称(见图 1-9).

例如,$y=x^3+\sin x$ 为奇函数,$y=\cos x$ 为偶函数,$y=x^2+x$ 为非奇非偶函数.

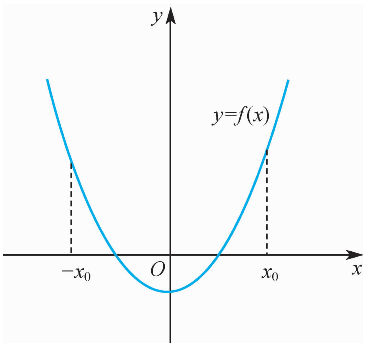

图 1-8

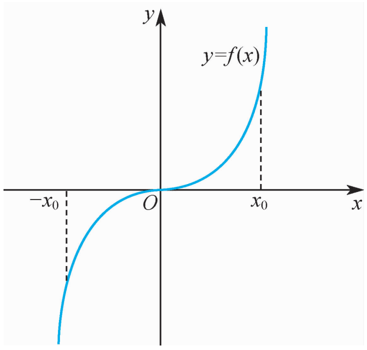

图 1-9

4. 周期性

如果存在一个不为零的正实数 T,使得对于任意 $x\in I$,且 $x+T\in I$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**,T 是函数 $y=f(x)$ 的一个周期.通常所说的周期,是指函数的**最小正周期**.

例如,$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数,$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

1.1.4 反函数

在函数中,自变量与因变量的地位是相对的,任一变量均可根据需要作为自变量.例如,在函数 $y=x+5$ 中,x 是自变量,y 是因变量.根据这个式子,可以解得 $x=y-5$,此时,y 为自变量,x 为因变量.上述两个式子反映了同一过程中的两个变量之间地位的相对性,称它们**互为反函数**.

下面给出反函数的具体定义.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,值域为 M.如果对于任意 $y\in M$,由函数关系式 $y=f(x)$ 恰好**唯一确定**一个 $x\in D$ 与之对应,那么认为 x 是 y 的函数,记作 $x=g(y)$.我们称 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ **互为反函数**,习惯上将 $x=g(y)$ 记作

$$x=f^{-1}(y)$$

由于通常以 x 表示自变量,y 表示因变量,因此函数 $y=f(x)$ 的反函数常写作

$$y=f^{-1}(x)$$

由反函数的定义可知,在定义区间上**单调**的函数必有反函数.

例 1-5 函数 $y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的反函数为 $x=f^{-1}(y)=\arcsin y,y\in[-1,1]$.因此,函数 $y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的反函数是 $y=\arcsin x,x\in[-1,1]$.

如果将函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一平面直角坐标系中,那么这两个图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1-6 函数 $y=x^3$ 和函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图像如图 1-10 所示.

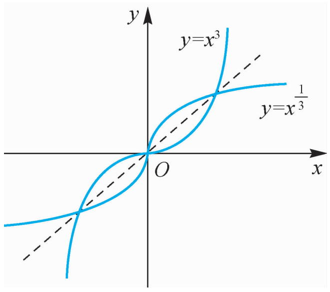

图 1-10

一般地,要求 $y=f(x)$ 的反函数,只需先从方程 $y=f(x)$ 中解出 x 的表达式;当该表达式也是一个函数时,再将其中的字母 x,y 进行交换即可.

*** 例 1-7** 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),x\in[1,+\infty)$ 的反函数.

解 由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,得

$$e^y=x+\sqrt{x^2-1},e^{-y}=x-\sqrt{x^2-1}$$

两式相加,得

$$e^y+e^{-y}=2x$$

从而

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

因此,所求反函数为 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2},x\geqslant 0$.

判断函数的反函数是否存在,可以使用以下定理.

定理 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,值域为 M. 若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的,则其**反函数** $f^{-1}(x)$ 在 M 上**存在**,且 $f^{-1}(x)$ 在 M 上也分别是**单调增加**或**单调减少**的.

值得注意的是,由于对某些 y 的取值,满足 $y=f(x)$ 的 x 不止一个,因此并非任何函数在其整个定义域上都存在反函数. 但是,当对 x 的取值范围加以适当限制时,函数可能存在反函数. 例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不具有反函数,但在 $(-\infty,0)$ 与 $[0,+\infty)$ 上分别存在反函数 $y=-\sqrt{x},x>0$ 和 $y=\sqrt{x},x\geqslant 0$.

对于分段函数的反函数,只需分别求出各子定义域上对应函数表达式的反函数及其相应的自变量取值范围.

例 1-8 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}, & -2<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$,求其反函数 $f^{-1}(x)$.

解 设 $y=f(x)$,由反函数的定义得

$$x=\begin{cases}3y, & -2<3y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant\sqrt{y}\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}3y, & -\frac{2}{3}<y<\frac{1}{3}\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$$

将 x,y 互换,得所求反函数为

$$f^{-1}(x)=y=\begin{cases}3x, & -\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

习题 1.1

1. 判断下列结论是否正确(请在括号中打"√"或"×").

(1) 若两个函数的定义域与值域相同,则这两个函数是相同的函数. ( )

(2) 分段函数是由两个或两个以上的函数组成的. ( )

(3) 偶函数的图像不一定过原点,奇函数的图像一定过原点. ( )

(4) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时,函数 $y = |f(x)|$ 与 $y = f(|x|)$ 的图像相同. ( )

2. 填空题.

(1) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = f(x)$,则 $f(6) =$ ________.

(2) 函数 $f(x) = x^2 - 5x + 4$ 在________单调减少,在________单调增加.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geqslant 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$,则 $f[f(-2)] =$ ________.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{2x-3} + \dfrac{1}{x-3}$;

(2) $f(x) = \sqrt{1-2^x} + \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

4. 作出下列函数的图像.

(1) $y = |x-2| \cdot (x+1)$;

(2) $y = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 3 \\ x^2-5, & x < 3 \end{cases}$.

5. 珍惜不可再生资源、节约能源和保护环境是我们每个人应当遵循的生活理念. 当前,许多城市实行了阶梯式水费计价政策. 例如,某城市规定四口及四口以下居民家庭每月每户的基准用水量为 26 t,基准水价为每吨 1.98 元,超出部分的用水按以下标准分段计费:超出部分的前 1 ~ 8 t 按基准水价的 1.5 倍计费,超出 8 t 的部分按基准水价的 2 倍计费. 请你列出该政策下的函数关系式,读取你家当月水表数据,根据上述标准计算本月应缴水费,并思考可以从哪些方面减少用水量.

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

中学所学的常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

(1) 常量函数. $y = C$(C 为常数),其定义域为 $(-\infty, +\infty)$,其图像为一条过点 $(0, C)$ 且平行于 x 轴的直线.

(2) 幂函数. $y = x^a$(a 为实数),该函数的定义域因 a 的取值不同而有所不同,但无论 a 取何值,其在区间 $(0, +\infty)$ 内总有定义,且图像必过点 $(1,1)$. 当 $a > 0$ 和 $a < 0$ 时,函数图像分别如图 1-11 和图 1-12 所示.

(3) 指数函数. $y = a^x$($a > 0$ 且 $a \neq 1$,a 为常数),该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $(0, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时,函数单调增加;当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减少;其图像必过点 $(0,1)$,如图 1-13 所示. 在科学计数法中,常用以 e 为底的指数函数 $y = e^x$(e 为无理数,$e = 2.718\ 28\cdots$).

(4) 对数函数. $y = \log_a x$($a > 0$ 且 $a \neq 1$,a 为常数),该函数的定义域为 $(0, +\infty)$,值域为 $(-\infty, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时,函数单调增加;当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减少;其图像必过点 $(1,0)$,如图 1-14 所示. 在科学计数法中,常用以 e 为底的对数函数称为自然对数,记作 $y = \ln x$.

(5) 三角函数. $y = \sin x$,$y = \cos x$,$y = \tan x$,$y = \cot x$,$y = \sec x$,$y = \csc x$ 统称为**三角函数**.

① 正弦函数. $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$. 在 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，在 $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上单调减少，是以 2π 为周期的周期函数，其中 $k\in\mathbf{Z}$. 其图像如图 1-15 所示.

② 余弦函数. $y=\cos x$ 的定义域、值域和周期与正弦函数相同. 在 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ 上单调增加，在 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 上单调减少，其中 $k\in\mathbf{Z}$. 其图像如图 1-16 所示.

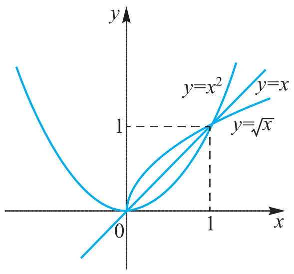

图 1-11

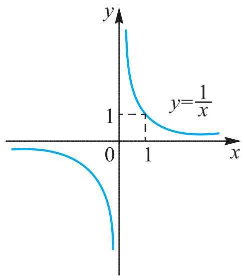

图 1-12

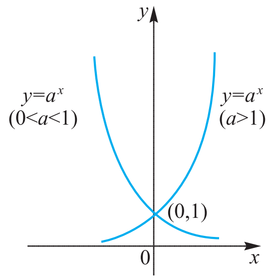

图 1-13

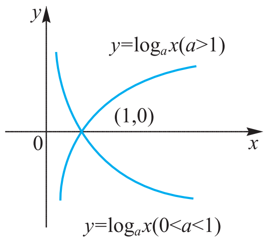

图 1-14

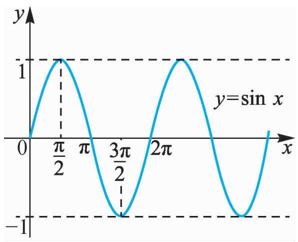

图 1-15

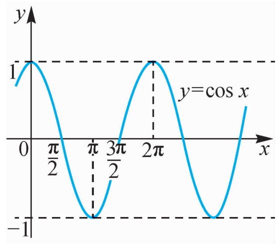

图 1-16

③ 正切函数. $y=\tan x$ 的定义域为 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是以 π 为周期的周期函数，在每个有定义的区间内单调增加. 其图像如图 1-17 所示.

④ 余切函数. $y=\cot x$ 的定义域为 $(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是以 π 为周期的周期函数，在每个有定义的区间内单调减少. 其图像如图 1-18 所示.

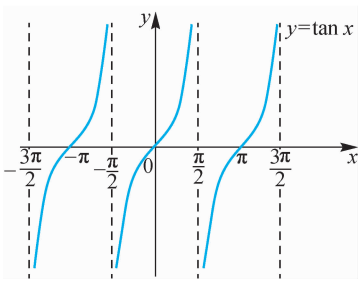

图 1-17

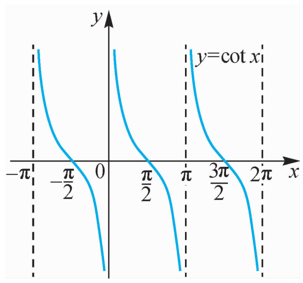

图 1-18

⑤ 正割函数与余割函数. $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6) 反三角函数. $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**反三角函数**.

① 反正弦函数. 正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为**反正弦函数**，记作 $y=\arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，显然，$\sin(\arcsin x)=x$，其图像如图 1-19 所示.

② 反余弦函数. 余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数称为**反余弦函数**，记作 $y=\arccos x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，显然，$\cos(\arccos x)=x$，其图像如图 1-20 所示.

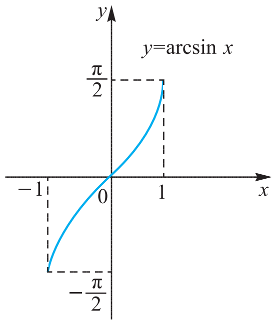

图 1-19

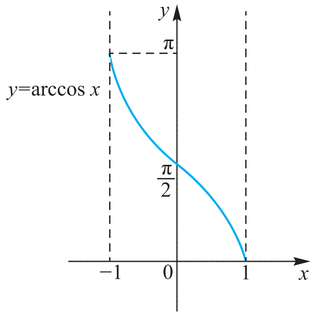

图 1-20

③ 反正切函数. 正切函数 $y = \tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为**反正切函数**,记作 $y = \arctan x$,其定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,显然,$\tan(\arctan x) = x$,其图像如图 1-21 所示.

④ 反余切函数. 余切函数 $y = \cot x$ 在 $(0, \pi)$ 上的反函数称为**反余切函数**,记作 $y = \operatorname{arccot} x$,其定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $(0, \pi)$,显然,$\cot(\operatorname{arccot} x) = x$,其图像如图 1-22 所示.

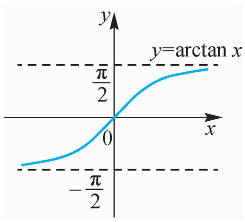

图 1-21

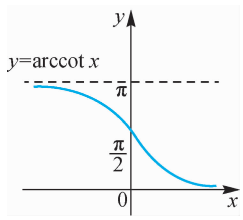

图 1-22

思考　你会用"五点法"[①]作正弦型函数与余弦型函数的图像吗?

1.2.2　复合函数和初等函数的概念

1. 复合函数的概念

定义 1.3　设 $y = f(u)$,其中 $u = \varphi(x)$,且函数 $u = \varphi(x)$ 的值域包含或部分包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内,则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,其中 u 称为中间变量.

关于复合函数,有如下几点说明.

(1) 复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形.

(2) 将一个较复杂的函数分解为若干个简单函数时,一定要分清层次,应从外到内逐层分解.

(3) 并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如,$y = \arcsin u$ 与 $u = x^2 + 5$ 就不能构成复合函数. 因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,$u = x^2 + 5 \geqslant 5$,此时 $y = \arcsin u$ 无定义.

例 1-9　指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

(1) $y = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$;　　(2) $y = 3^{\tan^2 x}$.

解　(1) $y = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$ 可以看作由 $y = u^{\frac{2}{3}}$, $u = 1 + 2x$ 复合而成.

(2) $y = 3^{\tan^2 x}$ 可以看作由 $y = 3^u$, $u = v^2$, $v = \tan x$ 复合而成.

注意　能否正确分析复合函数的构成,直接关系到是否能够熟练掌握微积分的基本方法与技巧.

2. 初等函数的概念

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所构成,并且可以用一个解析式表示的函数,称为初

---

① "五点法"就是在一个周期内(如[0,2π][0,2π])选取五个等间距的关键点,分别计算函数值并绘制这些点,再根据函数图像的光滑性将它们连成曲线.

等函数. 例如, $f(x)=x\sin x$, $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $f(x)=e^{5x+1}\sin x$ 等函数都是初等函数. 但分段函数一般不是初等函数. 例如, 函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 不能用一个解析式表示, 故不是初等函数.

想一想

庆祝中华人民共和国成立 70 周年阅兵式展示了我国强大的军事力量, 作为中国人, 我们感到无比自豪. 在鸣炮升旗环节中, 礼炮鸣响 70 声. 如何利用函数模型来描述炮弹发射时高度与时间之间的关系.

习题 1.2

1. 指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=\sin(x^2+1)$;

(2) $y=\ln[\sin(x+5)]$;

(3) $y=e^{\cos 2x}$;

(4) $y=\arctan(\ln x)$.

2. 设 $f(x)=3^x$, $g(x)=\sqrt{x}$, 求:

(1) $f[g(x)]$;　　(2) $g[f(x)]$.

3. 选择题.

(1) $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的值为(　　).

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

(2) $y=\arcsin 2x$ 的反函数为(　　).

A. $y=2\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

B. $y=\dfrac{\sin x}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $y=\sin 2x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

D. $y=\sin\dfrac{x}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

博古通今

李善兰, 原名李心兰, 字竟芳, 号秋纫, 别号壬叔, 浙江海宁人, 是近代著名的数学家、天文学家. 李善兰在数学研究方面的成就主要体现在尖锥术、垛积术和素数论三方面.

尖锥术理论主要见于《方圆阐幽》《弧矢启秘》《对数探源》三部著作. 当时解析几何与微积分学尚未传入中国, 李善兰创立的"尖锥"概念是一种处理代数问题的几何模型. 他对"尖锥曲线"的描述, 在实质上已相当于给出了直线、抛物线、立方抛物线等的方程形式.

垛积术理论主要见于《垛积比类》, 该书是关于高阶等差级数的专著. 李善兰从研究中国传统"垛积"问题出发, 取得了一些相当于现代组合数学中的成果, 其中著名的"李善兰恒等式"即出自此书.

素数论方面的成果主要见于《考数根法》, 该书是中国关于素数论理论最早的专著之一. 在研究自然数是否为素数的问题时, 李善兰证明了著名的费马素数定理, 并指出其逆定理不成立.

在传播西方近代物理学知识方面, 李善兰亦作出了重要贡献. 他所翻译的书籍对中国近代物理学的发展起到了启蒙作用. 同治七年, 李善兰受聘到北京担任同文馆天文、算学部长, 执教长达十三年, 为中国第一代科学人才的培养作出了重要贡献, 对近代科学在中国的传播与发展具有开创性意义.

李善兰一生翻译了大量西方科技书籍, 将近代科学最主要的学科知识, 从天文学到植物细胞学的最新成果介绍传入中国, 对推动中国近代科学的发展作出了卓越贡献.

1.3 应用示例——椅子能否在不平的地面上放稳

1.3.1 问题提出

当将一把椅子放置在不平的地面上时，通常只能有三只椅脚同时着地. 然而，只需稍微转动椅子一个角度，就有可能使四只椅脚同时接触地面，从而使椅子达到稳定状态. 如何用数学模型来描述并证明这一实际问题，是本节的研究内容.

1.3.2 模型假设

为了能够使用数学语言对问题进行准确描述，需要对椅子和地面做如下合理假设.

假设 1 关于椅子的假设.

椅子的四条腿长度相等，椅脚与地面的接触点可视为一个几何点，四只椅脚的连线构成一个正方形.

假设 2 关于地面的假设.

地面的高度随位置连续变化，可视为数学上的一个连续曲面.

假设 3 关于椅子与地面关系的假设.

地面相对平坦，使得椅子在任意放置状态下，始终可以有三只椅脚同时着地.

1.3.3 模型建立

1. 引入函数

如图 1-23 所示，以正方形 $ABCD$ 的中心 O 为原点建立平面直角坐标系，用角度 θ 表示椅子的旋转角度，从而确定椅子的位置. 椅脚着地，即椅脚与地面的距离为零，这体现了椅子与地面之间的数量关系. 因此，可以用 θ 的函数来表示椅脚与地面的距离. 由于图形具有对称性，无需分别对四条椅脚定义函数，仅需定义两个函数：设 $f(\theta)$ 表示椅脚 A 与 C 到地面的距离之和，$g(\theta)$ 表示椅脚 B 与 D 到地面的距离之和.

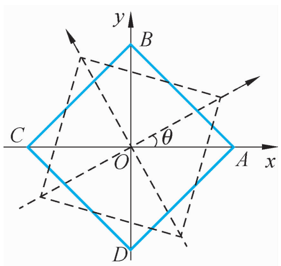

图 1-23　建立模型

2. 函数的性质

(1) 由假设 2 可知，函数 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上为非负连续函数.

(2) 由假设 3 可知，对于任意 $\theta\in[0,2\pi]$，都有 $f(\theta)g(\theta)=0$. 不妨设某一时刻 $f(\theta)>0$，则 $g(\theta)=0$.

(3) 当椅子旋转 $\frac{\pi}{2}$ 时，对角线 AC 与 BD 互换位置，由假设 1 可得

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0),g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)$$

3. 将问题转化为数学命题

椅子的四只椅脚同时着地，等价于存在某个角度 $\theta_0\in[0,2\pi]$，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$. 因此，原问题等价于以下数学命题.

命题　已知函数 $f(\theta),g(\theta)$ 是定义在$[0,2\pi]$上的非负连续函数，且满足：

(1) 存在某段区间使 $f(\theta)>0,g(\theta)=0$；

(2) 对任意 $\theta\in[0,2\pi]$，有 $f(\theta)g(\theta)=0$；

(3) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=g(0),g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f(0)$.

则必存在 $\theta_0\in[0,2\pi]$，使

$$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$$

1.3.4　模型求证

(1) 证明：由题设知 $f(\theta)>0,g(\theta)=0$，则

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)=0,g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)>0$$

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(\theta)$ 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上为连续函数，且

$$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)>0,h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$$

由连续函数中值定理[①]可知，存在一点 $\theta_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $h(\theta_0)=0$，即 $h(\theta_0)=g(\theta_0)$.

又因为对任意 θ 有 $f(\theta_0)g(\theta_0)=0$，故 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

(2) 模型解的意义：在满足三点假设的前提下，证明了通过转动椅子，可使其四条椅脚同时着地，即椅子能放稳. 而且转动的角度(无论顺时针或逆时针方向)不超过 90°.

1.4　数学实验一：利用 MATLAB 作基本运算与绘制函数图像

1.4.1　实验任务

(1) 熟悉数学软件 MATLAB 的界面、基本功能和基本操作.

(2) 掌握在 MATLAB 中进行基本数值运算与表达式计算的方法.

(3) 掌握使用 MATLAB 绘制函数图像的基本命令和方法.

1.4.2　实验过程

1. 数学软件 MATLAB 简介

MATLAB 是由美国 MathWorks 公司开发的一款商业数学软件，具有功能强大、操作简便的特点，主要用于算法开发、数据可视化、数据分析及数值计算，能够将人们从烦琐的手工计算中解放出来. 下面以 MATLAB R2013b 版本为例，介绍 MATLAB 的基本操作.

(1) 软件的启动与运行. 在完成 MATLAB 软件的安装与激活后，系统会在“开始”菜单中创建快捷方式. 可执行“开始”→“所有程序”→MATLAB→R2013b→MATLAB R2013b 命令，启动 MATLAB 软件，进入其主界面，如图 1-24 所示.

① 中值定理相关内容详见本书第 4 章.

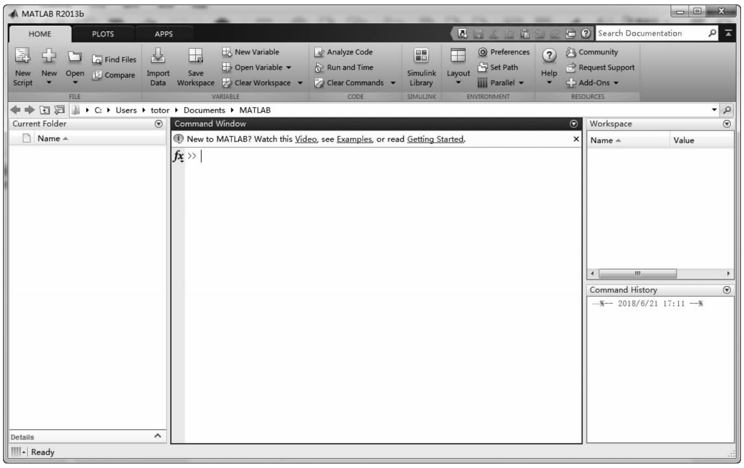

图 1-24

MATLAB 主界面主要由以下几个部分组成：标题栏、选项区、功能区、工具栏、导航窗格(Current Folder)、命令窗口(Command Window)、工作空间(Workspace)、命令历史(Command History)、状态栏等.

① 标题栏. 标题栏位于窗口最上方，主要显示软件名称，并包含“最小化”按钮、“最大化/还原”按钮和“关闭”按钮等.

② 选项区. 选项区包括三个选项卡，分别为“主页”(HOME)、“绘图”(PLOTS) 和“应用”(APPS)，每个选项卡下设若干功能区，是 MATLAB 多项功能的集成入口.

③ 功能区. 功能区分布在各选项卡下，包含众多命令按钮，用于执行不同的操作任务.

④ 工具栏. MATLAB 的工具栏位于两个位置，与选项区同行显示的是快速工具栏，包括常用按钮，如“保存”“剪切”“复制”“撤销”等；位于功能区下方的是常规工具栏，包括“后退”(Back)、“前进”(Forward)、“上一级”(Up One Level)、“浏览文件夹”(Browse for folder)按钮，以及地址栏等.

⑤ 导航窗格. 显示当前工作目录及其下的文件层级结构，便于管理和访问文件.

⑥ 命令窗口. 这是 MATLAB 的主要工作窗口，用于输入程序命令并显示执行结果.

⑦ 工作空间. 用于显示当前会话中所定义的变量及其属性(如名称、大小、类型、数值等).

⑧ 命令历史. 记录用户输入的所有历史命令，便于回顾、复制或重复使用.

(2) 输入与输出. 启动 MATLAB 软件后，可以通过键盘在命令窗口中输入程序语句或命令. 输入完成后，按 Enter 键，系统将自动执行计算，并在命令窗口中显示输出结果. 例如，若要计算“2＋3”，可直接在命令窗口中输入命令“2＋3”，然后按 Enter 键，系统立即输出结果，如图 1-25 所示.

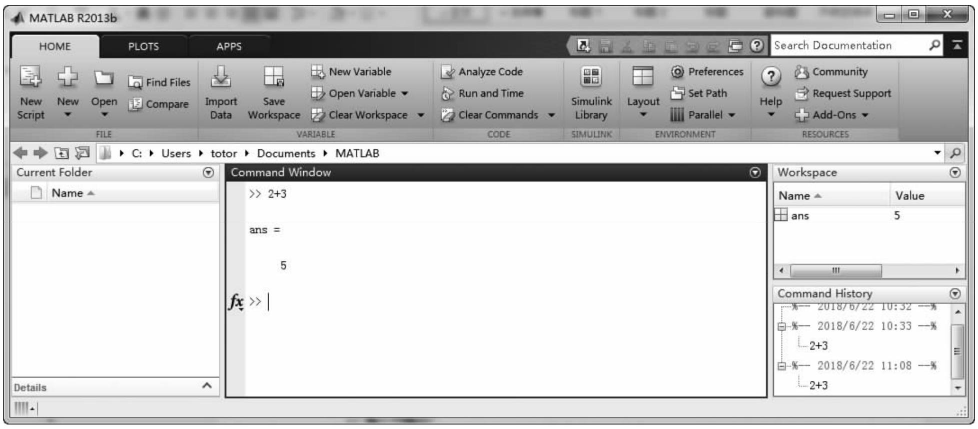

图 1-25

2. 基本运算

在 MATLAB 中,和、差、积、商、乘方运算分别用+、-、*、/、^来表示,其运算顺序与一般运算规则一致,即先乘方,后乘除,最后是加减.若要改变运算次序,可使用小括号“()”来实现.

操作实例 1 计算 $[4+2\times(5-1)]\div 2^2$.

在命令窗口中输入:

```
(4 + 2 * (5 - 1))/2^2
```

按 Enter 键后,得到如下计算结果.

```
ans =
     3
```

3. 绘制函数图像

(1) 相关命令.在 MATLAB 中绘制二维曲线函数图像的命令,最基本的是 plot 和 fplot,其命令说明如表 1-1 所示.

表 1-1

命 令	说 明
plot(x,y)	绘制函数 $y=f(x)$ 的图像
fplot('fun',[a,b])	在区间$[a,b]$上绘制函数 fun(函数表达式)的图像

注意 使用 fplot 命令作图时,必须已知函数的解析表达式;而 plot 命令则可用于任意已知的(x,y)数据点作图.

(2) 操作实例.

操作实例 2 在同一个坐标系下作出两条曲线 $y=\sin(x+1)$ 和 $y=\cos x+1$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像.

解法 1 运行 MATLAB,在命令窗口中输入:

```
fplot('[sin(x + 1),(cos(x) + 1)]',[0,2 * pi])
```

按 Enter 键后,弹出如图 1-26 所示的图像窗口.

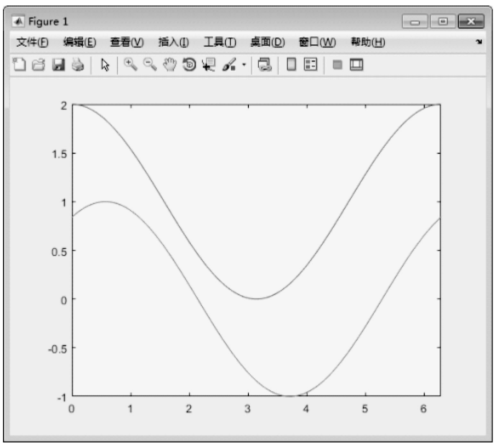

图 1-26

解法 2 在命令窗口中输入:

```
x = 0:0.01:2 * pi;            % 在 x 轴的区间[0,2π]上每隔 0.01 间隔取 x 点
plot(x,sin(x + 1),'g',x,(cos(x) + 1),'b')
```

% 用绿色绘制 $y=\sin(x+1)$ 图像,用蓝色绘制 $y=\cos x+1$ 图像(默认颜色为红色和蓝色)

按 Enter 键后,弹出如图 1-27 所示的图像窗口.

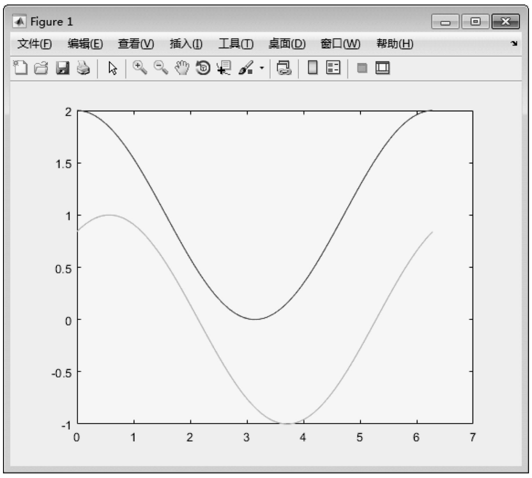

图 1-27

从图 1-26 和图 1-27 可以看出,图像上并未显示图例.如果需要在图像中添加图例,可以通过以下两种方式实现:一是在弹出的图像窗口中使用菜单命令进行设置,二是在命令窗口中使用 legend 命令进行设置.例如,在命令窗口中继续输入:

```
legend('y = sin(x + 1)','y = cos(x) + 1')
```

按 Enter 键后,即可在图像窗口中看到添加的图例,如图 1-28 所示.

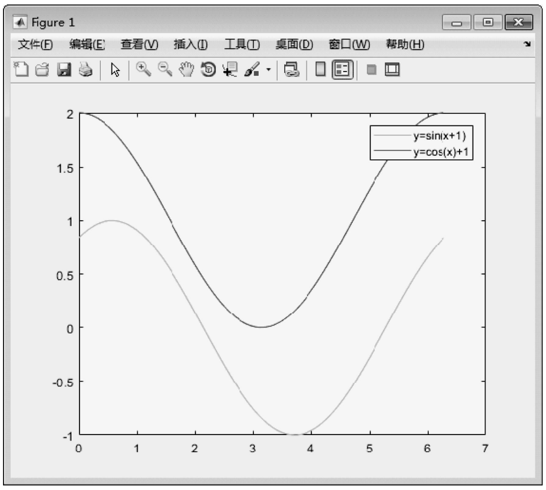

图 1-28

操作实例 3 将屏幕窗口分成 4 部分,用 subplot(m,n,k) 命令画 4 个子图,分别如下:

(1) $y=5x^4-3x^2+2x-7, x\in[-5,5]$;

(2) $y=|x^2-4x+2|, x\in[-1,5]$;

(3) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2}), x\in[-3,3]$;

(4) $y=x^2\cdot e^{-2x^2}, x\in[-3,3]$.

解 在命令窗口中输入:

```
subplot(2,2,1),fplot('5*x^4 - 3*x^2 + 2*x - 7',[-5,5])
```

```
subplot(2,2,2),fplot('abs(x^2 - 4 * x + 2)',[- 1,5])
subplot(2,2,3),fplot('log(1 + sqrt(1 + x^2))',[- 3,3])
subplot(2,2,4),fplot('x^2 * exp(- 2 * x^2)',[- 3,3])
```

按 Enter 键后,弹出如图 1-29 所示的窗口.

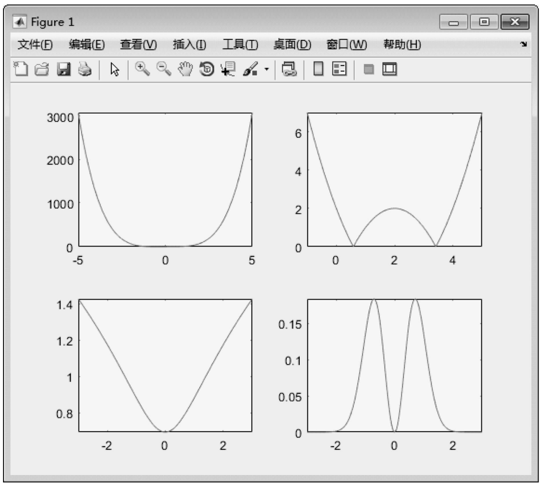

图 1-29

注意　在默认情况下,图像窗口中的各子图并不显示图像的标题.如果需要添加标题,可以通过图像窗口中的相应菜单手动设置.此外,subplot(m,n,k) 命令表示将图像窗口分为 $m \times n$ 个子区域,并在第 k 个子图中绘图.子图的编号顺序为从左到右、从上到下.

1.4.3　实验作业

1. 完成下列表达式的运算.

(1) $\left(2+3\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\div 3.25^2$;　　(2) $\log_5 2$.

2. 作出下列函数的图像.

(1) $f(x)=2x^3-3x+1, x\in[-1,2]$;　　(2) $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

复习题1

1. 选择题.

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为(　　).

A. $[0,2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(0,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $[0,2)\cup(2,+\infty)$

(2) 函数 $y=(2m-1)x+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,则(　　).

A. $m>\dfrac{1}{2}$　　B. $m<\dfrac{1}{2}$

C. $m>-\dfrac{1}{2}$　　D. $m<-\dfrac{1}{2}$

(3) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x>0$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{x}+x^2$,则 $f(-1)=$(　　).

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. 2

(4) $f(x)=x\sin x\cdot e^{\cos x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是(　　).

A. 有界函数　　B. 周期函数

C. 奇函数　　D. 偶函数

(5) 在对称区间上,$f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,则以下函数为奇函数的是(　　).

A. $f(x^4)$　　B. $f(x)+g(x)$

C. $g(x)f(x)$　　D. $-g(-x)$

(6) 函数 $f(x)=\dfrac{7}{\sqrt{49-x^2}}+\lg(3x-6)$ 的定义域为(　　).

A. $[2,7]$　B. $(2,7)$　C. $[2,7)$　D. $(2,7]$

(7) 函数 $f(x)=\ln(3x-1)$ 的定义域为(　　).

A. $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$

C. $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$

(8) 在对称区间$(-\infty,+\infty)$内,$\dfrac{f(-x)-f(x)}{3}$ 是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 无法确定

2. 填空题.

(1) 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是____________.

(2) 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,则 $f(x)=$____________.

(3) 若 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$,则 $f(3)=$______.

(4) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+3x, & x\geqslant 0\\ 5+2x^3, & x<0\end{cases}$,则 $f[f(-1)]=$______.

(5) 函数 $y=1+2\tan 5x,|x|<\dfrac{\pi}{10}$ 的反函数是____________.

(6) 已知 $f(x)=\sqrt{x^3+2}$,则 $f^{-1}(2)=$____________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,求 $f(2),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

4. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1},g(x)=\dfrac{1}{x+1}$;

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2},g(x)=1-x$;

(3) $f(x)=x,g(x)=\ln e^x$.

5. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;

(2) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$.

6. 对于下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并确定它们的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x+1},g(x)=x^4$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-x},g(x)=\sqrt{x-1}$.

7. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\log_4 x$;　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

8. 已知 $f(x-1)=x^2+x+1$,求 $f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

9. 设 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,对于任意 x,y,都有

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$$

且 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$. 证明 $f(x)$ 为偶函数.

10. 某单位拥有一辆汽车,一年中的税费、保险费及司机工资等固定支出共为 a,另外,车辆每行驶单位路程的油费为 b. 试写出该车一年中平均每千米费用 y 与行驶路程 x 之间的函数关系式.

11. 某物体从静止开始沿直线运动,前 10 s 内做匀加速运动,加速度为 2 cm/s^2;10 s 后改为匀速运动. 已知运动开始时路程为零. 试建立路程 s 与时间 t 之间的函数关系式.