巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑 金颖杰
责任编辑 胡思佳 柳卫清
封面设计 刘文东

第2版

高等数学

上 册

扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-28788-5
9 787313 287885 >
定价：49.90元

高等数学
第2版
上册
主编 王志平
上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

第2版

高等数学

上 册

主编 王志平

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

第2版

高等数学

上册

主编　王志平

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书从培养学生运用理论知识解决实际问题的角度出发，由浅入深、由易到难、由具体到抽象，将教学内容逐步展开并融入育人元素、现代信息技术等，使教材更符合现今的教情、学情. 本书共分为 7 章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，微分方程. 附录中包含积分表及 Mathematica 数学实验.

本书既可作为普通高等院校各专业高等数学课程的教材，也可供其他相关工作者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 王志平主编. — 2 版. —上海：上海交通大学出版社，2023.8(2025.7 重印)

ISBN 978-7-313-28788-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 148194 号

高等数学(上册)(第 2 版)
GAODENG SHUXUE(SHANGCE)(DI-ER BAN)

主　　编：王志平
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
印　　制：大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16　　印　　张：18
字　　数：306 千字
版　　次：2023 年 8 月第 2 版　　印　　次：2025 年 7 月第 9 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-28788-5
定　　价：49.90 元

第2版前言

2022年教育部启动新时代高等教育育人质量工程，实施卓越拔尖人才培养计划，深化新工科、新医科、新农科、新文科建设，全面推进高等教育教学数字化等，为高等院校教学改革指明了方向．党的二十大报告指出，“教育是国之大计、党之大计．培养什么人、怎样培养人、为谁培养人是教育的根本问题．育人的根本在于立德”．落实立德树人根本任务，培养学生的应用意识，加强数字化资源建设，这必将成为教学中要解决的问题．在此背景下，我们对本书进行了修订．

本次修订延续了第1版的风格，保留了原来的主体内容，共分为7章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，微分方程．附录中包含积分表及Mathematica数学实验．

本书特色如下．

1．立德树人，融入育人元素

为落实《高等学校课程思政建设指导纲要》的要求，推进习近平新时代中国特色社会主义思想进课堂、进教材、进头脑，本书以党的二十大精神为指导，融入课程思政，如每章介绍了中外数学家的生平和成就，在相应章节处融入了育人元素等，可激发学生学习数学的热情，培养学生的家国情怀和做事精益求精的作风．

2．问题驱动，逐步展开教学内容

通过一个具体问题引入相关的定义与知识点，由浅入深、由易到难、由具体到抽象，将教学内容逐步展开，有助于学生从问题中去理解和掌握概念．每章末都对本章的知识点进行了总结．

3．习题丰富，难易适中

本书所设习题既有适合巩固复习的基础题，又有适合提升能力的拔高题，可以满足各个层次学生的需求．

4．加入Mathematica应用，培养学生的应用意识

以Mathematica软件为平台，将数学知识与现代信息技术相结合，展现数学实验结果，有利于培养学生解决实际问题的能力．

5．配套资源丰富

本书配有微课，以二维码的形式呈现在书中，同时本书也配有丰富的电子教学资料包，为师生提供服务，能有效提高教学质量．

本书由大连海事大学王志平任主编，大连海事大学杨思博、徐丽君、杨云龙参与了编写．全书由王志平统稿．

本书在编写过程中得到了大连海事大学高等数学教学中心其他教师的帮助和支持，在此表示衷心的感谢．

由于编者水平有限，书中存在的疏漏和不妥之处，恳请广大读者批评指正．

编　者

第 1 版前言

本书是编者在总结多年教学经验的基础上编写而成的，可作为普通高等院校理工科高等数学课程的教材或参考书.

本书从培养学生运用理论知识解决实际问题的角度出发，由浅入深、由易到难、由具体到抽象，将教学内容逐步展开，并根据学生的认知水平，设置了大量的例题，涉及了各种不同的解题技巧和方法，能满足不同层次学生的需要.

本书共分为上、下两册. 上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，微分方程等七章. 下册内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分、曲面积分、数量场与向量场，无穷级数等五章.

本书的部分章节通过一个具体问题引入相关的定义与知识点，有助于学生从问题中去理解和掌握概念. 每一章末都对本章的知识点进行了小结.

另外，本书中带有“*”的内容，读者可根据实际需要选学.

本书由大连海事大学王志平教授任主编，王人连任副主编. 编写人员及分工如下：周若虹编写第一章、第二章、第三章、第四章，王人连编写第五章、第六章、第七章，王科伦编写第八章、第九章，王志平编写第十章、第十一章、第十二章. 全书由赵连昌主审，最后由王志平统稿整理.

在本书编写过程中，始终得到大连海事大学数学系其他老师的帮助和支持，在此表示衷心的感谢. 由于编者的水平有限，书中难免会有疏漏和错误，恳请广大读者批评指正.

编　者

目 录

第一章

函数、极限与连续

初等数学研究的对象主要是常量，而高等数学研究的基本对象是定义在实数集上的函数，并且以极限方法作为基本的研究方法. 本章将介绍函数、极限与连续的基础知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

第一节　函　　数

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着. 17 世纪初，数学首先从对运动（如天文、航海等问题）的研究中引出了函数这个基本概念. 在那以后的 200 多年里，这个概念几乎在所有的科学研究工作中都占据了中心位置.

微课：
函数

一、区间与邻域

区间是一种常见的数集. 设 a，b 是两个实数，且 $a<b$，则

称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 (a,b)；

称数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 为**闭区间**，记为 $[a,b]$；

称数集 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 为**半开区间**，分别记为 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.

以上几个区间统称为**有限区间**，a，b 分别称为区间的**左端点**和**右端点**，$b-a$ 称为**区间的长度**.

此外，还可以定义如下五种类型的无限区间.

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\};[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\};$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\};(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\};$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$

这里 $+\infty$ 和 $-\infty$ 是记号，不是数，分别读作“正无穷大”和“负无穷大”.

有限区间和无限区间统称为**区间**.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的开区间 $(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$ 称为点 a 的 **δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$，其中点 a 称为该邻域的**中心**，δ 称为该邻域的**半径**.

显然，$U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的点的集合，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

当无须强调邻域的半径时，常用记号 $U(a)$ 表示以点 a 为中心的某个邻域.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

另外,开区间$(a-\delta,a)$称为点a的**左δ邻域**,而开区间$(a,a+\delta)$称为点a的**右δ邻域**.

二、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中,往往存在多个不断变化的量,即变量,这些变量并不是孤立变化的,而是相互联系并遵循一定的规律.函数就是用来描述这种联系的.下面先讨论两个变量的情形.

例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为t,下落的距离为s,假定开始下落的时刻$t=0$,则变量s与t之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定,其中g是重力加速度.

定义1 设x和y是两个变量,D是一个给定的非空数集.若对于每个$x\in D$,变量y按照一定法则f总有确定的数值与它对应,则称y是x的**函数**,记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中x称为**自变量**,y称为**因变量**,数集D称为这个函数的**定义域**,也记为D_f,即$D_f=D$.

对每个$x\in D$,按照对应法则f,总有确定的值y与之对应,这个值称为函数在点x处的**函数值**,记为$f(x)$.因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量x遍取D的所有数值时,对应的函数值$f(x)$的全体构成的集合称为函数f的**值域**,记为R_f或$f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出,函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素.也就是说,如果两个函数的对应法则和定义域都相同,那么这两个函数就是相同的函数.

关于函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义确定.若讨论的是纯数学问题,则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域,这种定义域又称为函数的**自然定义域**.

例如,函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的(自然)定义域为开区间$(-1,1)$.

对函数$y=f(x)(x\in D)$,若取自变量x为横坐标,因变量y为纵坐标,则在平面直角坐标系xOy中就确定了一个点(x,y).当x遍取定义域D中的每一个数值时,平面上的点集

$$C=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为函数$y=f(x)$的**图形**(见图1-1).

若自变量在定义域内任取一个数值,对应的函数值总是唯一的,这种函数称为**单值函数**,否则称为**多值函数**.

例如,方程$x^2+y^2=a^2$在闭区间$[-a,a]$上确定了一个以x为自变量、y为因变量的函数.对每一个$x\in(-a,a)$,都有两个y值$(\pm\sqrt{a^2-x^2})$与之对应,因而y是多值函数.

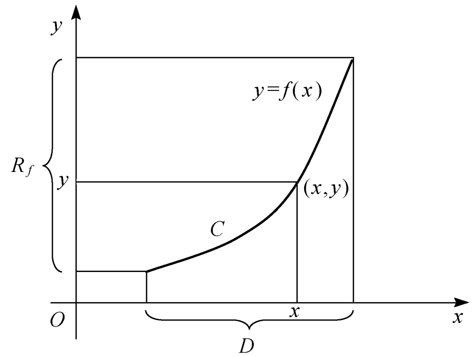

图 1-1

注：若无特别声明，函数均指单值函数.

函数的常用表示法有以下三种.

(1) **表格法** 将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图形法** 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) **公式法(解析法)** 将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法.

例 1 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-2 所示.

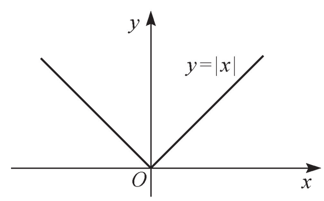

图 1-2

例 2 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0, \end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-3 所示. 对任一实数 x，总有 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$.

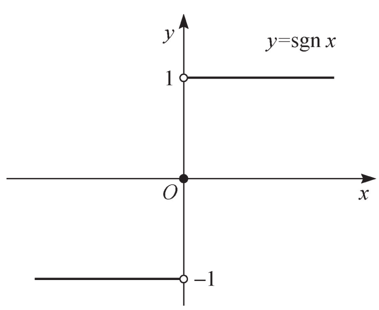

图 1-3

有些函数,对于自变量的不同取值范围,有不同的对应法则,这种函数称为**分段函数**,如例 1 和例 2 中的两个函数.

例 3 取整函数 $y=[x]$,表示不超过数 x 的最大整数. 例如,

$$[2.3]=2,[5]=5,[\pi]=3,[-6.7]=-7.$$

取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$,它的图形如图 1-4 所示.

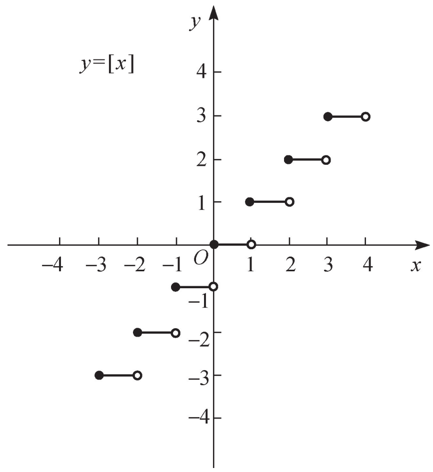

图 1-4

三、函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M,使得对任一 $x\in X$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 每一个满足上述不等式的正数 M 都是该函数的界.

若不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**,或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,因为对任何实数 x,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界,在 $[1,+\infty)$ 上有界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加函数**;若对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对于任一 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若对于任一 $x \in D$,恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如,$f(x)=x^2$ 是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$;$f(x)=x^3$ 是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在常数 $T>0$,使得对于任一 $x\in D$,有$(x\pm T)\in D$,且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如,$\sin x$,$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图形特点是,若把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍距离,则它将与周期函数的其他部分图形重合(见图 1-5).

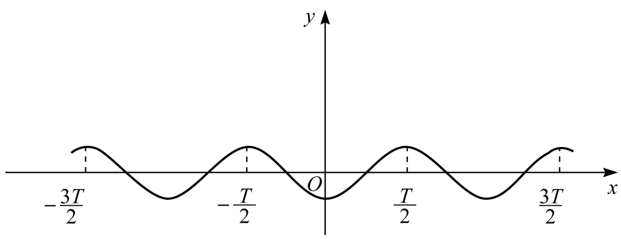

图 1-5

周期函数的应用是广泛的,因为在科学与工程技术中研究的许多现象都呈现出明显的周期性特征,如家用的电压和电流是周期的,用于加热食物的微波炉中的电磁场是周期的,季节和气候是周期的,月相和行星的运动是周期的,等等.

四、反函数与复合函数

1. 反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系. 但在研究过程中,哪个量作为自变量,哪个量作为因变量(函数)是由具体问题决定的.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 R_f. 对于值域 R_f 中的任一数值 y,都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应,且满足关系式

$$f(x)=y,$$

则确定了一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$. 反函数的定义域为 R_f,值域为 D. 相对于反函数,函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由于习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此将反函数中 x 与 y 互换位置,即记为

$y=f^{-1}(x), x\in R_f$.

在同一直角坐标系中,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

什么样的函数才有反函数呢?下面给出反函数存在定理.

定理 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或减少),则函数 $y=f(x)$ 存在反函数,其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_y=\{y\mid y=f(x), x\in I_x\}$ 上也单调增加(或减少).

注:单调性并不是一个函数存在反函数的必要条件,读者可自己举出非单调函数存在反函数的实例.

例 4 求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解 记 $u=e^x$,则 $y=\dfrac{u-u^{-1}}{2}$,由此得 $u^2-2yu-1=0$,解得

$$u=y\pm\sqrt{y^2+1},$$

因 $u>0$,故

$$u=y+\sqrt{y^2+1}, \text{即 } e^x=y+\sqrt{y^2+1},$$

所以 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$,因此函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

2. 复合函数

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ,若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的**复合函数**,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,u 称为**中间变量**.

注:(1) 不是任何两个函数都可以构成复合函数. 例如,函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数. 因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$,而 $u=2+x^2\geqslant 2$,所以对任何的 x 值,y 都得不到确定的对应值.

(2) 复合函数可以有多个中间变量,如 $y=e^u, u=\sqrt{v}, v=x+1$ 复合成函数 $y=e^{\sqrt{x+1}}$,这里 u,v 都是中间变量.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$

利用复合函数不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数,还可以把一个较复杂的函数分解成几个简单的函数,这对于今后掌握微积分的运算是很重要的.

例 6 下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1) $y=e^{-x}$; (2) $y=\sin^2(1+2x)$; (3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

解 (1) $y=e^{-x}$ 由 $y=e^u, u=-x$ 复合而成.

（2）$y=\sin^2(1+2x)$ 由 $y=u^2, u=\sin v, v=1+2x$ 复合而成.

（3）$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$ 由 $y=\arccos u, u=\sqrt{v}, v=\tan w, w=a^2+x^2$ 复合而成.

五、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数是五类基本初等函数. 由于在中学数学中已经深入学习过这些函数，这里只做简要复习.

1. 幂函数

幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$，其定义域由 α 的取值决定. 当 $\alpha=1,2,3,\dfrac{1}{2},-1$ 时是最常用的幂函数（见图 1-6）.

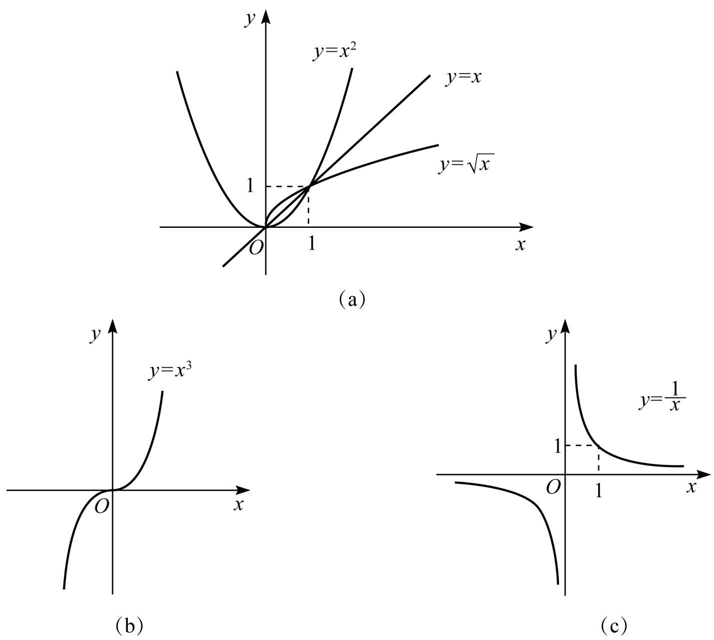

图 1-6

2. 指数函数

指数函数 $y=a^x$（a 为常数，且 $a>0, a\neq 1$），其定义域为$(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调减少，如图 1-7 所示. 其中最常用的是以 e（e 是无理数，它的值是 2.718 281 828…）为底数的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$.

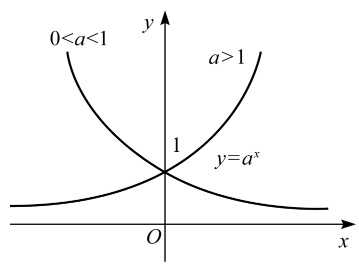

图 1-7

3. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数称为**对数函数**,记为 $y=\log_a x$(a 为常数,且 $a>0$,$a\neq 1$),其定义域为$(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 单调减少,如图 1-8 所示. 其中以 e 为底的对数函数称为**自然对数函数**,记为$y=\ln x$.

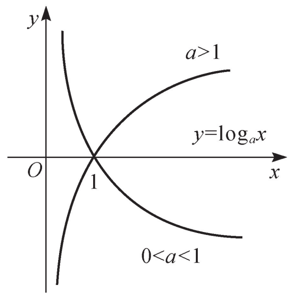

图 1-8

4. 三角函数

常用的三角函数如下.

(1) 正弦函数 $y=\sin x$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,它是奇函数及以 2π 为周期的周期函数(见图 1-9).

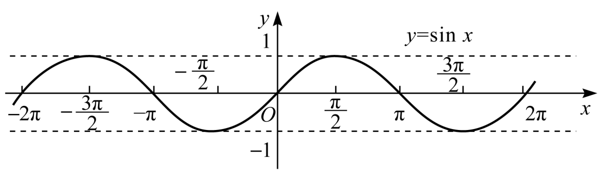

图 1-9

(2) 余弦函数 $y=\cos x$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,它是偶函数及以 2π 为周期的周期函数(见图 1-10).

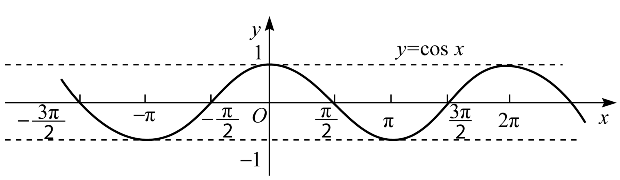

图 1-10

(3) 正切函数 $y=\tan x$,其定义域为$\left\{x \middle| x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$,值域为$(-\infty,+\infty)$,它是奇函数及以 π 为周期的周期函数(见图 1-11).

(4) 余切函数 $y=\cot x$,其定义域为$\{x \mid x\neq k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$,值域为$(-\infty,+\infty)$,它是奇函

数及以 π 为周期的周期函数(见图 1-12).

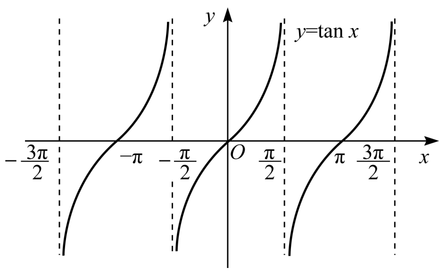

图 1-11

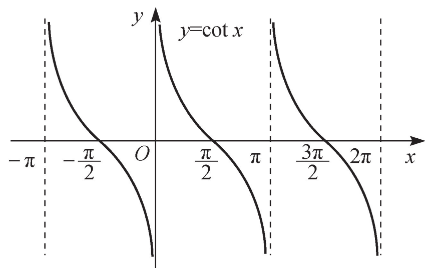

图 1-12

5. 反三角函数

三角函数的反函数称为**反三角函数**. 由于三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 不是单调的,为了得到它们的反函数,需对这些函数限定在某个单调区间内来讨论. 常用的反三角函数如下.

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$,定义域为 $[-1,1]$,值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$(见图 1-13).

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$,定义域为 $[-1,1]$,值域为 $[0,\pi]$(见图 1-14).

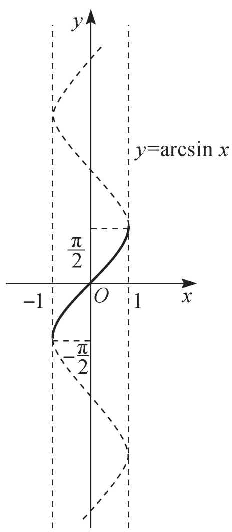

图 1-13

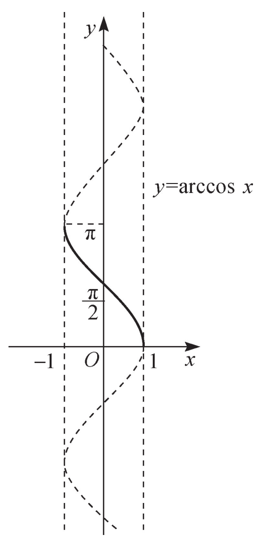

图 1-14

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$(见图 1-15).

(4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,\pi)$(见图 1-16).

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

初等函数的基本特征是在函数有定义的区间内其图形是不间断的.

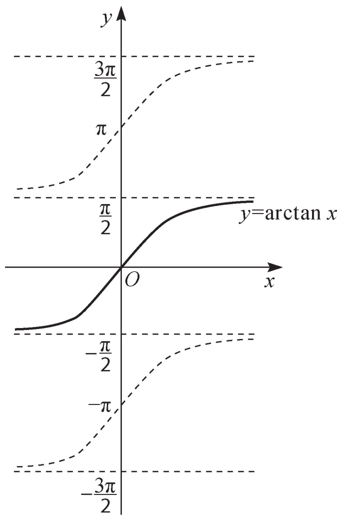

图 1-15

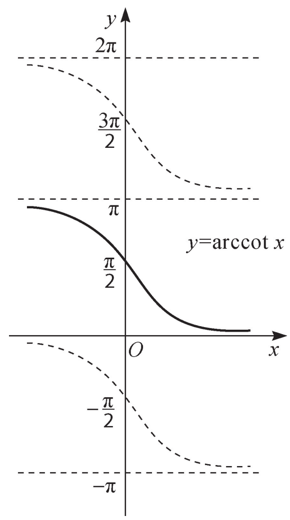

图 1-16

6. 双曲函数和反双曲函数

下面再介绍在工程技术上常用到的一类函数(双曲函数)及其反函数(反双曲函数),它们的定义如下.

双曲正弦函数 $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

双曲余弦函数 $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

双曲正切函数 $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

从上述定义可见,双曲函数是由指数函数生成的初等函数,这三个双曲函数的简单性态如下.

(1) 双曲正弦函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$(-\infty, +\infty)$;它是单调增加的奇函数,其图形通过原点且关于原点对称. 当 x 的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近曲线 $y = \dfrac{1}{2}e^x$,在第三象限内接近于曲线 $y = -\dfrac{1}{2}e^{-x}$(见图 1-17).

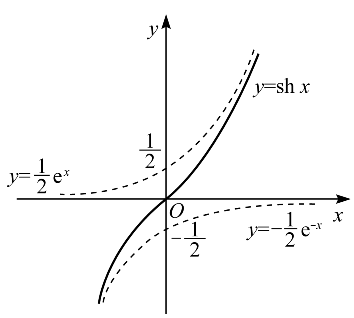

图 1-17

(2) 双曲余弦函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$[1, +\infty)$;它是偶函数,它的图形过点

(0,1) 且关于 y 轴对称. 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少,在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 当 x 的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近曲线 $y=\frac{1}{2}e^{x}$,在第二象限内接近曲线 $y=\frac{1}{2}e^{-x}$(见图 1-18).

(3) 双曲正切函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(-1,1)$;它是单调增加的奇函数,它的图形通过原点且关于原点对称. 当 x 的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近直线 $y=1$;在第三象限内接近于直线 $y=-1$(见图 1-19).

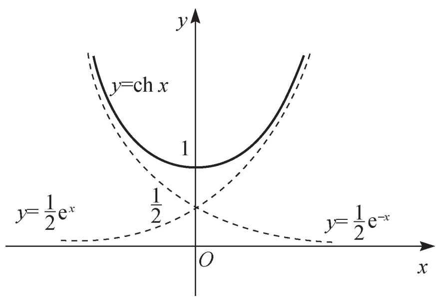

图 1-18

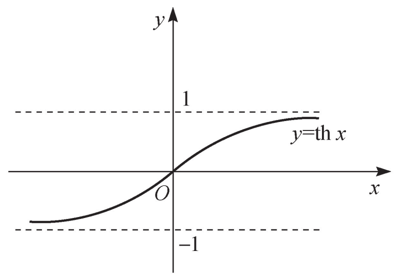

图 1-19

双曲函数的反函数称为**反双曲函数**,则双曲函数 $y=\text{sh}\,x$,$y=\text{ch}\,x(x\geqslant0)$,$y=\text{th}\,x$ 的反函数依次记为 $y=\text{arsh}\,x$(反双曲正弦函数),$y=\text{arch}\,x$(反双曲余弦函数),$y=\text{arth}\,x$(反双曲正切函数).

这些反双曲函数都可以通过自然对数函数来表示. 例如,对于反双曲正弦函数 $y=\text{arsh}\,x$,它是 $x=\text{sh}\,y$ 的反函数,由双曲函数的定义,有

$$x=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2},\text{即 } e^{2y}-2xe^{y}-1=0,$$

解得

$$e^{y}=x\pm\sqrt{x^{2}+1},$$

因 $e^{y}>0$,上式应取正号,故

$$e^{y}=x+\sqrt{x^{2}+1},$$

等式两端取对数,就得到

$$y=\text{arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1}).$$

由此可见,函数 $y=\text{arsh}\,x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,它是单调增加的奇函数. 由 $y=\text{sh}\,x$ 的图形,根据反函数的作图法,可得 $y=\text{arsh}\,x$ 的图形(见图 1-20).

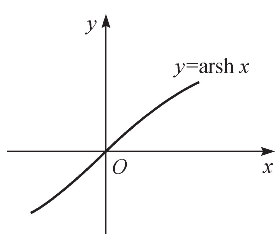

图 1-20

类似地,双曲余弦函数 $y=\text{ch}\,x(x\geqslant0)$ 的反函数,即反双曲余弦函数的表达式为

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

由此可见,函数 $y = \operatorname{arch} x$ 的定义域是$[1, +\infty)$,值域是$[0, +\infty)$,它在定义域上是单调增加的. 由 $y = \operatorname{ch} x (x \geqslant 0)$的图形,根据反函数的作图法,可得 $y = \operatorname{arch} x$ 的图形(见图 1-21).

反双曲正切函数 $y = \operatorname{arth} x$ 的表达式为

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

其定义域是$(-1,1)$,值域是$(-\infty, +\infty)$,它在定义域上是单调增加的奇函数. 由$y = \operatorname{th} x$ 的图形,根据反函数的作图法,可得 $y = \operatorname{arth} x$ 的图形(见图 1-22).

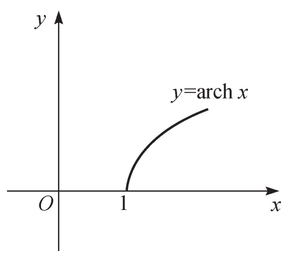

图 1-21

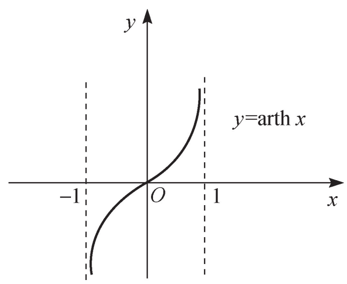

图 1-22

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$;　　(2) $y = \sqrt{9 - x^2}$;

(3) $y = \ln(5x + 1)$;　　(4) $y = \arcsin(2x - 3)$;

(5) $y = \sqrt{5 - x} + \ln(x - 1)$.

2. 下列各组函数中,$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \ln x^4, g(x) = 4\ln x$;

(2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$;

(3) $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = (\sqrt{x})^2$;

(4) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$.

3. 求下列函数值.

(1) 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x^2 - 1, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f(-1), f(0), f(2)$;

(2) 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 4x - \sqrt{1 + x^2}$,求 $f(1)$.

4. 设 $f(x)$ 为定义在$(-l, l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在$(0, l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在$(-l, 0)$ 内也单调增加.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(2) $f(x)=x(x-1)(x+1)$；

(3) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$；　　(4) $f(x)=x^2\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(5) $f(x)=\sin x\cos x+1$；

(6) $F(x)=f(x)-f(-x)$，其中 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数；

(7) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(8) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$.

6. 指出下列周期函数的周期.

(1) $f(x)=\sin^2 x$；　　(2) $f(x)=\sin 4x$；

(3) $f(x)=5+\cos 2\pi x$；　　(4) $f(x)=|\cos x|$.

7. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\ln(3x+2)$；　　(2) $y=2^{x-1}$；

(3) $y=\sqrt[3]{5x+1}$；　　(4) $y=x^2$.

8. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=(0,1)$，求下列各函数的定义域.

(1) $f(x^3)$；　　(2) $f(\tan x)$；　　(3) $f(x-a)(a>0)$.

第二节　数列的极限

极限的思想是由于求某些实际问题的精确解而产生的. 例如，我国古代数学家刘徽（公元 3 世纪）利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用. 又如，《庄子·杂篇·天下》中对“截丈问题”有一段名言：“一尺之棰，日截其半，万世不竭，”其中也隐含了深刻的极限思想. 极限的思想反映了变与不变、过程与结果、有限与无限、近似与精确、量变与质变的辩证关系.

极限是研究变量变化趋势的基本工具，高等数学中许多基本概念，如连续、导数、定积分、无穷级数等都是建立在极限的基础上. 极限方法也是研究函数的一种最基本的方法. 本节将首先给出数列及数列极限的定义.

一、数列的定义

定义 1　按一定次序排列的无穷多个数

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

称为**无穷数列**，简称**数列**，可简记为 $\{x_n\}$. 其中的每个数称为数列的**项**，x_n 称为数列的**通项**（或**一般项**），n 称为 x_n 的**下标**.

在几何上，数列 $\{x_n\}$ 可看成数轴上的一个动点，它在数轴上依次取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$（见图 1-23）.

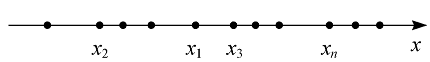

图 1-23

数列$\{x_n\}$可看成自变量为正整数 n 的函数:$x_n=f(n)$,称为**整标函数**,其定义域是全体正整数. 当自变量 n 依次取 1,2,3,… 时,对应的函数值就排成数列$\{x_n\}$(见图 1-24).

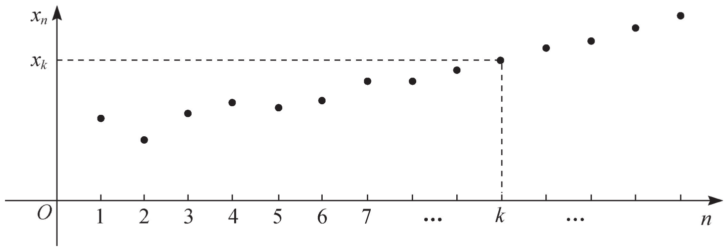

图 1-24

二、数列的极限

极限的概念最初是在运动观点的基础上,凭借几何直观产生的直觉,用自然语言来定性描述的.

定义 2 设有数列$\{x_n\}$与常数 a,若当 n 无限增大时,x_n 无限接近于 a,则称常数 a 为数列$\{x_n\}$的**极限**,或称数列$\{x_n\}$**收敛**于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

如果一个数列没有极限,就称该数列**发散**.

从定义 2 给出的数列极限概念的定性描述可见,下标 n 的变化过程与数列$\{x_n\}$的变化趋势均借助了"无限"这样一个明显带有直观模糊性的形容词. 在数学中仅凭直观是不可靠的,必须将凭直观产生的定性描述转化为用数学语言表达的超越现实原型的定量描述.

定义 3 设有数列$\{x_n\}$与常数 a,若对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立,则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的**极限**,或称数列$\{x_n\}$**收敛**于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

注:定义 3 中正数 ε 是任意给定的,所以 $|x_n-a|<\varepsilon$ 实际上表达了 x_n 无限接近于 a 的意思. 此外,定义 3 中的 N 与任意给定的正数 ε 有关. 数列极限存在与否与前有限项无关,这引申出以下意思:一个人无论以前怎样,只要从某一关键时间点后,发奋图强,也一样能实现自己人生的奋斗目标.

数列$\{x_n\}$的极限为 a 的几何解释:将常数 a 及数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 表示在数轴上,并在数轴上作邻域 $U(a,\varepsilon)$(见图 1-25).

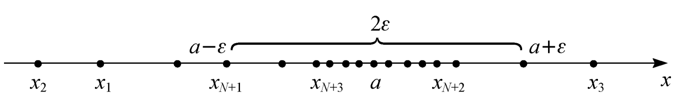

图 1-25

注意到不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

等价于

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$$

所以当 $n>N$ 时，所有的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内，而落在这个区间之外的点至多只有 N 个.

数列极限的定义并未给出求极限的方法，只给出了论证数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a 的方法，常称为 **ε-N 论证法**，其论证步骤如下.

(1) 任意给定正数 ε.

(2) 由 $|x_n-a|<\varepsilon$ 开始分析倒推，推出 $n>\varphi(\varepsilon)$($\varphi(\varepsilon)$ 是一个关于 ε 的函数).

(3) 取 $N=[\varphi(\varepsilon)]$，再用 ε-N 语言顺述结论.

例 1 设 $y_n=C$(C 为常数)，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=C$.

证明 对于任意给定的正数 ε 和一切正整数 n，都有

$$|y_n-C|=|C-C|=0<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}C=C,$$

即常数数列的极限仍是同一常数.

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$，其中常数 $\alpha>0$.

分析 根据数列极限的定义，就是要证明：对于任意给定的正数 ε，可以找到这样的正整数 N，使得当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon.$$

由于 $\left|\dfrac{1}{n^\alpha}\right|=\dfrac{1}{n^\alpha}$，要想 $\left|\dfrac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$，也就是

$$n^\alpha>\frac{1}{\varepsilon}，即\ n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

可见应该取 $N=\left[\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$.

证明 对任意给定的正数 ε，总存在正整数 $N=\left[\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$，当 $n>N$ 时，有

$$n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}，即\ \frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon,$$

故有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon,$$

根据数列极限的定义，这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$.

为表达方便，引入两种量词.

(1) 全称量词，即“全体”“所有”“任意”，表示为 $\forall$.

(2) 存在量词，即“存在某个”“有某个”，表示为 $\exists$.

于是，$\forall\varepsilon>0$，表示任意给定正数 ε；$\exists$ 正整数 N，表示存在正整数 N. 从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义可用如下 ε-N 语言来叙述：

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists$正整数 N，当 $n > N$ 时，有$|x_n - a| < \varepsilon$.

例 3 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

证明 令$\sqrt[n]{n} - 1 = h_n$，由于

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| = \sqrt[n]{n} - 1,$$

因此

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

当 $n > 2$ 时，$n - 1 > \frac{n}{2}$，所以

$$n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 > \frac{n^2}{4}h_n^2,$$

即

$$h_n < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

从而要使$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon$，只要$\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$，即$n > \frac{4}{\varepsilon^2}$. 因此，对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数$N = \max\left\{2, \left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]\right\}$，当 $n > N$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| = h_n < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

三、收敛数列的性质

1. 收敛数列的有界性

定义 4 对数列$\{x_n\}$，若存在正数 M，使得对一切正整数 n，恒有$|x_n| \leqslant M$，则称数列$\{x_n\}$ **有界**；否则，称其**无界**.

例如，数列 $x_n = \frac{n}{n+3}(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 是有界的，因为可取 $M = 1$，使$\left|\frac{n}{n+3}\right| \leqslant 1$ 对一切正整数 n 都成立. 又如，数列 $x_n = 3^n(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 是无界的，因为当 n 无限增加时，3^n 可以超过任何正数.

几何上，若数列$\{x_n\}$ 有界，则存在 $M > 0$，使得数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间$[-M, M]$上.

定理 1 收敛的数列必定有界.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，由数列极限的定义，若取 $\varepsilon = 1$，则 $\exists$正整数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有

$$|x_n - a| < 1,$$

即

$$a - 1 < x_n < a + 1,$$

若记 $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$，则对一切正整数 n，皆有$|x_n| \leqslant M$，故

$\{x_n\}$ 有界.

推论 无界数列必定发散.

注:如是数列$\{x_n\}$有界,却不能断定数列$\{x_n\}$一定收敛. 也就是说,数列有界是数列收敛的必要条件,但不是充分条件.

2. 极限的唯一性

定理 2 收敛数列的极限是唯一的.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$,由数列极限的定义,对于 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists$正整数 N_1,N_2,当 $n > N_1$ 时,恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon;$$

当 $n > N_2$ 时,恒有

$$|x_n - b| < \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时,有

$$|a-b| = |(x_n - b) - (x_n - a)| \leqslant |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

因$|a-b|$为非负常数,而 ε 可以任意小,所以只有$|a-b| = 0$,即 $a = b$. 因此,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = b$,从而证得结论.

3. 收敛数列的保号性

定理 3(收敛数列的保号性) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,且 $a > 0$(或 $a < 0$),则存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,恒有

$$x_n > 0(\text{或 } x_n < 0).$$

证明 先证 $a > 0$ 的情形. 由数列极限的定义,对 $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$,$\exists$正整数 N,当 $n > N$ 时,有

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

即

$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

同理可证 $a < 0$ 的情形.

推论 若数列$\{x_n\}$从某项起有 $x_n \geqslant 0$(或 $x_n \leqslant 0$),且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $a \geqslant 0$(或 $a \leqslant 0$).

证明 设数列$\{x_n\}$从第 N_1 项起有 $x_n \geqslant 0$ 的情形,用反证法证明.

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < 0$,则根据定理 3,$\exists$正整数 N_2,当 $n > N_2$ 时,有 $x_n < 0$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,当 $n > N$ 时,按定理 3 有 $x_n < 0$,但已知 $x_n \geqslant 0$,这引起矛盾. 故必有 $a \geqslant 0$.

同理可证数列$\{x_n\}$从某项起有 $x_n \leqslant 0$ 的情形.

4. 子数列的收敛性

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的**子数列**(或**子列**).

设在数列$\{x_n\}$中,第一次抽取 x_{n_1},第二次抽取 x_{n_2},第三次抽取 x_{n_3},$\cdots$,如此反复抽取下去,就得到数列$\{x_n\}$的一个子数列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$.

注:在子数列$\{x_{n_k}\}$中,x_{n_k}是$\{x_{n_k}\}$中的第 k 项,是原数列$\{x_n\}$中第 n_k 项. 显然,$n_k \geqslant k$.

定理4(收敛数列与其子数列间的关系)　如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是a.

证明　设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列.

由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,故对于$\forall \varepsilon > 0$,$\exists$正整数$N$,当$n > N$时,有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

取$K = N$,则当$k > K$时,$n_k > n_K = n_N \geqslant N$.于是,

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

即$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

由定理4知,若数列$\{x_n\}$有两个子数列收敛于不同的极限,则数列$\{x_n\}$是发散的.

例如,考察数列

$$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots,$$

因子数列$\{x_{2k-1}\}$收敛于1,而子数列$\{x_{2k}\}$收敛于-1,故数列

$$x_n = (-1)^{n+1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

是发散的.同时此例也说明,一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

习题 1.2

1. 观察下列数列的变化趋势,判别哪些数列有极限,如有极限,写出其极限.

(1) $x_n = \dfrac{1}{3^n}$;　　(2) $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$;

(3) $x_n = (-1)^n n$;　　(4) $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$;

(5) $x_n = \cos\dfrac{1}{n}$;　　(6) $x_n = \ln\dfrac{1}{n}$.

2. 根据数列极限的定义证明.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1} = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) = 1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n} = 0$.

3. 证明:设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,且$A > B$,则存在自然数$N$,当$n > N$时,恒有$a_n > b_n$.

4. 设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

5. 对于数列$\{x_n\}$,若$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$,$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

第三节　函数的极限

通过数列极限的学习,知道极限是研究变量变化趋势的.而从函数角度看,数列可看成自变量为正整数n的函数:$x_n = f(n)$.研究数列x_n的极限,即是研究当自变量$n\to\infty$时,函

数 $f(n)$ 的变化趋势. 此处函数 $f(n)$ 的自变量 n 只能取正整数,即自变量 n 的变化是跳跃的,且其可能变化趋势只有一种,即 $n\to\infty$. 在生产和科学技术中,所讨论的自变量往往是连续变化的并且绝对值无限增大或自变量趋近于某一点时函数的变化趋势,这就是本节要学习的函数的极限问题.

一、函数极限的定义

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

观察函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的变化趋势. 因为

$$|f(x)-0|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|,$$

易见,当 $|x|$ 越来越大时,$f(x)$ 就越来越接近 0,或者说当 $|x|$ 无限增大时,$\dfrac{\sin x}{x}$ 就无限接近于 0. 因为只要 $|x|$ 足够大,$\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 就可以小于任意给定的正数.

定义 1 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 若存在常数 A,对任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 X,使得对于满足不等式 $|x|>X$ 的一切 x 总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

注:定义 1 中 ε 刻画了 $f(x)$ 与 A 的接近程度,X 刻画了 $|x|$ 充分大的程度,X 是随 ε 的给定而确定的.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的几何意义:作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$,则总存在一个正数 X,使得当 $|x|>X$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两条直线之间(见图 1-26).

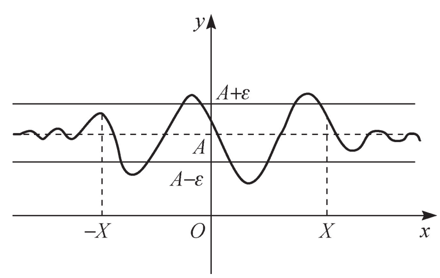

图 1-26

如果 $x>0$ 且无限增大(记为 $x\to+\infty$),那么只要把定义 1 中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$ 就得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义. 同样,$x<0$ 而 $|x|$ 无限增大(记为 $x\to-\infty$),那么只要把定义 1 中的 $|x|>X$ 改为 $x<-X$,就得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$.

证明 要证 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当 $x>X$ 时,

$$|\mathrm{e}^{-x}-0|=\mathrm{e}^{-x}<\varepsilon$$

成立. 因为该不等式等价于

$$-x<\ln\varepsilon,\text{即 } x>-\ln\varepsilon.$$

因此,对于 $\forall\varepsilon>0$,取 $X=-\ln\varepsilon>0$,当 $x>X=-\ln\varepsilon$ 时,不等式 $|\mathrm{e}^{-x}-0|=\mathrm{e}^{-x}<\varepsilon$ 成立. 故由定义 1 知

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

证明 由于

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{|x|},$$

为了使 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$,只要

$$\frac{1}{|x|}<\varepsilon,\text{即}\ |x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

故 $\forall\varepsilon>0$,取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$,当 $|x|>X=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时,有 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$,这就证明了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{x^2-1}=3$.

证明 由于 $x\to\infty$,不妨设 $|x|>1$,$\forall\varepsilon>0$,解不等式

$$\left|\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}-3\right| = \left|\frac{2x+1}{x^2-1}\right| \leqslant \frac{2|x|+1}{|x^2|-1} < \frac{2(|x|+1)}{(|x|+1)(|x|-1)} = \frac{2}{|x|-1}<\varepsilon,$$

得

$$|x|>\frac{2}{\varepsilon}+1,$$

故 $\forall\varepsilon>0$,取 $X=\dfrac{2}{\varepsilon}+1>0$,当 $|x|>X=\dfrac{2}{\varepsilon}+1$ 时,有 $\left|\dfrac{3x^2+2x-2}{x^2-1}-3\right|<\varepsilon$,即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}=3.$$

2. 自变量趋于有限值时函数的极限

现在研究自变量 x 趋于有限值 x_0(即 $x\to x_0$)时,函数 $f(x)$ 的变化趋势. 在 $x\to x_0$ 的过程中,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A,可用

$$|f(x)-A|<\varepsilon(\varepsilon\ \text{是任意给定的正数})$$

来表达. 又因为函数值 $f(x)$ 无限接近于 A 是在 $x\to x_0$ 的过程中实现的,所以对于任意给定的 ε,只要求充分接近于 x_0 的 x 的函数值 $f(x)$ 满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,而充分接近于 x_0 的 x 可表达为

$$0<|x-x_0|<\delta(\delta\ \text{为某个正数}).$$

根据上述分析,可给出当 $x\to x_0$ 时函数极限的定义.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 若对任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得对于满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\ \text{或}\ f(x)\to A(x\to x_0).$$

注:(1) 函数极限与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关.

(2) δ 与任意给定的正数 ε 有关.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的几何解释:任意给定一正数 ε,作平行于 x 轴的两条直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$. 根据定义 2,对于给定的 ε,存在点 x_0 的一个 δ 去心邻域

$$0<|x-x_0|<\delta,$$

当 $y=f(x)$ 的图形上的点的横坐标 x 落在该邻域内时,这些点对应的纵坐标落在带形区域 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ 内(见图 1-27).

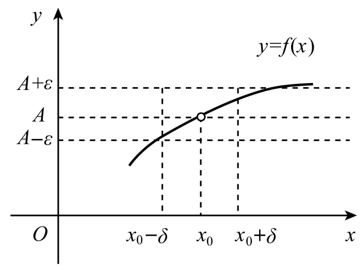

图 1-27

类似数列极限的 ε-N 论证法,可以给出证明自变量趋于有限值时函数极限的 ε-δ 论证法.

(1) 任意给定正数 ε.

(2) 由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 开始分析倒推,推出 $|x-x_0|<\varphi(\varepsilon)$.

(3) 取定 $\delta=\varphi(\varepsilon)$,再用 ε-δ 语言顺述结论.

例 4 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

证明 当 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$|\sin x|\leqslant|x|$,于是

$$|\cos x-1|=\left|-2\sin^2\frac{x}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x}{2}\right|^2=\frac{1}{2}|x|^2.$$

为了使 $|\cos x-1|<\varepsilon$,只要 $|x|<\sqrt{2\varepsilon}$ 且 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$,因此,取 $\delta=\min\left\{\sqrt{2\varepsilon},\dfrac{\pi}{2}\right\}$,于是,对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\min\left\{\sqrt{2\varepsilon},\dfrac{\pi}{2}\right\}$,当 $0<|x|<\delta$ 时,有

$$|\cos x-1|\leqslant\frac{1}{2}|x|^2<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

例 5 证明当 $x_0>0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证明 设 $f(x)=\sqrt{x}$,其定义域为 $x\geqslant 0$. $\forall\varepsilon>0$,解不等式

$$\left|f(x)-\sqrt{x_0}\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon,$$

得 $|x-x_0|\leqslant\sqrt{x_0}\varepsilon$,而 $x\geqslant 0$ 可用 $|x-x_0|\leqslant x_0$ 保证,因此取 $\delta=\min\{\sqrt{x_0}\varepsilon,x_0\}$,于是 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\min\{\sqrt{x_0}\varepsilon,x_0\}$,当 $0<|x-x_0|<\delta$,有

$$\left|f(x)-\sqrt{x_0}\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon,$$

即当 $x_0>0$ 时,有

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$$

3. 单侧极限

在定义 2 中,所谓的"$x\to x_0$"指的是 x 从 x_0 的左、右两侧趋近于 x_0. 但有时只需考虑 x 从 x_0 的一侧趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的变化趋势. 把 $f(x)$ 在点 x_0 的一侧趋近于 x_0 时的极

限称为**单侧极限**.

定义 3 当自变量 x 从 x_0 的左侧(或右侧)趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 趋于常数 A,即若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在一个正数 δ,使得当 $-\delta<x-x_0<0$(或 $0<x-x_0<\delta$)时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**(或**右极限**),记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\left(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\right),$$

有时也记为

$$f(x_0-0)=A(\text{或 } f(x_0+0)=A).$$

图 1-28 和图 1-29 中给出了左极限和右极限的示意图.

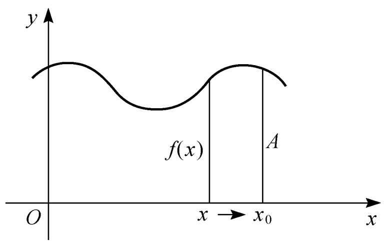

图 1-28

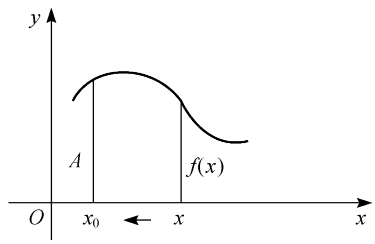

图 1-29

直接从定义 3 出发,容易证明下列定理.

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

定理 2 说明,如果函数的两个单侧极限中有一个不存在,或者两个单侧极限存在但不相等,那么函数极限就不存在. 在判断分段函数在分点处的极限是否存在时,这个定理是相当有用的.

例 6 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ x-1, & x>1,\end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

证明 由图 1-30 知

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^2+1)=2,\ \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-1)=0,$$

由定理 2 知,$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

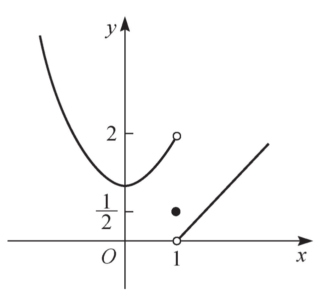

图 1-30

二、函数极限的性质

利用函数极限的定义，采用类似于证明收敛数列性质的方法，可得函数极限的一些性质. 下面仅以 $x \to x_0$ 的极限形式为代表给出这些性质，至于其他形式的极限的性质，只需做些修改即可得到.

定理 3（函数极限的唯一性） 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则其极限是唯一的.

定理 4（函数极限的局部有界性） 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \leqslant M$.

证明 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，所以对于给定的 $\varepsilon = 1$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon = 1.$$

于是

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|,$$

令 $M = 1 + |A|$，则定理 4 获得证明.

定理 5（函数极限的局部保号性） 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在常数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

证明 不妨设 $A > 0$，因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，所以对于给定的 $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}$$

成立，所以

$$f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

类似地可以证明 $A < 0$ 的情形.

推论 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

定理 6（函数极限与数列极限的关系） 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\{x_n\}$ 是函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n \neq x_0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$，则相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛，且

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x) = A.$$

证明 因 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，故对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

又因为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$，所以对上述 $\delta > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$，从而有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

习题 1.3

1. 根据函数极限的定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+6)=8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$；

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$；　　(4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2+x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

2. 当 $x\to 0$ 时，讨论下列函数极限的存在性.

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+\dfrac{1}{2}, & x>0;\end{cases}$　　(4) $f(x)=[x]$.

3. 证明：若 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

4. 根据函数极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

第四节　无穷小与无穷大

一、无穷小

对无穷小的认识问题可以远溯到古希腊. 那时，阿基米德就曾用无限小量方法得到许多重要的数学结果，但他认为无限小量方法存在着不合理的地方. 直到 1821 年，柯西在他的《分析教程》一书中才对无限小(即这里所说的无穷小)的概念给出了明确的回答. 而有关无穷小的理论就是在柯西理论的基础上发展起来的.

定义 1　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小**.

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$，数列 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

注：(1) 根据无穷小的定义，无穷小本质上是这样一个变量(函数)，在某一过程(如 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$)中，该变量的绝对值能小于任意给定的正数 ε. 无穷小不能与很小的数(如千万分之一)混淆，但零是可以作为无穷小的唯一的常数.

(2) 无穷小是相对于 x 的某个变化过程而言的. 例如，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小；当

$x \to 2$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 不是无穷小.

无穷小与函数极限有着密切的关系.

定理 1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是

$$f(x) = A + \alpha,$$

其中 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

证明 必要性. 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

令 $\alpha = f(x) - A$，则 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小，且

$$f(x) = A + \alpha.$$

充分性. 设 $f(x) = A + \alpha$，其中 A 为常数，α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小，于是

$$|f(x) - A| = |\alpha|,$$

因为 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小，故对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|\alpha| < \varepsilon,$$

即

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

从而 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

注：定理 1 对 $x \to \infty$ 等其他情形也成立(读者可自行证明).

定理 1 的结论在今后的学习中有重要的应用，尤其是在理论推导或证明中. 它将函数的极限运算问题转化为常数与无穷小的代数运算问题.

二、无穷小的运算性质

在下面讨论无穷小的性质中，仅证明 $x \to x_0$ 的情形，至于 $x \to \infty$ 等其他情形，证明完全类似.

定理 2 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

证明 这里只证明两个无穷小的和的情形，有限个无穷小的和的情形可以类似证明.

设 α 和 β 是当 $x \to x_0$ 时的两个无穷小，则对于 $\forall \varepsilon > 0$，一方面，$\exists \delta_1 > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，恒有

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2};$$

另一方面，$\exists \delta_2 > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，恒有

$$|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha + \beta) = 0$，即 $\alpha + \beta$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

注：无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小. 例如，$n \to \infty$ 时，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是无穷小，但

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个}\Big)=1,$$

即当 $n\to\infty$ 时,数列 $\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ 不是无穷小.

定理3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证明 设函数 u 在 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 内有界,则 $\exists M>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,恒有

$$|u|\leqslant M.$$

再设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小,则对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_2>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,恒有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

所以当 $x\to x_0$ 时,$u\cdot\alpha$ 为无穷小.

推论1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

三、无穷大

若当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大(即大于预先给定的任意正数),则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大.下面给出精确的定义.

定义2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义),若对于任意给定的正数 M(不论它多么大),总存在正数 δ(或正数 X)使得满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)的一切 x 所对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷大**,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty(或\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty).$$

注:按通常意义来说,当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大的函数 $f(x)$,其极限是不存在的.但为了方便叙述函数的这一性态,也说"函数的极限是无穷大".

若在无穷大的定义中,把 $|f(x)|>M$ 换为 $f(x)>M$(或 $f(x)<-M$),则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**正无穷大**(或**负无穷大**),记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=+\infty(或\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=-\infty).$$

注:无穷大一定是无界变量.反之,无界变量不一定是无穷大.

四、无穷小与无穷大的关系

定理4 在自变量的同一变化过程中,无穷大的倒数为无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证明 设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon},$$

即

$$\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon,$$

所以当 $x \to x_0$ 时，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之，设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，且 $f(x) \neq 0$，则对于 $\forall M > 0$，取 $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{M},$$

由于当 $0 < | x - x_0 | < \delta$ 时 $f(x) \neq 0$，从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M,$$

所以当 $x \to x_0$ 时，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

类似地可证明 $x \to \infty$ 时的情形.

根据定理 4，可将无穷大的讨论归结为关于无穷小的讨论. 这说明：事物在一定条件下可相互转化，“祸兮福所倚，福兮祸所伏”.

习题 1.4

1. 根据无穷小的定义证明.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$； (2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x + 4} = 0$.

2. 根据无穷大的定义证明.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + 3x}{x} = \infty$； (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = \infty$；

(3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x - 3} = \infty$.

3. 求下列极限并说明理由.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 1}{2x}$； (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

4. 函数 $y = x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是否有界?这个函数是否为 $x \to \infty$ 时的无穷大?为什么?

5. 证明：函数 $y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1]$上无界，但这个函数不是 $x \to 0^+$ 时的无穷大.

第五节　极限的运算法则

本节要建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则. 在下面的讨论中,没有表明自变量变化过程的记号"lim"是指对 $x \to x_0$ 和 $x \to \infty$ 均成立. 但在论证时,只证明了 $x \to x_0$ 的情形.

定理 1(极限的四则运算法则)　设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} (B \neq 0)$.

证明　因为 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,所以由第四节定理 1 得

$$f(x) = A + \alpha, g(x) = B + \beta,$$

其中 α 和 β 是无穷小.

(1) 由于

$$f(x) \pm g(x) = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta),$$

而 $\alpha \pm \beta$ 是无穷小,故由第四节定理 1 得

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

(2) 由于

$$f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + \alpha B + A\beta + \alpha\beta,$$

又由无穷小的运算性质知,$\alpha B + A\beta + \alpha\beta$ 是无穷小,故由第四节定理 1 知

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$$

(3) 设 $\gamma = \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{A}{B}$,则

$$\gamma = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B + \beta)} = \frac{1}{B(B + \beta)} \cdot (B\alpha - A\beta),$$

由无穷小的运算性质知,$B\alpha - A\beta$ 是无穷小.

又因 β 是无穷小,于是存在 x_0 的某个去心邻域$\mathring{U}(x_0)$,当 $x \in \mathring{U}(x_0)$ 时,$|\beta| < \dfrac{|B|}{2}$. 所以

$$|B + \beta| \geqslant |B| - |\beta| > \frac{|B|}{2},$$

故 $\left|\dfrac{1}{B(B + \beta)}\right| < \dfrac{2}{B^2}$,由此证明了$\dfrac{1}{B(B + \beta)}$ 在$\mathring{U}(x_0)$ 内有界.

因此由第四节定理 3 知,γ 是无穷小. 而

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} + \gamma,$$

所以由第四节定理 1 得

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} (B \neq 0).$$

注: 法则(1) 和(2) 均可推广到有限个函数的情形. 若 $\lim f_1(x), \lim f_2(x), \cdots, \lim f_n(x)$

都存在，则有

$$\lim[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]=\lim f_1(x)\pm\lim f_2(x)\pm\cdots\pm\lim f_n(x),$$

$$\lim[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x)]=\lim f_1(x)\cdot\lim f_2(x)\cdot\cdots\cdot\lim f_n(x).$$

推论 1 若 $\lim f(x)$ 存在，而 C 为常数，则

$$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x),$$

即常数因子可以移到极限符号外面.

推论 2 若 $\lim f(x)$ 存在，而 n 是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

注：极限的四则运算法则要求参与运算的各个函数的极限均存在，且法则(3)还必须满足分母的极限不为零；否则，不能直接使用法则.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+3}$.

解 由于分母的极限不为零，故

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to2}(x^2-5x+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to2}x^2-\lim\limits_{x\to2}1}{\lim\limits_{x\to2}x^2-5\lim\limits_{x\to2}x+\lim\limits_{x\to2}3}$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to2}x)^2-1}{(\lim\limits_{x\to2}x)^2-5\times2+3}=\frac{2^2-1}{2^2-10+3}=-1.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+5}{x^3-1}$.

解 由于分母的极限为零，故不能直接使用法则(3). 但因

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x+5}=0,$$

故由第四节定理 4 知

$$\lim_{x\to1}\frac{x+5}{x^3-1}=\infty.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

解 当 $x\to3$ 时，分母的极限为零，于是不能分子、分母分别取极限. 考虑到分子与分母有公因子 $x-3$，而且当 $x\to3$ 时，$x\neq3$，即 $x-3\neq0$，故可约去这个不为零的公因子. 所以

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$.

解 当 $x\to2$ 时，分子和分母的极限均为零，不能直接使用极限的四则运算法则. 此题可先对分母有理化，再求极限.

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to2}(\sqrt{x+2}+2)=4.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解　因为极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x}$和$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{1-x^2}$均不存在(无穷大)，故不能直接使用极限的四则运算法则. 可先通分再求极限.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

例 6　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x-2}{8x^3+5x^2+3}$.

解　当$x\to\infty$时，分子和分母的极限均不存在(无穷大)，故不能直接使用极限的四则运算法则. 此题先用x^3除分子和分母，然后求极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x-2}{8x^3+5x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{8+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{3}{8}.$$

例 7　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+1}{x^3+3}$.

解　先用x^3除分子和分母，然后求极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+1}{x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

例 8　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3}{x^2+5x+1}$.

解　根据例7的结果，由第四节定理4知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^2+5x+1}=\infty.$$

一般地，若$a_0\neq0$，$b_0\neq0$，m和n为非负整数，则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

定理 2(复合函数的极限运算法则)　设函数$y=f[g(x)]$是由函数$y=f(u)$与函数$u=g(x)$复合而成的，$f[g(x)]$在点x_0的某去心邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0}f(u)=A,$$

且存在$\delta_0>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时，有$g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证明略.

注：(1) 对u_0或x_0为无穷大的情形，也可得到类似的定理.

(2) 定理2表明，若函数$f(u)$和$g(x)$满足该定理的条件，则作代换$u=g(x)$，可把求$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]$化为求$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$，其中$u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

习题 1.5

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+4}{x-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+4}{x^2-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{3x}\right)\left(3-\dfrac{1}{x^3}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2+5x+4}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3+1}{x^4-x+1}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cos\dfrac{1}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

3. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,求 a,b 的值.

4. 已知 $f(x)=\dfrac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5$,当 $x\to\infty$ 时,p,q 取何值时,$f(x)$ 为无穷小?p,q 取何值时,$f(x)$ 为无穷大?

第六节　极限存在准则　两个重要极限

本节将介绍判定极限存在的两个准则,并讨论两个重要极限.

一、极限存在准则

1. 夹逼准则

定理 1(数列极限夹逼准则)　如果数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足下列条件.

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

那么数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明　因 $y_n\to a$,$z_n\to a$,故对于 $\forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数 N_1 与 N_2,当 $n>N_1$ 时恒有 $|y_n-a|<\varepsilon$,当 $n>N_2$ 时,恒有$|z_n-a|<\varepsilon$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,有

$$|y_n-a|<\varepsilon,|z_n-a|<\varepsilon,$$

即

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon,a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon,$$

从而,当 $n>N$ 时,恒有

$$a-\varepsilon<y_n\leqslant x_n\leqslant z_n<a+\varepsilon,$$

即 $|x_n-a|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

注: 利用定理1求极限,关键是构造出极限相同且易求的两个数列 $\{y_n\}$ 与 $\{z_n\}$.

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

解 记 $x_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}$,显然有

$$\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1},$$

即

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+1)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2},$$

故由定理1知,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

上述关于数列极限的存在准则可以推广到函数极限的情形.

定理2(函数极限夹逼准则) 如果

(1) 当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>M$) 时,有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$.

那么,极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$ 存在,且等于 A.

定理1和定理2称为**夹逼准则**.

2. 单调有界准则

定义 若数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是**单调增加**的;若数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是**单调减少**的.单调增加和单调减少的数列统称为**单调数列**.

定理3(单调有界准则) 单调有界数列必有极限.

设数列 $\{x_n\}$ 单调增加,且 $|x_n|\leqslant M$.从图1-31可以看出,因为数列单调增加又不能大于 M,故该数列某项以后的所有项必然集中在某数 $a(a\leqslant M)$ 的附近,即对 $\forall\varepsilon>0$,必然 $\exists$正整

数 N 与数 a，使当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$，从而数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

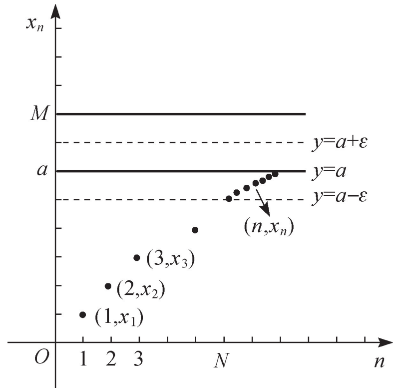

图 1-31

在本章第二节中曾证明：收敛的数列必定有界. 但也指出有界的数列不一定收敛. 而定理 3 表明，若一数列不仅有界，而且单调，则该数列一定收敛. 值得注意的是，定理 3 中给出的单调有界的条件是数列收敛的充分条件，而不是必要条件.

例 2 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{2}$，$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ $(n = 2,3,4,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 $x_2 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1 > 0$，归纳假设 $x_k > x_{k-1} > 0$，则有

$$x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} > \sqrt{2+x_{k-1}} = x_k > 0,$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的正数列.

下面证明数列 $\{x_n\}$ 有上界. 因为 $0 < x_1 = \sqrt{2} < 2$，归纳假设 $0 < x_k < 2$，则有

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2,$$

因此数列 $\{x_n\}$ 有上界. 由定理 3 知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，由收敛数列的保号性知，$a > 0$. 因 $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$，故

$$x_n^2 = 2 + x_{n-1},$$

两边同时求当 $n\to\infty$ 时的极限，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1} = a$，故

$$a^2 = 2 + a,$$

解得 $a = 2$ 或 -1，舍去负值，得 $a = 2$，所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

二、两个重要极限

数学中常常会对一些重要且有典型意义的问题进行研究并加以总结，以期通过对该问题的解决带动一类相关问题的解决，下面介绍的重要极限就体现了这样的一种思路，利用它们并通过函数的恒等变形与极限的运算法则就可以使得两类常用极限的计算问题得到解决.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

证明 在图 1-32 所示的单位圆中，设 $\angle AOB = x$，先假设 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，点 A 处的切线与

OB 的延长线相交于 D,又 $BC \perp OA$,故

$$\sin x = BC, x = \overset{\frown}{AB}, \tan x = AD.$$

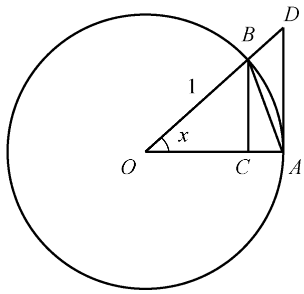

图 1-32

易见,三角形 AOB 的面积 $<$ 扇形 AOB 的面积 $<$ 三角形 AOD 的面积,所以

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$\sin x < x < \tan x,$$

不等式两边同时除以 $\sin x$,整理得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

因为 $\cos x, \frac{\sin x}{x}, 1$ 都是偶函数,所以上面的不等式在 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时也成立. 再由 $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ 及定理 2,即得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

该极限的一般形式为

$$\lim_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1,$$

其中 $\square$ 代表自变量的某个函数,且在自变量的变化过程中是无穷小.

例 3 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2x}\right) = \frac{2}{3} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3}$.

例 4 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$.

例 5 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

证明 先考虑 x 取正整数 n 而趋于 $+\infty$ 的情形.

设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,按牛顿二项公式,有

$$
\begin{aligned}
x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\\
&\quad\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\
&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\\
&\quad\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

同样的,

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\\
&\quad\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\\
&\quad\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

比较 x_n 与 x_{n+1} 的展开式的各项可知,除前两项相等外,从第三项起,x_{n+1} 的各项都大于 x_n 的对应项,而且 x_{n+1} 还多了最后一个正项,因而 $x_{n+1}>x_n$,即$\{x_n\}$为单调增加数列. 因为

$$
\begin{aligned}
x_n&<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,
\end{aligned}
$$

故$\{x_n\}$有上界. 根据定理 3,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,常用字母 e 表示该极限值,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

下面考虑 x 取任意正实数而趋于 $+\infty$ 的情形.

对于任何正实数 x,总可找到正整数 n,使得 $n\leqslant x<n+1$,当 $x\to+\infty$ 时,有$n\to\infty$,因为

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n},$$

所以,有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e},$$

所以,由定理 1 得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

对于 $x\to-\infty$ 的情形,令 $x=-(t+1)$,当 $x\to-\infty$ 时,$t\to+\infty$,则

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=\mathrm{e}.$$

综上所述,可得第二个重要极限:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

该极限的一般形式是

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e},$$

其中 □ 代表自变量的某个函数,在自变量的变化过程中是无穷大.

注: 利用复合函数的极限运算法则,若令 $y=\frac{1}{x}$,则第二个重要极限变为

$$\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e},$$

其更一般的形式是

$$\lim_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e},$$

其中 □ 代表自变量的某个函数,在自变量的变化过程中是无穷小.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}.$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$

*三、柯西极限存在准则

下面叙述的柯西极限存在准则给出了数列收敛的充要条件.

定理 4(柯西极限存在准则) 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是:对于任意给定的正数 ε,存在正整数 N,使得当 $m>N$,$n>N$ 时,恒有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

证明 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对于 $\forall\varepsilon>0$,由数列极限的定义,$\exists$ 正整数 N,当 $n>N$ 时,有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

同样，当 $m > N$ 时，也有

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，当 $m > N, n > N$ 时，有

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leqslant |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性. 证明略.

柯西极限存在准则又称为**柯西审敛原理**，其几何意义是：对于任意给定的正数 ε，在数轴上一切具有足够大的下标的点 x_n 中，任意两点间的距离小于 ε.

习题 1.6

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 2x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n\tan\dfrac{x}{3^n}\right)$；　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\dfrac{\pi}{2}-x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2}$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2x}+1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{3x}$.

3. 利用极限存在准则证明.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)^n = 0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{1}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n+n}\right) = 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1$.

第七节　无穷小的比较

一、无穷小阶的定义

根据无穷小的运算性质，两个无穷小的和、差、积仍是无穷小，但两个无穷小的商却会出现不同情况. 例如，当 $x \to 0$ 时，$x, x^2, \sin x$ 都是无穷小，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty,\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

从中可看出各无穷小趋于0的快慢程度：x^2 比 x 快些，$\sin x$ 与 x 大致相同. 即无穷小之比的极限不同，反映了无穷小趋于0的快慢程度不同. 下面给出无穷小阶的定义.

定义　设 α, β 是自变量在同一变化过程中的两个无穷小，且 $\alpha \neq 0$.

(1) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记为 $\beta=o(\alpha)$.

(2) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α **低阶的无穷小**.

(3) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$，则称 β 与 α 是**同阶无穷小**. 特别地，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是**等价无穷小**，记为 $\alpha \sim \beta$.

(4) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k}=c(c\neq 0, k>0)$，则称 β 是 α **的 k 阶无穷小**.

例如，就前述三个无穷小 $x, x^2, \sin x(x\to 0)$ 而言，x^2 是比 x 高阶的无穷小，x 是比 x^2 低阶的无穷小，而 $\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

二、等价无穷小

根据等价无穷小的定义，可以证明当 $x \to 0$ 时，有下列常用等价无穷小关系.

$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \ln(1+x)\sim x,$

$e^x-1\sim x, a^x-1\sim x\ln a, \sqrt[n]{1+x}-1\sim \frac{1}{n}x.$

注：当 $x\to 0$ 时，x 为无穷小. 在常用等价无穷小中，用任意一个无穷小 $f(x)$ 代替 x 后，上述等价关系依然成立. 例如，$x\to 0$ 时，有 $\sin x^3 \sim x^3, e^{-x^2}-1\sim -x^2, \ln(1+4x)\sim 4x$，等等.

定理 1　设 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 是自变量在同一变化过程中的无穷小，且 $\alpha\sim\alpha', \beta\sim\beta', \lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证明　$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$

定理1表明，在求两个无穷小之比的极限时，分子和分母都可以用等价无穷小代换. 因

此，若无穷小的代换运用得当，则可简化极限的计算.

定理 2 α 与 β 是等价无穷小的充要条件是

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

证明 必要性. 设 $\alpha\sim\beta$，则

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=0,$$

因此，$\beta-\alpha=o(\alpha)$，即 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

充分性. 设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left[1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right]=1,$$

因此，$\alpha\sim\beta$.

例如，当 $x\to0$ 时，等价无穷小关系 $\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ 可表述为

$$\sin x=x+o(x),\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x).$$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\tan 5x}$.

解 由于当 $x\to0$ 时，$\sin 7x\sim7x$，$\tan 5x\sim5x$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{7x}{5x}=\frac{7}{5}.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x^3+3x}$.

解 当 $x\to0$ 时，$\sin 2x\sim2x$，$x^3+3x\sim3x$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x^3+3x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

应用等价无穷代换的原则是：乘除可用，加减慎用. 也就是说，求两个无穷小相乘或相除的极限时，可以分别用它们的等价无穷小代换；但是，当出现两个无穷小相加或相减时，若分别用它们的等价无穷小代换来求极限，就有可能导致错误的结论，因此应慎用. 请看下面的例子.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

错误解法 当 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

正确解法 因为 $\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$，而当 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[n]{x}-1)}{(x-1)^{n-1}}$.

解 设 $x=1+t$,则

$$\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[n]{x}-1)}{(x-1)^{n-1}}=\lim_{t\to0}\frac{(\sqrt{1+t}-1)(\sqrt[3]{1+t}-1)\cdots(\sqrt[n]{1+t}-1)}{t^{n-1}},$$

由于当 $t\to0$ 时,$\sqrt{1+t}-1\sim\frac{t}{2}$,$\sqrt[3]{1+t}-1\sim\frac{t}{3}$,…,$\sqrt[n]{1+t}-1\sim\frac{t}{n}$,所以

$$\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[n]{x}-1)}{(x-1)^{n-1}}=\lim_{t\to0}\frac{(\sqrt{1+t}-1)(\sqrt[3]{1+t}-1)\cdots(\sqrt[n]{1+t}-1)}{t^{n-1}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{t}{n}}{t^{n-1}}=\frac{1}{n!}.$$

习题 1.7

1. 当 $x\to0$(或 $x\to0^+$)时,下列无穷小与 x 相比较,哪些是高阶无穷小?哪些是低阶无穷小?哪些是同阶无穷小?哪些是等价无穷小?

(1) $\sin x^2$; (2) x^3+x;

(3) $\sqrt[3]{x}$; (4) $1-\cos x$;

(5) $\arctan x$; (6) $x+\sin x$.

2. 利用等价无穷小代换,求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 5x}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{\arctan x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 2x}$; (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^x-1)\sin x}{1-\cos x}$; (6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

第八节 函数的连续与间断

前面学习了极限,通过极限理论进一步考察函数的变化关系. 可以发现,在自然界中有许多现象,如植物的生长、气温的变化、河水的流动等都是连续变化的. 就植物的生长来看,当时间变化很微小时,植物的变化也是很微小的,这种现象在函数关系上的反映就是函数的连续性. 本节主要讨论函数连续的概念和间断的概念及其分类.

一、函数的连续性

为描述函数的连续性,先引入增量的概念.

定义 1 设变量 u 从它的一个初值 u_1 变到终值 u_2,则称终值 u_2 与初值 u_1 的差 u_2-u_1 为变量 u 的**增量(改变量)**,记为 Δu,即

$$\Delta u=u_2-u_1.$$

注:记号 Δu 不是 Δ 与 u 的积,而是一个不可分割的记号,且增量 Δu 可以是正的,也可以是负的.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx(即 x 在这个邻域内从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$),相应地,函数 $y=f(x)$ 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$,因此函数 $y=f(x)$ 的对应增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

这个关系式的几何解释如图 1-33 所示.

例如,函数 $y=x^2$,当 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时,函数 y 的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

借助增量的概念,再引入函数连续的概念.

设函数 $y=x^2$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 从几何直观上理解,x 在 x_0 处取得微小增量 Δx 时,函数 y 的对应增量 Δy 也很微小,且 Δx 趋于零时,Δy 也趋于零,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的. 相反,若 Δx 趋于零时,Δy 不趋于零,则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是不连续的(见图 1-34).

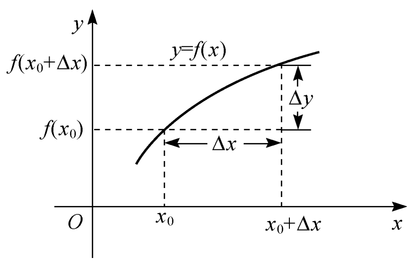

图 1-33

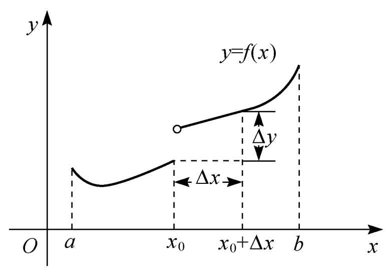

图 1-34

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 若当自变量在点 x_0 处的增量 Δx 趋于零时,函数 $y=f(x)$ 的对应增量 Δy 也趋于零,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**,x_0 称为 $f(x)$ 的**连续点**.

例如,函数 $y=x^2$ 在点 $x_0=2$ 处是连续的,因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[(2+\Delta x)^2-2^2]=\lim_{\Delta x\to 0}[4\Delta x+(\Delta x)^2]=0,$$

在定义 2 中,若令 $x=x_0+\Delta x$,即 $\Delta x=x-x_0$,则当 $\Delta x\to 0$ 时,也就是当 $x\to x_0$ 时,有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0).$$

因而,函数在点 x_0 处连续的定义又可叙述如下.

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在,且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

用 ε-δ 语言表述函数连续的定义如下.

$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

注: 上面三个关于函数连续的定义是等价的，它们表明，函数在一点连续的本质特征是：当自变量变化很小时，对应的函数值的变化也很小.

由函数的左、右极限的定义，相应地可以得到函数左连续和右连续的定义.

定义 4 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$），则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**左（或右）连续.**

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

例 1 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 2\cos(x-1), & x < 1, \\ 3 - x^2, & x \geqslant 1, \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处的连续性.

解 因为

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2\cos(x-1) = 2,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - x^2) = 2,$$

所以

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1),$$

因此，函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在**区间 (a,b) 上连续**，或称 $f(x)$ 是**区间 (a,b) 上的连续函数**；若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在**闭区间 $[a,b]$ 上连续**，此时也称 $f(x)$ 是**闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数.**

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例 2 证明函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

证明 任取 $x \in (-\infty, +\infty)$，当 x 有增量 Δx 时，y 的增量

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

于是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left[2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\Delta x \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = 0.$$

所以，$y = \sin x$ 对于任一 $x \in (-\infty, +\infty)$ 是连续的.

可以类似地证明 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也是连续的.

二、函数的间断点

定义 5 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，且 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**间断**，称点 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点.**

由定义 3 知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的条件如下.

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果其中任何一条不满足,即函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一,那么点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

(3) 在点 x_0 处 $f(x)$ 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

定义 6 设点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点,但左极限和右极限都存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**;若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在,则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

第一类间断点分为两类.

(1) 当 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 时,x_0 称为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$ 或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义,则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**可去间断点**.

例如,$x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x>0,\\ -x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的跳跃间断点,因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-x-1)=-1,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x+1)=1,$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$,即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在. 又如,函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,故 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点. 因为若补充定义,令 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则函数在点 $x=0$ 处连续.

第二类间断点也分为两类.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,则称 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**.

(2) 若 $x\to x_0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 振荡性不存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的**振荡间断点**.

例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,所以 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的无穷间断点. 又如,函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义,且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在,所以 $x=0$ 是 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点;又因为当 $x\to 0$ 时,函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 -1 和 1 之间做无限次振荡(见图 1-35),故 $x=0$ 是 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点.

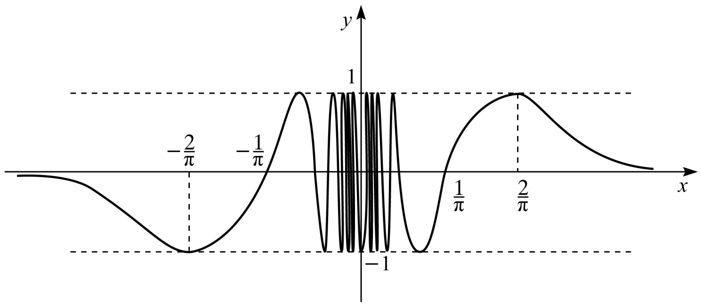

图 1-35

例 3 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点,并判断其类型.

解 由于 $\lim\limits_{x\to0^-}(1+e^{\frac{1}{x}})=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}(1+e^{\frac{1}{x}})=\infty$,所以

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=1,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=0,$$

故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 4 求函数 $f(x)=\dfrac{x-x^2}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点,并判断其类型.

解 函数的间断点有 $x=0,1,-1$. 由于

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x(1-x)}{-x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(1-x)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{x+1}=-1,$$

所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

又

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x(1-x)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2},$$

故 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点.

而

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x(1-x)}{-x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}=\infty,$$

所以 $x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的无穷间断点.

习题 1.8

1. 证明函数 $y=\cos x$ 在其定义域内是连续的.
2. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性.

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0;\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x}, & x>0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$

3. 指出下列函数的间断点及其类型.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; (2) $y=\dfrac{1+x}{2-x^2}$;

(3) $y=\dfrac{|x|}{x}$; (4) $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

(5) $y=\dfrac{x}{\tan x}$.

4. 证明:若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续且 $f(x_0)\neq 0$,则存在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$,使得当 $x\in U(x_0)$ 时,$f(x)\neq 0$.

第九节 连续函数的运算与性质

本节将以极限为基础,介绍连续函数的运算及连续函数的一些性质.

一、连续函数的四则运算

定理 1 若函数 $f(x)$,$g(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x_0)\neq 0$ 时)也在点 x_0 处连续.

证明 只证 $f(x)\pm g(x)$ 在点 x_0 处连续,其他情形可类似地证明.

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处连续,所以

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\ \lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0),$$

故有

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\pm g(x_0),$$

所以 $f(x)\pm g(x)$ 在点 x_0 处连续.

例如,$\sin x$,$\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,故

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\ \sec x=\frac{1}{\cos x},\ \csc x=\frac{1}{\sin x}$$

在其定义域内连续.

二、反函数与复合函数的连续性

定理 2 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续,则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

证明略.

例如,由于 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续,所以它的反函数 $y=\arcsin x$ 在对应区间 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续的. 同理可得其他反三角函数的连

续性. 总之,反三角函数在其定义域内都是连续的.

定理 3 若$\lim\limits_{x \to x_0}\varphi(x) = a$,$u = \varphi(x)$,函数 $f(u)$ 在点 a 处连续,则有

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim_{x \to x_0}\varphi(x)]. \qquad ①$$

证明 因 $f(u)$ 在 $u = a$ 处连续,故对于 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \eta > 0$,使得当 $|u - a| < \eta$ 时,恒有

$$|f(u) - f(a)| < \varepsilon,$$

又因$\lim\limits_{x \to x_0}\varphi(x) = a$,对上述 η,$\exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|\varphi(x) - a| = |u - a| < \eta.$$

综上所述,对于 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|f(u) - f(a)| = |f[\varphi(x)] - f(a)| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim_{x \to x_0}\varphi(x)].$$

式 ① 可写成

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0}\varphi(x)], \qquad ②$$

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to a} f(u). \qquad ③$$

式 ② 表明,在定理 3 的条件下,求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的极限时,极限符号与函数符号 f 可以交换次序. 式 ③ 表明,在定理 3 的条件下,若作代换 $u = \varphi(x)$,则求$\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)]$就转化为求$\lim\limits_{u \to a} f(u)$,这里$\lim\limits_{x \to x_0}\varphi(x) = a$.

注:把定理 3 中的 $x \to x_0$ 换成 $x \to \infty$,可得类似的定理.

例 1 求$\lim\limits_{x \to 0}\cos\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0}\cos\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} &= \cos\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\ &= \cos\lim_{x \to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} \\ &= \cos\lim_{x \to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \cos 0 = 1.\end{aligned}$$

例 2 求$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{a^x - 1}{x}$.

解 令 $a^x - 1 = t$,则 $x = \log_a(1+t)$. 当 $x \to 0$ 时,$t \to 0$,于是

$$\lim_{x \to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t \to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\lim\limits_{t \to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a \lim\limits_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a \mathrm{e}} = \ln a.$$

若在定理 3 的条件下,假定 $\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,即

$$\lim_{x \to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0),$$

则可得到下列结论.

定理 4 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,且 $\varphi(x_0) = u_0$,而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续,则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处也连续.

例如，函数 $u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续，函数 $y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，所以 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续.

三、初等函数的连续性

定理 5 基本初等函数在其定义域内是连续的.

因初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所构成的，故得到下列重要结论.

定理 6 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

注：定义区间是指包含在定义域内的区间. 初等函数仅在其定义区间内连续，在其定义域内不一定连续. 例如，函数 $y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$ 的定义域为 $\{0\}\cup[1,+\infty)$，函数在点 $x=0$ 的邻域内没有定义，因而函数 y 在 $x=0$ 处不连续，但函数在定义区间 $[1,+\infty)$ 上连续.

定理 6 的结论非常重要，因为微积分的研究对象主要是连续或分段连续的函数，而一般应用中所遇到的函数基本上是初等函数，其连续性的条件总是满足的，从而使微积分具有强大的生命力和广阔的应用前景. 此外，根据定理 6 求初等函数在其定义区间内某点的极限，只需求初等函数在该点的函数值，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\,(x_0\in\text{定义区间}).$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to1}\sin(\ln x)$.

解 因为 $x=1$ 是函数 $y=\sin(\ln x)$ 的连续点，所以

$$\lim_{x\to1}\sin(\ln x)=\sin(\ln 1)=0.$$

四、闭区间上连续函数的性质

下面介绍闭区间上连续函数的几个基本性质，由于它们的证明涉及严密的实数理论，故略去其严格证明，但可以借助几何直观地来理解.

先说明最大值和最小值的概念. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果存在 $x_0\in I$，使得对于任一 $x\in I$ 都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\,(f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**（**最小值**）.

例如，函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上有最大值 0 和最小值 -1，函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有最大值 1 和最小值 -1.

定理 7（最值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

定理 7 表明，若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi_1\in[a,b]$，使 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值；又至少存在一点 $\xi_2\in[a,b]$，使 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值（见图 1-36）.

注：当定理 7 中的"闭区间上连续"的条件不满足时，定理的结论可能不成立. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x<1,\\ 2, & x=0,1\end{cases}$$

在闭区间$[0,1]$上有间断点 $x=0, x=1$. 该函数在闭区间$[0,1]$上既无最大值又无最小值(见图 1-37).

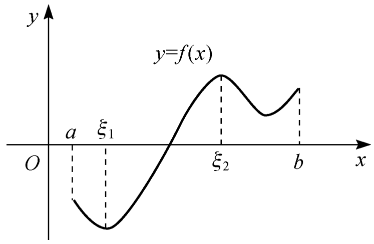

图 1-36

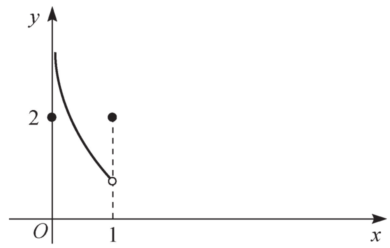

图 1-37

由定理 7 易得到下面的结论.

定理 8(有界性定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

例 4　证明:若函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,则 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上必有界.

证明　设$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 若取 $\varepsilon=1$,则 $\exists X>0$,当$|x|>X$ 时,总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=1,$$

即$|f(x)|<1+|A|$.

另一方面,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,所以在闭区间$[-X,X]$上连续,因此当$|x|\leqslant X$时,$f(x)$ 在$[-X,X]$上一定有界,即存在 $M_0>0$,使

$$|f(x)|\leqslant M_0.$$

若取 $M=\max\{M_0,1+|A|\}$,则对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,均有$|f(x)|\leqslant M$,即 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

如果 $f(x_0)=0$,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**零点**.

定理 9(零点定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号($f(a)\cdot f(b)<0$),则在开区间(a,b)内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点,即至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$,使 $f(\xi)=0$.

零点定理的几何意义:若连续曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$的端点处的函数值异号,则曲线与 x 轴至少有一个交点,如图 1-38 所示.

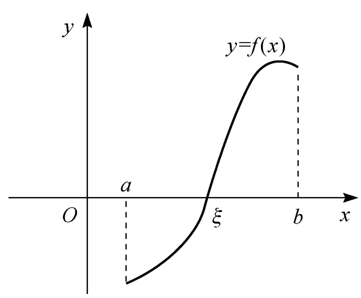

图 1-38

例 5　证明方程 $x^5-7x+3=0$ 在区间$(0,1)$上至少有一个实根.

证明　令 $f(x)=x^5-7x+3$,则 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,又

$$f(0)=3>0, f(1)=-3<0,$$

由零点定理知，在区间$(0,1)$内至少存在一点ξ，使

$$f(\xi)=0,$$

即$\xi^5-7\xi+3=0$. 因此方程$x^5-7x+3=0$在区间$(0,1)$上至少有一个实根.

定理 10（介值定理） 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在该区间的端点处有不同的函数值$f(a)=A$和$f(b)=B$，那么，对于A与B之间的任意一个数C，在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C$.

介值定理的几何意义：对介于$f(a)$与$f(b)$之间的任何一个数C，直线$y=C$与连续曲线$y=f(x)$至少有一个交点，如图 1-39 所示.

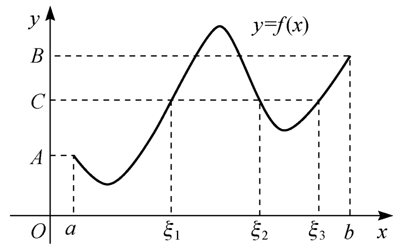

图 1-39

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M与最小值m之间的任何值.

例 6 设函数$f(x)$在(a,b)上连续，任取$x_1, x_2\in(a,b)$且$x_1<x_2$，证明在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

证明 由于$[x_1,x_2]\subset(a,b)$，所以$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，由闭区间连续函数的最值定理知，$f(x)$在$[x_1,x_2]$上有最大值M和最小值m，则对$\forall x\in[x_1,x_2]$，有$m\leqslant f(x)\leqslant M$，因此

$$m\leqslant f(x_1)\leqslant M, m\leqslant f(x_2)\leqslant M,$$

从而

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant M,$$

利用介值定理的推论得至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

习题 1.9

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2-2x+5}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to2}\arctan\sqrt{2x-3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\ln\frac{\sin x}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ a+x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ a 为何值时,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续?

3. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0, \\ 3x^2-2x+k, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 其中 k 为常数,当 k 为何值时,函数 $f(x)$ 在其定义域内连续?

4. 证明.

(1) $x^5-3x=1$ 在$(1,2)$ 内至少有一个根;

(2) $2^x=\dfrac{1}{x}$ 至少有一个小于 1 的正根;

(3) $x^5-2x^2+x+1=0$ 在$(-1,1)$ 内至少有一个根;

(4) $x^2\cos x-\sin x=0$ 在$\left(\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$内至少有一个根.

本章小结

微课:
函数、极限与连续习题课

一、基本内容

(1) 函数的定义域和对应法则是确定函数的两要素. 定义域的确定要依具体问题而定,正确求定义域的关键是熟悉基本初等函数的定义域.

正确理解函数记号 $f(x)$,特别是着重理解复合函数 $f[\varphi(x)]$ 和分段函数,只有这样才能正确进行函数的复合运算和求函数值. 对于复合函数,不仅会将若干个简单的函数复合成一个函数,还要会把一个复合函数分解成几个简单的函数.

初等函数是高等数学主要的研究对象. 这种函数具有很好的分析性质(如连续性、可导性、可积性等),能熟练地将初等函数分解为基本初等函数,对以后的学习是重要的. 当然,对基本初等函数的定义和主要性质也要熟知.

(2) 要理解极限的概念. 理解极限概念要注意以下两点:①ε 是任意的,“任意” 两字不可少,只有这样,$|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达 x_n 与 a 无限接近的意思. ②N(或 δ) 与 ε 有关,它随 ε 的给定而选定. 对给定的 ε,相应的 N(或 δ) 也不是唯一的. 在用极限定义证明数列或函数极限时,一般采用“倒推法”,即从结论 $|x_n-a|<\varepsilon$ 出发,求出 N(或 δ). 由于 N(或 δ) 的不唯一性,有时可用放大不等式的方法.

(3) 理解无穷小与无穷大的概念,特别是无穷小的概念. 理解无穷小比较(高阶、低阶、同阶、等价等) 的概念,特别是等价无穷小在极限运算中的重要作用. 常用的等价无穷小有:当 $x \to 0$ 时,$\sin x \sim x$,$\tan x \sim x$,$\arcsin x \sim x$,$\arctan x \sim x$,$e^x-1 \sim x$,$\ln(1+x) \sim x$,$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$.

(4) 本章的重要方法是极限运算. 在求极限问题中,较困难的是不能直接使用极限运算

法则的情况，此时可采用约简分式、有理化、等价无穷小代换、化为重要极限等方法来处理. 在学完导数后，还有一种求极限的方法——洛必达法则.

(5) 本章讲了两个极限存在准则，它们有一个重要的作用就是可以推出两个重要极限，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$. 这两个重要极限在极限运算及导数的一些基本公式推导中，都有很重要的作用.

(6) 对于较复杂的求极限问题，往往要使用多种方法才能完成. 现将极限运算方法总结如下.

① 利用极限的四则运算法则.

② 利用无穷小与无穷大的关系.

③ 通过有理化分子或分母的方法.

④ 利用性质“有界函数与无穷小的乘积是无穷小”.

⑤ 利用等价无穷小代换.

⑥ 利用两个重要极限.

⑦ 利用极限存在准则.

⑧ 分别考虑左、右极限，看它们是否存在且相等.

(7) 理解函数连续的概念，要注意定义中包括了三个条件：函数在该点有定义、有极限及极限值等于函数值. 三个条件有一个不满足即为间断.

(8) 基本初等函数在其定义域内都是连续的，而初等函数在其定义区间内是连续的. 求函数间断点的方法：对于初等函数，只要找出无定义的点，这样的点必是间断点，然后再通过考察其极限来判断间断点的类型；对于分段函数，在每一段上可以利用初等函数连续性的结论考虑，而在分段点处则必须用连续的定义验证. 由于在分点的左、右处函数有不同的表达式，因此要分别考虑左、右极限.

(9) 了解闭区间连续函数的性质. 零点定理可用于证明方程有根等，最值定理与介值定理经常与其他定理结合证明一些结论.

二、重点

(1) 函数的概念，复合函数的概念及分解，基本初等函数的性质和图形.

(2) 函数极限运算法则，两个重要极限，用等价无穷小代换计算极限.

(3) 函数连续性的概念.

三、难点

极限的“ε-N”及“ε-δ”定义的理解.

第一章 复习题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\leqslant 1,\\ x, & x>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

2. 设 $f(0)=0$,当 $x\neq 0$ 时,$af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$,其中 a,b,c 为常数,且 $|a|\neq|b|$. 证明:$f(x)$ 为奇函数.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x-3, & x\leqslant 1,\\ f[f(x-5)], & x>1,\end{cases}$ 求 $f(5)$.

4. 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\infty$,则(　　).

A. 对任意 n 有 $a_n<b_n$　　B. 对任意 n 有 $b_n<c_n$

C. 数列 $\{a_nc_n\}$ 发散　　D. 数列 $\{b_nc_n\}$ 发散

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$,其中 a,c 不全为零,则必有(　　).

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$

C. $a=-4c$　　D. $a=4c$

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

7. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,判别其类型.

8. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

9. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)$.

10. 确定 a,b 的值,使当 $x\to 0$ 时,$a-\cos bx+\sin^3 x$ 与 x^3 等价.

11. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=A(A\neq 0)$,试确定常数 a,b,使 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 与 ax^b 等价.

12. 设 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x^2-1)}$,求 $f(x)$ 的间断点并分类.

13. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,求 $f(x)$ 的间断点并分类.

14. 设 $f(x)=\dfrac{1}{a+|a|\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. 试确定 a,b 的正负号,并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的值.

15. 设 $f(x)$ 是一个连续函数,其定义域和值域都是 $[a,b]$. 求证:存在 $\xi\in[a,b]$,使 $f(\xi)=\xi$.

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$c,d\in(a,b)$,$t_1>0$,$t_2>0$. 证明:在 $[a,b]$ 内必存在点 ξ 使 $t_1f(c)+t_2f(d)=(t_1+t_2)f(\xi)$.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$. 证明：对自然数 $n \geqslant 2$，必有 $\xi \in (0,1)$ 使 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

数学家简介

刘徽(约 225—约 295，见图 1-40)，山东滨州邹平市人，魏晋时期伟大的数学家，中国古典数学理论的奠基人之一，在中国数学史上做出了极大的贡献. 他的著作《九章算术注》和《海岛算经》，是中国宝贵的数学遗产. 他是利用极限思想解决实际问题的典范，他的“割圆术”开启了圆周率研究的新纪元.

图 1-40