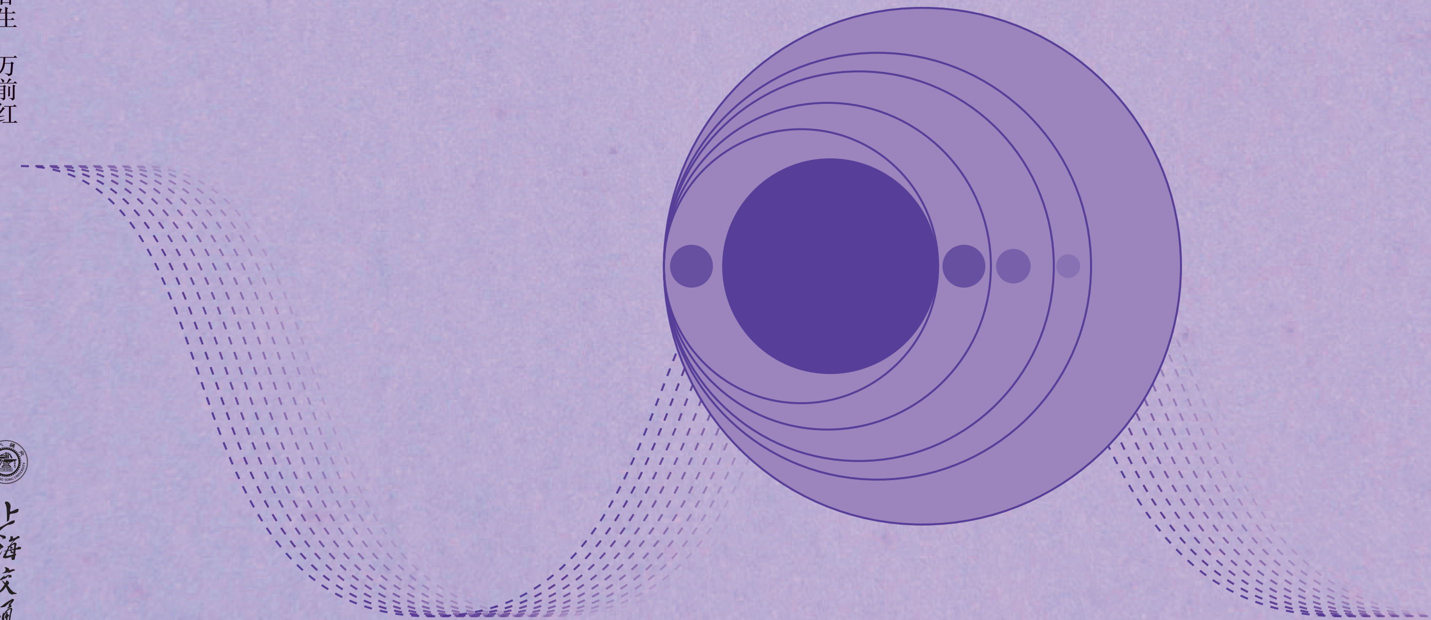
线性代数

主编 谢小良 刘春生 万前红



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

线性代数

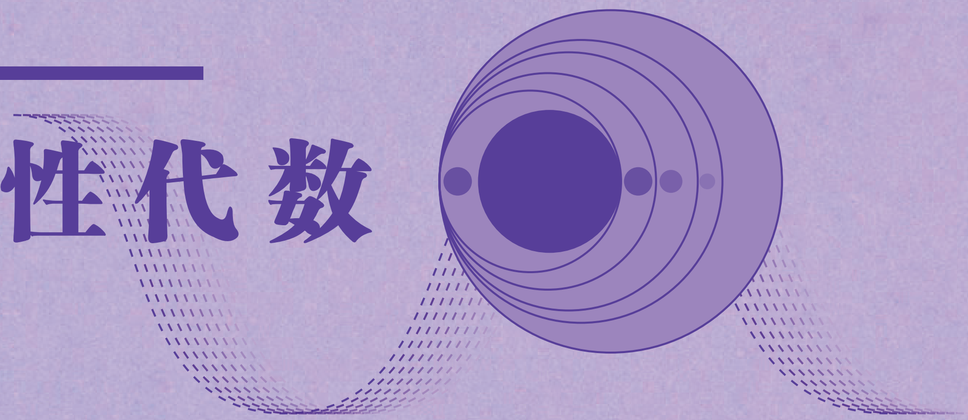
主编 谢小良 刘春生 万前红

上海交通大学出版社

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑 金颖杰
责任编辑 胡思佳 柳卫清
封面设计 刘文东

线性代数



扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-29194-3
9 787313 291943 >
定价：39.90元

线性代数

主编　谢小良　刘春生　万前红

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

线性代数是高等院校相关专业的一门重要基础课.本书共 7 章,主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换、线性代数的 MATLAB 计算.

本书既可作为高等院校线性代数课程的教材,也可作为自学者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/谢小良,刘春生,万前红主编. —上海:上海交通大学出版社,2023.8(2025.7 重印)

ISBN 978-7-313-29194-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①谢… ②刘… ③万… Ⅲ.①线性代数 Ⅳ.①O151.2

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 148184 号

线性代数
XIANXING DAISHU

主　　编:谢小良　刘春生　万前红
出版发行:上海交通大学出版社　　地　　址:上海市番禺路 951 号
邮政编码:200030　　电　　话:021-64071208
印　　制:大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司　　经　　销:全国新华书店
开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16　　印　　张:13
字　　数:269 千字
版　　次:2023 年 8 月第 1 版　　印　　次:2025 年 7 月第 3 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-313-29194-3
定　　价:39.90 元

编审委员会

主　审　杨　刚

主　编　谢小良　刘春生　万前红

副主编　王敬童　刘建刚　曾甲生　施会强

张　路　胡桔州　罗智明

前言

线性代数是一个主要处理线性关系问题的代数学分支,它特有的理论体系、严格的推理论证及抽象的思维方法,使其具有其他课程无法取代的地位.它除了被深入地应用于理论研究,在其他方面的应用也非常广泛.特别是随着计算机技术的飞速发展和广泛应用,许多实际问题可以离散化、线性化,并通过数值计算得到定量解决.于是,可用于处理离散问题和线性问题的线性代数,便进一步显示出其特殊重要的地位.

线性代数是高等院校相关专业的一门重要基础课.线性代数课程不仅可以培养学生的逻辑推理能力、抽象思维能力、空间直观和想象能力、数学建模能力,也可以培养学生对研究对象进行有序化、代数化、可解化的处理能力.正如数学大师笛卡尔在其名著《思维的法则》中指出的:“一切问题都可以化为数学问题,一切数学问题都可以化为代数问题,而一切代数问题又都可以化为方程.”线性代数所体现的几何观念与代数方法之间的联系,从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合,对于强化学生的数学训练,培养学生的能力具有重要的作用.

本书共 7 章,主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换、线性代数的 MATLAB 计算.带星号(*)的部分为教学选讲内容.

本书是在 2008 年谢小良等人编写的教案基础上,由湖南工商大学理学院高等数学教研室组织有多年教学经验的教师反复修订而成的.本书由谢小良、刘春生、万前红任主编,王敬童、刘建刚、曾甲生、施会强、张路、胡桔州、罗智明任副主编,具体编写分工如下:第一章由张路、罗智明编写,第二章由万前红和刘春生编写,第三章由施会强编写,第四章由曾甲生编写,第五章由刘建刚编写,第六章由王敬童编写,第七章由胡桔州编写.全书由刘春生负责统稿,由谢小良、罗智明、杨刚、王敬童、万前红负责审核,由杨刚主审.

由于编者水平有限,书中存在的疏漏和不足之处,敬请广大读者批评指正.

湖南工商大学理学院 高等数学教研室

目录

第一章

行　列　式

行列式是线性代数最基本的内容，其理论是从解线性方程组中建立和发展起来的. 它不仅在线性代数和数学的其他分支中有广泛的应用，而且在其他学科中也经常被用到.

第一节　二阶与三阶行列式

本节分别从二元和三元线性方程组的求解问题引出二阶行列式和三阶行列式的定义.

一、二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

其中，x_1,x_2 为未知量；$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为系数；b_1,b_2 为常数. 采用消元法进行处理，可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1-1)有唯一解，为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-2}$$

但这个求解公式并不容易记，为了便于记忆和计算，我们引入二阶行列式的概念.

定义 1　用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称之为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

行列式中的数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为行列式的**元素**. 每个元素都带两个下标，第一个下标表示元素所在的行数，称为**行标**；第二个下标表示元素所在的列数，称为**列标**.

在行列式中，从左上角元素到右下角元素的连线称为**主对角线**，从右上角元素到左下角元素的连线称为**副对角线**. 二阶行列式等于主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积，可用**对角线法则**(见图 1-1)来记忆.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1

根据二阶行列式的定义，式(1-2)中的分母是方程组(1-1)的系数按原位置排成的二阶行列式，称为方程组(1-1)的**系数行列式**，常用字母 D 表示，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

而式(1-2)中的两个分子可分别写成

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

其中，$D_i(i=1,2)$是将系数行列式 D 中的第 i 列元素 a_{1i}，a_{2i}对应地换成方程组的常数项b_1，b_2 后得到的行列式.

所以，当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组(1-1)有唯一解，为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1 解二元线性方程组$\begin{cases} 3x_1-4x_2=2, \\ x_1+2x_2=4. \end{cases}$

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\times 2-(-4)\times 1=10\neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 且

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=20,D_2=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=10,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{20}{10}=2,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{10}{10}=1.$$

例 2 已知二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} \lambda^3 & \lambda \\ 4\lambda & 1 \end{vmatrix}$，问：

(1)当 λ 为何值时，$D=0$； (2)当 λ 为何值时，$D\neq 0$.

解 因为 $D=\begin{vmatrix} \lambda^3 & \lambda \\ 4\lambda & 1 \end{vmatrix}=\lambda^3-4\lambda^2=\lambda^2(\lambda-4)$，所以

(1)当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=4$ 时，$D=0$；

(2)当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 4$ 时，$D\neq 0$.

二、三阶行列式

三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-4}$$

与二元线性方程组类似，可利用消元法来求解.

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$ 时，可得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}. \end{cases}$$

为了便于记忆这个解，我们引入三阶行列式的概念.

定义 2 用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 来表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称之为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1-5}$$

三阶行列式表示的代数和也可以按**对角线法则**(见图 1-2)来记忆.

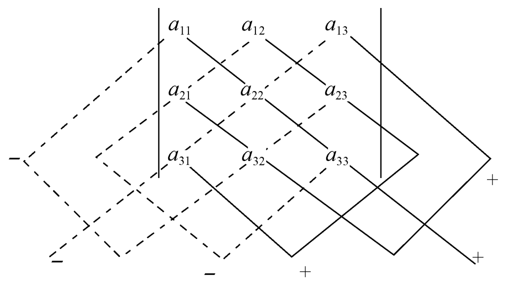


图 1-2

所以，当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组(1-4)有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中，

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 3 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则，有

$$D=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+4\times2\times4-4\times2\times(-3)-2\times2\times(-2)-1\times1\times4=50.$$

例 4 解三元线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=2,\\x_1+x_2+4x_3=0,\\3x_1-7x_2+5x_3=-1.\end{cases}$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&1&4\\3&-7&5\end{vmatrix}=10-12+7+3+5+56=69\neq0,$$

所以，方程组有唯一解，且

$$D_1=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\0&1&4\\-1&-7&5\end{vmatrix}=69,D_2=\begin{vmatrix}2&2&-1\\1&0&4\\3&-1&5\end{vmatrix}=23,D_3=\begin{vmatrix}2&-1&2\\1&1&0\\3&-7&-1\end{vmatrix}=-23.$$

故

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{69}{69}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{23}{69}=\frac{1}{3},x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-23}{69}=-\frac{1}{3}.$$

第二节 排列、逆序数与对换

对角线法则可用来计算二阶和三阶行列式，但对于四阶及更高阶的行列式却不适用. 为了计算更高阶的行列式，本节引入排列和逆序数的概念.

一、排列与逆序数

定义 1 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n **级排列**.

例如，1234 和 2431 都是 4 级排列；25134 是一个 5 级排列；由 1，2，3 这 3 个数组成的 3 级排列分别为 123，132，213，231，312，321，共有 $3!=6$ 个.

n 级排列中，数字由小到大的排列 $123\cdots n$ 称为 n 级**自然排列或标准排列**.

定义 2 在一个排列中，如果两个数（称为数对）的前后位置和大小顺序相反，即排在前面的数大于排在后面的数，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数一般记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

定义 3 逆序数是偶数的排列称为**偶排列**，逆序数是奇数的排列称为**奇排列**.

例 1 计算下列各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性.

(1)25134；　　(2)$n(n-1)\cdots21$.

解 (1)2 排在首位，没有比它大的数排在它前面，逆序个数为 0；

5 的前面没有比它大的数，逆序个数为 0；

1 的前面有 2 个比它大的数，逆序个数为 2；

3 的前面有 1 个比它大的数，逆序个数为 1；

4 的前面有 1 个比它大的数,逆序个数为 1.

因此,$\tau(25134)=0+0+2+1+1=4$,故排列 25134 是偶排列.

(2)同理可得

$$\tau[n(n-1)\cdots 21]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

故所给排列在 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时为偶排列,在 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时为奇排列.

二、对换

定义 4 把一个排列中某两个数 i 与 j 的位置互换,其余的数位置不变,这种对排列的变换称为**对换**,记为(i,j). 将相邻两数对换,称为**相邻对换**.

例如,将排列 25134 中的 2 与 1 对换,得到新的排列 15234. 容易计算,$\tau(25134)=4$,$\tau(15234)=3$. 由此可见,偶排列 25134 经过 2 与 1 的对换后,变成了奇排列 15234.

定理 任意一个排列经过一次对换后,其奇偶性改变.

证 分两种情况考虑.

(1)相邻对换. 设排列为 $AijB$(其中 A,B 表示除 i,j 两个数以外其余的数),经过对换(i,j),变成新排列 $AjiB$. 比较这两个排列中的逆序,显然 A,B 中数的次序没有改变,并且 i,j 与 A,B 中数的次序也没有改变,仅仅改变了 i 与 j 的次序,因此新排列仅比原排列增加了一个逆序(当 $i<j$ 时)或减少了一个逆序(当 $i>j$ 时),所以它们的奇偶性改变.

(2)不相邻对换. 设原排列为 $Aik_1k_2\cdots k_sjB$,经过对换(i,j),变成新排列 $Ajk_1k_2\cdots k_siB$. 在原排列中将数 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 做 $s+1$ 次相邻对换,变成 $Ak_1k_2\cdots k_sjiB$;再将 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 做 s 次相邻对换得到新排列,即新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到. 由(1)的结论可知它改变了奇数次奇偶性,所以它与原排列的奇偶性改变.

微课:排列

推论 1 n 级排列$(n\geqslant 2)$共有 $n!$ 个,其中奇偶排列各占一半.

推论 2 任一 n 级排列可经过有限次对换变成自然排列,并且所做对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

第三节 n 阶行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

可以发现:

(1)二阶行列式是 $2!$ 项的代数和,三阶行列式是 $3!$ 项的代数和.

(2)二阶行列式中的每一项都是来自不同的行和不同的列的 2 个元素的乘积,三阶行列式中的每一项都是来自不同的行和不同的列的 3 个元素的乘积.

(3)每一项的符号可以这样确定:当这一项中元素的行标按自然顺序排列时,如果对应的列标构成的排列是偶排列就取正号,是奇排列则取负号.

因此,二阶和三阶行列式可以分别表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

根据这些规律,可给出 n 阶行列式的定义.

定义 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

称为 ***n* 阶行列式**. 它等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积项的代数和. 各项的符号可以这样确定:当这一项中各元素的行标按自然顺序排列时,如果对应的列标 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 构成的排列是偶排列就取正号,是奇排列则取负号.

因此,n 阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \tag{1-7}$$

其中,$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

n 阶行列式一般用 D 或 D_n 表示,也可简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$. 当 $n=1$ 时称为一阶行列式,规定一阶行列式 $|a|$ 的值等于 a.

由行列式的定义不难得出:**如果一个行列式中有一行(或一列)的元素全为零,则此行列式必为零.**

例 1 在四阶行列式中,$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$应取什么符号?

解 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$各元素的行标都是按自然顺序排列的,而列标的排列为 4312,其逆序数为 $\tau(4312)=5$,即 4312 为奇排列,故这一项应取负号.

例 2 用行列式的定义计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 由行列式的定义有

$$D=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

此例 D 中有很多元素为零，我们知道行列式的一般项 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 只有当所有元素全都不为零时才能不为零，现在就考察有哪些项不为零. 一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第 1 行，但第 1 行只有 a_{12} 不为零，故取 $j_1=2$；一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第 2 行，第 2 行中的 a_{21} 和 a_{22} 不为零，因第一个元素 a_{12} 已取自第 2 列，故第二个元素只能取 a_{21}，从而 $j_2=1$；这样推下去，可得 $j_3=3,j_4=4$. 因此

$$D=(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-1)^1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4=-24.$$

例 3 设 D 为**下三角行列式**（主对角线上侧的元素全为零），证明

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由行列式的定义有

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第 1 行，但第 1 行只有 a_{11} 不为零，故取 $j_1=1$；一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第 2 行，第 2 行中的 a_{21} 和 a_{22} 不为零，因第一个元素 a_{11} 已取自第一列，故第二个元素只能取 a_{22}，从而 $j_2=2$；这样推下去，可得 $j_3=3,j_4=4,\cdots,j_n=n$. 所以

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即下三角行列式的值等于主对角线上各元素的乘积.

类似地，可以得到以下结论.

(1)**上三角行列式**：$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

(2)**对角行列式**：$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

(3)**副上三角行列式**：$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$

(4)**副下三角行列式**：$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

(5)**副对角行列式**：$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

在式(1-7)中,为了确定 n 阶行列式中每一项的符号,其中各元素的行标是按自然顺序排列的,即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 而数的乘法是满足交换律的,交换其中元素的位置并不会改变该项的值,因此 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可以写成

$$a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}.$$

其中,$p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 是交换元素后行标和列标分别构成的 n 级排列,其符号可由下面的定理来确定.

定理 n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}.$$

其中,$p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 均为 n 级排列.

证 一般项中任意两元素互换,行标与列标同时对换. 由第二节的定理可知,n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 同时改变奇偶性,$\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)$的奇偶性不变. 如果将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换为自然顺序 $12\cdots n$(逆序数为 0),排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 也相应对换为 $j_1j_2\cdots j_n$,则有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n} = (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

根据上述定理,n 阶行列式的定义可写为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}. \tag{1-8}$$

特别地,如果将行列式中各项的列标按自然顺序排列(相当于取定 $q_1q_2\cdots q_n=12\cdots n$),而相应行标排列为 $i_1i_2\cdots i_n$,则 n 阶行列式的定义还可写为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1-9}$$

例 4 若$(-1)^{\tau(i432j)+\tau(52k14)}a_{i5}a_{42}a_{3k}a_{21}a_{j4}$是五阶行列式$|a_{ij}|$的一项,那么 i,j,k 应为何值?此时该项的符号是什么?

解 由行列式的定义知,每一项中的元素要取自不同的行、不同的列,故有 $k=3$,并且有 $i=1$ 时 $j=5$,或 $i=5$ 时 $j=1$.

当 $i=1,j=5,k=3$ 时，$\tau(14325)+\tau(52314)=9$，故该项前面的符号为负号，所以 $-a_{15}a_{42}a_{33}a_{21}a_{54}$ 为 $|a_{ij}|$ 的一项.

当 $i=5,j=1,k=3$ 时，$\tau(54321)+\tau(52314)=16$，故该项前面的符号为正号，所以 $a_{55}a_{42}a_{33}a_{21}a_{14}$ 为 $|a_{ij}|$ 的一项.

第四节 行列式的性质

用定义来计算 n 阶行列式的值，当行列式中零元素较多时比较容易；但是当零元素较少且 n 较大时比较困难. 为了简化行列式的计算，可以利用行列式的性质.

定义 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如，$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

性质 1 将行列式转置，行列式的值不变，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证 记 D 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

它的元素在 D 中位于不同的行、不同的列，因而在 D^{T} 中位于不同的列、不同的行. 所以这 n 个元素的乘积在 D^{T} 中应该为 $a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}$，由第三节的定理可知其符号也为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

因此，D 与 D^{T} 是具有相同项的行列式，所以 $D^{\mathrm{T}}=D$.

由性质 1 可知：**行列式中对行成立的性质，对列也成立.**

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变成相反数.

证 下面只证互换两列的情形. 如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 p,q 两列，得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 与 D_1 按式(1-9)计算，对于 D 中任一项

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_nn},$$

在 D_1 中必有对应的一项

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_nn}.$$

（当 $j\neq p,q$ 时，第 j 列元素取 a_{ij}，第 p 列元素取 a_{i_qq}，第 q 列元素取 a_{i_pp}）

而排列 $i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$ 与排列 $i_1\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n$ 只经过一次对换，故奇偶性相反，因此

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n)}=-(-1)^{\tau(i_1\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n)}.$$

又因

$$a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_nn}=a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_nn},$$

故对 D 中任一项，D_1 中必有一项与它符号相反而绝对值相等，所以

$$D=-D_1.$$

推论 如果行列式中有两行(列)完全相等，则行列式的值为零.

证 由性质 2 可知，将行列式中相同的两行(列)进行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于以数 k 乘以此行列式，即如果设 $D=|a_{ij}|$，则有

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

证 根据行列式的定义，可得

$$D_1=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=kD.$$

推论 1 如果行列式中某行(列)的所有元素都有公因子，则公因子可以提到行列式外面.

推论 2 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例，则行列式的值等于零.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 行列式中第 1 列和第 2 列的对应元素成比例，故由性质 3 的推论 2 可得

$$D=0.$$

性质 4 如果行列式中某一行(列)的每一个元素都是两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同,即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=D_1+D_2$. 其中,

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 根据行列式的定义可得

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= D_1+D_2. \end{aligned}$$

性质 5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1-10}$$

这个性质对行列式来说非常重要,在简化行列式的计算中起着关键的作用.

在计算行列式时,为了便于检查运算的正确性,一般尽量注明每一步运算的依据. 本书中,约定采用如下记号:

(1)用 r_i(或 c_i)表示行列式的第 i 行(或列);

(2)用 $r_i \leftrightarrow r_j$(或 $c_i \leftrightarrow c_j$)表示交换行列式 i,j 两行(或列);

(3)用 kr_i(或 kc_i)表示用数 k 乘以第 i 行(或列);

(4)用 r_j+kr_i(或 c_j+kc_i)表示把第 i 行(或列)的元素乘以 k 倍加到第 j 行(或列)对应的元素上.

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 通过观察可以发现,行列式的第 2 行为第 1 行和第 3 行之和,故由性质 5 和性质 2 的推论可得

$$D\xlongequal{r_3+r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

例 3 计算行列式

$$(1)D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};\qquad (2)D_2=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 297 & 101 & 99 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 $(1)D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3+r_1}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+r_2}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4.$$

$$(2)D_2=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 300-3 & 100+1 & 100-1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 300 & 100 & 100 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=0+\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 15 & -9 & 6 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-5r_1]{r_2+r_1}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{r_3+7r_2}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2.$$

例 4 计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

解 $$D\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3-2r_2}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-3r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

例 5 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

解 方法一:注意到行列式 D 的主对角线上的元素全是 a,其余元素全是 b. 因为行列式每一行的元素之和是相同的,所以可将第 2,3,…,n 列的元素都加到第 1 列上,这样第 1 列的元素就全为 $a+(n-1)b$. 因此

$$D\xlongequal[(j=2,3,\cdots,n)]{c_1+c_j}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

方法二：$D \xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$（爪型行列式）

$$\xlongequal[(j=2,3,\cdots,n)]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$

微课：行列式的性质

第五节　行列式的计算

计算行列式时通过降阶将高阶行列式用低阶行列式来表示可以简化计算.降阶的一个基本方法就是采用行列式的按行(列)展开定理,为此本节先引入余子式和代数余子式的概念.

定义　在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来位置构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记为 M_{ij}.在 M_{ij} 的前面加上符号 $(-1)^{i+j}$,称为 a_{ij} 的**代数余子式**,记为 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

由定义可知,M_{ij} 或 A_{ij} 与原行列式中的元素 a_{ij} 无关,只与它的位置有关.

例如,三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

中，a_{12}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2&4\\3&1\end{vmatrix}=-10, A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&4\\3&1\end{vmatrix}=10,$$

而 a_{23}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2, A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2.$$

引理 在 n 阶行列式 D 中，如果第 i 行元素除 a_{ij} 外全部为 0，那么该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

证 (1)先证 $i=n, j=n$ 的情形，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1})}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nn}$$

$$=a_{nn}\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1})}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}$$

$$=a_{nn}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n-1}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n-1}\end{vmatrix}=a_{nn}M_{nn}=a_{nn}(-1)^{n+n}M_{nn}=a_{nn}A_{nn}.$$

(2)对一般情形，只要适当交换 D 的行与列的位置就可化为情形(1)，因此结论成立.

定理 行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素与其对应代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1-11}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).\tag{1-12}$$

证 $$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}+0+\cdots+0&0+a_{i2}+\cdots+0&\cdots&0+\cdots+0+a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a_{i2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

这个定理叫作**行列式的按行(列)展开定理**. 运用此定理可以进行行列式的降阶运算. 特别是行列式中某一行或某一列中有较多的零元素时,该定理会使计算变得简单.

例 1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

解 将 D 按第 1 行展开,有

$$\begin{aligned} D &= 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\times1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 4\times2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\times3+4\times2\times5=46. \end{aligned}$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解 将 D_n 按第一列展开,有

$$\begin{aligned} D_n &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1} \\ &= x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + \\ &\quad y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix} \\ &= x^n+(-1)^{n+1}y^n. \end{aligned}$$

推论 行列式 D 中某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

证 将行列式 D 按第 j 行展开,有

$$D=a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}.$$

当 $i\neq j$ 时,因为 A_{jk} 与行列式中第 j 行的元素无关,将上式中的 a_{jk} 换成 $a_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$,可得

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

同理可证

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

综合本节定理及其推论,可得如下结论:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j \end{cases} \tag{1-13}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \tag{1-14}$$

由推论的证明还可看出,在 n 阶行列式 D 按第 i 行展开的式子

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

中,用 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替 D 中第 i 行的对应元素,可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}. \tag{1-15}$$

类似地,用 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替 D 中第 j 列的对应元素,可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}. \tag{1-16}$$

例 3 已知四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

求:(1)$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$ 的值;　(2)$3M_{11}-M_{12}+8M_{13}-M_{14}$ 的值.

解 (1)由式(1-16)可知

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=1\times A_{13}+1\times A_{23}+1\times A_{33}+1\times A_{43}.$$

等于用 1,1,1,1 代替 D 中第 3 列对应元素所得的行列式,故

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

(2)因为

$$3M_{11}-M_{12}+8M_{13}-M_{14}=3A_{11}+A_{12}+8A_{13}+A_{14},$$

由式(1-15)可知,它等于用 3,1,8,1 代替 D 中第 1 行对应元素所得的行列式,故

$$3M_{11}-M_{12}+8M_{13}-M_{14}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 2 行展开}}(-1)\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -5 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 2 列展开}}-(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=38.$$

注意：本题也可直接计算 $A_{i3}(i=1,2,3,4)$ 和 $M_{1j}(j=1,2,3,4)$ 的值，然后相加减.

例 4 证明范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\quad(n\geqslant 2).$$

其中连乘积

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})$$

是满足条件 $1\leqslant j<i\leqslant n$ 的所有因子 (x_i-x_j) 的乘积.

证 用数学归纳法证明. 当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j).$$

命题成立.

假设命题对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，下面证明命题对 n 阶范德蒙德行列式也成立.

在 D_n 中，依次将第 i 行乘 $-x_1$ 加到第 $i+1$ 行 $(i=n-1,n-2,\cdots,1)$，可得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}.$$

再按第 1 列展开，并提出每列的公因子 (x_i-x_1)，得

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

此时右端是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式. 根据归纳假设，它等于所有 $(x_i-x_j)(2\leqslant j<i\leqslant n)$ 因子的乘积，所以

$$\begin{aligned} D_n &=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) \\ &=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j). \end{aligned}$$

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}.$$

解 当 $x=0$ 或 $y=0$ 时,显然 $D=0$;当 $x\neq0$ 且 $y\neq0$ 时,把行列式增加一行一列得到一个加边行列式再进行计算.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}\overline{\overline{\underset{i=2,3,4,5}{r_i-r_1}}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -x & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & y & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{\underset{c_1+\frac{1}{y}c_4,\,c_1-\frac{1}{y}c_5}{c_1+\frac{1}{x}c_2,\,c_1-\frac{1}{x}c_3}}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=x^2y^2.$$

注意:此题所采用的是行列式计算中的一种升阶方法——**加边法**. 本题解法众多,也可利用行列式性质化为爪型行列式再来计算.

* **例 6** 计算 n 阶行列式(采用**递推公式法**)

$$D_n=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1\end{vmatrix}.$$

解 由行列式 D_n 可知,$D_1=|x+a_1|=x+a_1$.

将 D_n 按第 1 列展开为

$$D_n=x\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x & -1\end{vmatrix},$$

即

$$D_n=xD_{n-1}+a_n.$$

这个式子对任何 $n(n\geqslant2)$都成立,故有

$$
\begin{aligned}
D_n &= xD_{n-1}+a_n = x(xD_{n-2}+a_{n-1})+a_n \\
&= x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n \\
&= x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \\
&\ \ \vdots \\
&= x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.
\end{aligned}
$$

* **例 7** 设行列式

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\
c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix},
D_1=\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk}
\end{vmatrix},
D_2=\begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix},
$$

证明 $D=D_1D_2$.

分析:对 D_1 做行变换,就相当于对 D 的前 k 行做相同的行变换,此时 D 的后 n 行不变;对 D_2 做列变换,就相当于对 D 的后 n 列做相同的列变换,此时 D 的前 k 列不变.

证 若对 D_1 做一系列行变换可将其化为下三角形,对 D_2 做一系列列变换也可将其化为下三角形,分别记为

$$
D_1=\begin{vmatrix}
p_{11} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots \\
p_{k1} & \cdots & p_{kk}
\end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk},
D_2=\begin{vmatrix}
q_{11} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots \\
q_{n1} & \cdots & q_{nn}
\end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn},
$$

此时对 D 的前 k 行做相同的行变换,对 D 的后 n 列做相同的列变换,那么 D 可化为

$$
D=\begin{vmatrix}
p_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
p_{k1} & \cdots & p_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\
c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn}
\end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2.
$$

类似地,可证得

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kn} \\
0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk}
\end{vmatrix}\begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}=D_1D_2.
$$

随着科学计算软件的流行,行列式还可以运用 MATLAB 软件来计算,详见第七章第五节.

第六节 克莱姆法则

对于未知量个数与方程个数相等的二元和三元线性方程组，第一节介绍了利用二阶和三阶行列式求解的方法. 类似地，对于含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组，也可以利用 n 阶行列式求解.

定理 1(克莱姆法则) 对于含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1-17}$$

如果它的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么，方程组(1-17)有唯一解，且

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_j=\frac{D_j}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}. \tag{1-18}$$

其中，$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 D 中第 j 列元素用方程组右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 (1)存在性. n 元线性方程组(1-17)可简写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\cdots,n.$$

把 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$代入第 i 个方程的左端，则有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D}=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j.$$

再将 D_j 按第 j 列展开，得

$$D_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=\sum_{s=1}^{n} b_sA_{sj}.$$

所以

$$\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{s=1}^{n} b_sA_{sj}\right)=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{ij}A_{sj}b_s=\frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}\right)b_s.$$

根据第五节的定理及其推论可知

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}=\begin{cases}D, & i=s,\\ 0, & i\neq s,\end{cases}$$

故

$$\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j=\frac{1}{D}(0\cdot b_1+\cdots+D\cdot b_i+\cdots+0\cdot b_n)=b_i.$$

这说明式(1-18)是方程组(1-17)的一个解.

(2)唯一性. 用 D 中第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 依次乘方程组(1-17)的 n 个方程,可得

$$\begin{cases}a_{11}A_{1j}x_1+a_{12}A_{1j}x_2+\cdots+a_{1n}A_{1j}x_n=b_1A_{1j},\\ a_{21}A_{2j}x_1+a_{22}A_{2j}x_2+\cdots+a_{2n}A_{2j}x_n=b_2A_{2j},\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{n1}A_{nj}x_1+a_{n2}A_{nj}x_2+\cdots+a_{nn}A_{nj}x_n=b_nA_{nj},\end{cases}$$

然后相加

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj}\right)x_n=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj},$$

于是可得

$$Dx_j=D_j\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

所以当 $D\neq0$ 时,有

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

综上所述,方程组(1-17)有唯一解.

例 1 用克莱姆法则解线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8,\\ x_1-3x_2-6x_4=9,\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5,\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0.\end{cases}$

解 因为 $D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27\neq0$,所以方程组有唯一解.

而

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27,D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27,$$

可得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,x_2=\frac{D_2}{D}=-4,x_3=\frac{D_3}{D}=-1,x_4=\frac{D_4}{D}=1.$$

如果不考虑求解公式(1-18),则克莱姆法则可直接表述如下.

定理 2 如果线性方程组(1-17)的系数行列式 $D\neq0$,则该方程组一定有解,且解唯一.

此定理的逆否命题可表述如下.

推论 如果线性方程组(1-17)无解或有两个及以上不同的解,则它的系数行列式必为零($D=0$).

特别地,当线性方程组(1-17)右边的常数项全部为零,即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{1-19}$$

时,称方程组为**齐次线性方程组**,否则称方程组为**非齐次线性方程组**.

显然,$x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$ 是齐次线性方程组(1-19)的解,称为**零解**或**平凡解**.若一组不全为零的数是齐次线性方程组(1-19)的解,则称之为**非零解**或**非平凡解**.

由定理 2 可以得出以下结论.

定理 3 如果齐次线性方程组(1-19)的系数行列式 $D\neq0$,则该方程组仅有零解(没有非零解);反之,如果该方程组有非零解,则其系数行列式 $D=0$.

以后还可以证明,如果 $D=0$,则齐次线性方程组(1-19)有非零解.

推论 齐次线性方程组(1-19)有非零解的充要条件是系数行列式 $D=0$.

例 2 已知

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=0\end{cases}\quad(\lambda\text{ 为参数}).$$

问:(1)当 λ 为何值时方程组有非零解? (2)当 λ 为何值时方程组仅有零解?

解 方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\lambda^2,$$

故由定理 3 的推论有:

(1)当 $\lambda=-3$ 或 $\lambda=0$ 时,该方程组有非零解;

(2)当 $\lambda\neq-3$ 且 $\lambda\neq0$ 时,该方程组仅有零解.

第一章 复习题

(A)

1. 计算下列二阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & d \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}$.

3. 求下列各排列的逆序数.

(1)41352; (2)34178256;

(3)$2n(2n-1)\cdots321$; (4)$24\cdots(2n)13\cdots(2n-1)$.

4. 选择 k,l,使 $a_{13}a_{24}a_{3k}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式 $|a_{ij}|(i,j=1,2,\cdots,5)$ 的展开式中前面符号为负号的项.

5. 写出四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的项.

6. 求函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

7. 用行列式的定义计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

8. 用行列式的性质计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} ab & -ac & -ae \\ -bd & cd & -de \\ -bf & -cf & -ef \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$.

9. 已知 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=5$，求 $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & a_1+c_1 & a_1+2b_1 \\ b_2+c_2 & a_2+c_2 & a_2+2b_2 \\ b_3+c_3 & a_3+c_3 & a_3+2b_3 \end{vmatrix}$.

10. 证明下列各式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$;

(3) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\ (a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$;

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n$.

11. 计算下列 n 阶行列式.

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$; (2) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$;

(3) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$；　　(4) $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

12. 已知四阶行列式 D_4 的第 2 列元素为 $-2,3,1,2$，且它们对应的余子式分别为 $4,-1,2,-2$，求行列式 D_4 的值.

13. 已知四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

求：

(1) $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$ 的值；

(2) $4A_{41}+3A_{42}+2A_{43}+A_{44}$ 的值；

(3) $4M_{41}+3M_{42}+M_{44}$ 的值.

14. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

15. 求方程 $f(x)=0$ 的根，其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}.$$

16. 用克莱姆法则解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5, \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2, \\ x_2+2x_3+3x_4=3. \end{cases}$

17. λ 为何值时，方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ \lambda x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解?

18. λ 为何值时,齐次方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$$

有非零解?

(B)

1. 若一个 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上的元素为零,则这个行列式的值等于________.

2. 若 $\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -1\\ 1 & \lambda-5 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$,则 $\lambda=$____________.

3. 行列式 $\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=(\quad)$.

A. -1　　　　B. 0

C. 1　　　　D. 2

4. 四阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}$ 的值等于(　　).

A. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　　　B. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$

C. $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　　　D. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

5. 行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=(\quad)$.

A. $(ad-bc)^2$　　　　B. $-(ad-bc)^2$

C. $a^2d^2-b^2c^2$　　　　D. $b^2c^2-a^2d^2$

6. 行列式 $\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\4&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}=$____________.

7. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$,则第 4 行各元素的余子式之和为____________.

8. 记行列式 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为（　　）.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

9. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

10. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为________.