SHUXUE

数学

基础模块

上册

ISBN 978-7-5608-7590-3
9 787560 875903 >
定价：29.80元

中等职业教育课程改革创新教材

数学 基础模块（上册）

主编 杜君捷 薛振

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

X-A

中等职业教育课程改革创新教材

中等职业教育文化课系列教材

数学

基础模块

上册

主编 杜君捷 薛 振

支持移动端学习，拓展学习维度

优质二维码资源，有机融入教材

配备星级资料包，支持立体教学

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

中等职业教育课程改革创新教材
中等职业教育文化课系列教材

数　学

基础模块

上册

主　编　杜君捷　薛　振
副主编　王　红

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS
·上海·

内 容 提 要

本书主要内容包括集合、不等式、函数、指数函数与对数函数、三角函数. 知识点的讲解由易到难、由浅入深，遵循学生的认知规律；同时全书在相应的知识点处适当地设置了“做一做”“想一想”“议一议”等形式多样的栏目. 本书可供中等职业学校各专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学. 基础模块. 上册 / 杜君捷，薛振主编. --上海：同济大学出版社，2018.2(2025.7 重印)

ISBN 978-7-5608-7590-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①杜… ②薛… Ⅲ. ①数学课-中等专业学校-教材 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 318447 号

数学. 基础模块. 上册

杜君捷 薛 振 **主编**

责任编辑 边丽新 朱振华 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 刘文东

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 三河市龙大印装有限公司

开 本 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张 11

字 数 182 000

版 次 2018 年 2 月第 1 版

印 次 2025 年 7 月第 6 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-7590-3

定 价 29.80 元

前言 PREFACE

本套教材是根据教育部颁布的《中等职业学校数学教学大纲》(以下简称《教学大纲》)规定的课程教学目标和教学内容,紧密结合中等职业学校的教学实际和学生实际而编写的,旨在帮助学生掌握必要的数学基础知识,培养计算技能、计算工具使用技能和数据处理技能,培养观察能力、空间想象能力、分析与解决问题能力和数学思维能力,为学习专业知识、掌握职业技能、继续学习和终身发展奠定基础.

《数学:基础模块》是《教学大纲》中规定的学生必修的基础性内容.本套教材内容的选取严格按照《教学大纲》规定的"教学内容与要求",遵循《教学大纲》对认知要求和技能与能力要求的规定.

本套教材的编写特色主要体现在以下几个方面:

1. 突出基础性,着眼于中职数学教学的实际

教材的编写遵循学生认知的发展规律,在保证科学性的基础上降低知识的起点,由已知到未知,由浅入深,由具体到抽象。教材的编写从学生的实际状况出发,既做到了与九年义务教育阶段的衔接,又兼顾了与专业课程的衔接.

2. 体现时代特征,突出数学与现代信息技术的结合

随着现代信息技术的不断更新发展,数学的教学手段和方法也在不断更新。本教材的编写不但落实了《教学大纲》对计算器使用的要求,还落实了《教学大纲》对计算机软件的使用要求,旨在培养学生的计算能力和数据处理能力,提升学生对数学的理解;同时,本教材利用软件的强大功能,为教师教学提供更直观、高效的教学手段.

3. 注重学生的参与，紧密结合学生生活中的实际问题

教材在编写过程中最大可能地将课堂变成师生共同活动的场所，强调学生的参与。因此，本教材在知识讲解的过程中不但设计了“做一做”“议一议”“想一想”等栏目，而且从生活实际问题入手引出数学概念，利用数学知识解决生活中的实际问题，让学生的思维活跃起来，激发他们的学习兴趣，提升其数学知识的应用能力.

本教材是“基础模块”的上册，各单元学时分配可以参考下表：

单元内容	学时数
第 1 单元　集合	10
第 2 单元　不等式	8
第 3 单元　函数	12
第 4 单元　指数函数与对数函数	12
第 5 单元　三角函数	18

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏之处，敬请广大读者提出宝贵的意见和建议，以便我们今后修订完善。

编　者

目录 CONTENTS

第 1 单元　集合

第 2 单元　不等式

第 3 单元　函数

第 4 单元　指数函数与对数函数

第 5 单元　三角函数

第1单元　集　　合

引　例

在某个城市中有一名理发师,他的广告词是这样写的:“本人的理发技艺十分高超,誉满全城.我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸,我也只给这些人刮脸.我对各位表示热诚欢迎!”来找他刮脸的人络绎不绝,自然都是那些不给自己刮脸的人.可是,有一天,这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了,他本能地抓起了剃刀,你们认为他能不能给自己刮脸呢?如果他不给自己刮脸,他就属于“不给自己刮脸的人”,他就要给自己刮脸;而如果他给自己刮脸,他又属于“给自己刮脸的人”,他就不该给自己刮脸.

1.1　集合的概念

在日常生活中,我们所看到的、听到的、触摸到的、想到的各种各样的实物或一些抽象的符号都可以视作对象,由某些指定的对象汇集在一起所组成的整体就叫作**集合**,简称

想一想

我们日常生活中的哪些事物可以汇集在一起而构成一个集合呢?

集. 例如，引例中那些不给自己刮胡子的人的全体组成集合 A，给自己刮胡子的人的全体组成集合 B. 组成集合的每个对象称为**元素**.

例如，把所有小于 10 的自然数

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

中的各个数都看成对象，所有这些对象汇集在一起就构成了一个集合，其中的每个数即为这个集合中的元素.

集合一般采用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示，它们的元素一般采用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 ***a* 属于 *A***，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 ***a* 不属于 *A***，记作 $a\notin A$.

> **议一议**
>
> $0\in\varnothing$ 吗？

一般地，我们把不含任何元素的集合叫作**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，方程 $x-2=x-3$ 的解所组成的集合即为空集，因为这个集合不含任何元素.

关于集合的概念有以下说明：

(1)集合的元素具有确定性，即作为一个集合的元素必须是确定的. 也就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素是确定的.

(2)集合的元素具有互异性，即给定一个集合，则集合的元素一定是互不相同的.

(3)集合的元素具有无序性，即集合是由一些事物组成的整体，因此不考虑这些事物的排列次序.

例 下列语句能否确定一个集合？

(1)一切很大的数；

(2)小于 5 的正奇数；

(3)方程 $x^2=4$ 的所有解；

(4)不等式 $x-5>0$ 的所有解.

解 (1)因为很大的数没有具体的标准，“一切很大的数”所指的对象是不确定的，所以不能构成集合.

(2)因为小于 5 的正奇数包括 1,3 两个数，它们是确定的对象，所以可以构成一个集合.

(3)方程 $x^2=4$ 的解为 -2 和 2，是确定的对象，所以可以

构成集合.

(4)解不等式 $x-5>0$ 可得 $x>5$，它们是确定的对象，所以可以构成集合.

根据集合所含有的元素个数可以将其分为有限集和无限集两类. 含有有限个元素的集合叫作**有限集**，含有无限个元素的集合叫作**无限集**. 例如，上述例题中的(2)所构成的集合即为有限集，(4)所构成的集合即为无限集.

在例题的(3)中，集合的元素是 -2 和 2，它们都是方程 $x^2=4$ 的解. 像这样，方程的所有解组成的集合叫作这个方程的解集；同样，在例题的(4)中，由不等式的所有解组成的集合叫作这个不等式的解集.

由数所组成的集合称作**数集**. 我们用某些特定的大写英文字母表示常用的一些数集：

所有非负整数所组成的集合叫作**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$；

所有正整数所组成的集合叫作**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^*$；

所有整数组成的集合叫作**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

所有有理数组成的集合叫作**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

所有实数组成的集合叫作**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

做一做

1. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1) -3 ____ $\mathbf{N}$；　　(2) 3.14 ____ $\mathbf{Q}$；

(3) π ____ $\mathbf{Q}$；　　(4) 0.5 ____ $\mathbf{Z}$；

(5) 1.8 ____ $\mathbf{R}$；　　(6) -1 ____ $\mathbf{N}^*$.

2. 判断下列语句是否正确：

(1) 由 1，2，4，2 构成一个集合，这个集合共有 4 个元素；

(2) 方程 $x^2+1=0$ 的所有解组成的集合为空集.

习题 1.1

1. 判断下列对象是否可以组成集合：

(1)大于 10 小于 20 的偶数；

(2)所有短发的女生；

(3)你所在班级的全体班干部；

(4)26 个英文字母；

(5)与 0 接近的实数的全体；

(6)平方等于 4 的实数；

(7)方程 $x^2-5x-6=0$ 的所有解.

2. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1)$\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{N}$；　　(2)π ________ $\mathbf{Q}$；

(3)1 ________ $\{1\}$；　　(4)1 ________ $\varnothing$；

(5)0.5 ________ $\mathbf{Z}$；　　(6)0 ________ $\mathbf{Z}$.

3. 请指出下列对象的元素：

(1)方程 $x^2-4=0$ 的解集；

(2)由 1,3,5,7,9,7 构成的集合；

(3)由大于 1 并且不大于 10 的自然数组成的集合；

(4)2017 年中有 31 天的月份.

4. 自然数集、整数集、有理数集、实数集通常各用哪个符号表示？它们分别是有限集还是无限集？

1.2　集合的表示方法

如何表示一个集合呢？集合常用的表示方法有列举法和描述法两种.

1.2.1 列举法

把集合的元素一一列举出来，元素中间用逗号隔开，写在花括号"{}"中用来表示集合，这种方法即为**列举法**. 例如，由小于 5 的自然数所组成的集合可表示为

$$\{0,1,2,3,4\};$$

方程 $x^2=4$ 的所有解组成的集合可表示为

$$\{-2,2\}.$$

当集合为无限集或元素很多的有限集时，可以在花括号内只写出几个元素，其他的用省略号表示即可，但所写出的元素必须能让人明白省略号表示哪些元素. 例如，自然数集 **N** 为无限集，可表示为

$$\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

不大于 100 的全体自然数所组成的集合为有限集，可表示为

$$\{0,1,2,3,\cdots,100\}.$$

例 1　用列举法表示大于 1 小于 10 的所有偶数组成的集合.

解　大于 1 小于 10 的所有偶数有 2,4,6,8，它们所组成的集合可表示为

$$\{2,4,6,8\}.$$

例 2　用列举法表示方程 $x^2+x-6=0$ 的解集.

解　解方程 $x^2+x-6=0$ 得

$$x_1=-3,x_2=2,$$

所以该方程的解集为

$$\{-3,2\}.$$

议一议

集合 $\{\varnothing\}$ 是空集吗？0、$\varnothing$、$\{0\}$、$\{\varnothing\}$ 之间有什么区别？

注　意

用列举法表示集合时一般不必考虑元素的排列顺序，如集合 $\{1,2\}$ 与集合 $\{2,1\}$ 表示的是同一个集合.

做一做

用列举法表示下列集合：

(1)英文单词 good 中的字母组成的集合；

(2)2,1,2,3 组成的集合；

(3)不大于 8 的非负整数；

(4)方程 $x^2-6x+8=0$ 的解集.

1.2.2 描述法

有的集合用列举法表示起来很不方便，如"由大于 2 的所有实数组成的集合"，大于 2 的实数有无穷多个，显然无法用列举法将该集合的元素一一列出，此时用描述法来表示该集合比较方便.

把描述集合中元素的特征性质或表示集合中元素的规律写在花括号"{ }"内用来表示集合的方法叫作**描述法**. 例如，上述"由大于 2 的所有实数组成的集合"，可以看出该集合的元素都具有以下性质：都是实数，都大于 2. 因此，该集合可用描述法表示为

$$\{x \mid x>2, x\in \mathbf{R}\},$$

花括号内竖线左侧的 x 表示这个集合中的任意一个元素，元素 x 从实数集 $\mathbf{R}$ 中取值；竖线右侧写出的是元素的特征性质.

如果从上下文可以明显看出集合的元素为实数，则 $x\in\mathbf{R}$ 也可以省略不写，如上述的集合也可表示为

$$\{x \mid x>2\}.$$

想一想

由第一象限所有的点组成的集合怎么表示?

例 3 用描述法表示下列集合：

(1)$\{-1, 1\}$；

(2)大于 3 的全体偶数构成的集合；

(3)不等式 $x+1\geqslant 0$ 的解集.

解 (1)该集合的一个特征性质可以描述为绝对值等于 1 的实数，即

$$|x|=1,$$

所以这个集合可表示为

$$\{x \mid |x|=1\}.$$

(2)该集合的一个特征性质可描述为

$$x>3, 且\ x=2k, k\in\mathbf{N},$$

所以这个集合可以表示为

$$\{x \mid x>3, 且\ x=2k, k\in\mathbf{N}\}.$$

(3)解不等式 $x+1\geqslant 0$ 可得 $x\geqslant -1$，所以该不等式的解集为

$$\{x \mid x \geqslant -1\}.$$

用列举法表示集合可以明确地看到集合的每个元素，而用描述法表示集合可以很清晰地反映出集合元素的特征性质，因此在具体的应用中要根据实际情况灵活选用.

做一做

1. 已知集合 $A=\{3, a+2, 5\}$，则由 a 的取值组成的集合可表示为________.

2. 用描述法表示下列集合：

(1)小于 100 的所有自然数组成的集合；

(2)$\{1,3,5,7,9\}$；

(3)绝对值小于 6 的所有实数组成的集合；

(4)不等式 $x-8 \geqslant 0$ 的解集.

习题 1.2

1. 用列举法表示下列集合：

(1)大于 0 小于 6 的整数的全体；

(2)方程 $3x-1=0$ 的解集；

(3)自然数中 3 的倍数的集合；

(4)方程 $x^2+x-2=0$ 的解集.

2. 用描述法表示下列集合：

(1)自然数中所有偶数的集合；

(2)不等式 $5x+3<0$ 的解集.

3. 用适当的方法表示下列集合：

(1)所有正方形组成的集合；

(2)绝对值等于 5 的全体实数组成的集合；

(3)除以 3 余 1 的所有整数组成的集合；

(4)构成英文单词 university 的全部字母组成的集合.

1.3 集合之间的关系

1.3.1 子集

观察下列集合：

(1)$A=\{2,4,6\}$，$B=\{2,4,6,8\}$；

(2)$A=\{x \mid x$ 是长方形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是平行四边形$\}$.

可以看出，上述集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素.

一般地，如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素，那么集合 A 就叫作集合 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A,$$

读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

由上述子集的定义可知，任意一个集合 A 都是它自身的子集，即 $A\subseteq A$.

我们规定：空集是任意一个集合的子集，即对于任意一个集合 A 都有 $\varnothing\subseteq A$.

议一议

符号"$\in$"表达的含义与符号"$\subseteq$"相同吗？它们有什么区别？

如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，那么集合 A 叫作集合 B 的**真子集**，记作

$$A\subsetneqq B \text{ 或 } B\supsetneqq A,$$

读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A"，可用图 1-1 所示的图形来直观地表示.

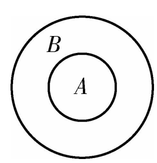


图 1-1

例 1 用适当的符号($\subseteq$,$\supseteq$,$\in$,$\notin$)填空：

(1)$\varnothing$________$\{1,3,5,7,9\}$；

(2)3 ________$\{1,3,5,7,9\}$；

(3)$\{3\}$________$\{1,3,5,7,9\}$.

解 (1)空集是任何集合的子集，因此$\varnothing\subseteq\{1,3,5,7,9\}$.

(2)因为 3 是集合$\{1,3,5,7,9\}$的元素，所以 $3\in\{1,3,5,7,9\}$.

(3)因为集合$\{3\}$的元素都是集合$\{1,3,5,7,9\}$的元素，所以$\{3\}\subseteq\{1,3,5,7,9\}$.

例 2 写出集合 $A=\{1,2,3\}$的所有子集和真子集.

分析 集合 A 中共有三个元素，要想不遗漏地写出其所有的子集，可按以下步骤来写：

(1)因为空集是所有集合的子集，所以首先写出$\varnothing$；

(2)写出由一个元素组成的子集，即$\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$；

(3)写出由两个元素组成的子集，即$\{1,2\}$,$\{2,3\}$,$\{1,3\}$；

(4)写出由三个元素组成的子集，即$\{1,2,3\}$.

解 集合 A 的所有子集为

$\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{1,2\}$,$\{2,3\}$,$\{1,3\}$,$\{1,2,3\}$.

在上述子集中除了集合 A 本身，即$\{1,2,3\}$外，其余的全为集合 A 的真子集.

做一做

1. 指出下列各组集合之间的关系：

(1)$A=\{x\mid x\geqslant 1\}$,$B=\{x\mid x=1\}$；

(2)$A=\{x\mid x$ 是正方形$\}$,$B=\{x\mid x$ 是四边形$\}$；

(3)$A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{N}\}$,$B=\{x\mid x=4m,m\in\mathbf{N}\}$；

(4)$A=\{x\mid |x|=2\}$,$B=\{-2,1,2\}$.

2. 写出集合{红色，蓝色，绿色，黄色}的所有非空真子集.

1.3.2 集合的相等

观察集合

$$A=\{1,2,3\},B=\{x\mid 0<x<4,x\in\mathbf{N}\}$$

可以看出，集合 A 的元素和集合 B 的元素完全相同，只是两个集合的表达方式不同.

一般地，如果集合 A 的每个元素都是集合 B 中的元素，并且集合 B 的每个元素都是集合 A 中的元素，那么就说**集合 A 等于集合 B**，记作 $A=B$.

议一议

集合 $A=\{x|x\in B\}$ 与集合 B 相等吗？

例 3 判断下列各组集合的关系：

(1)$A=\{2,3\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$；

(2)$M=\{-3,3\}$，$N=\{x\mid x^2-9=0\}$.

解 (1)$A\subsetneqq B$.

(2)由 $x^2-9=0$ 解得 $x_1=3$，$x_2=-3$，所以集合 N 用列举法表示为$\{-3,3\}$，则可看出这两个集合相等，即 $M=N$.

做一做

1. 指出下列各组集合之间的关系：

(1)$A=\varnothing$，$B=\{x|x^2+1=0\}$；

(2)$A=\{x|0<x\leqslant 3,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{0,1,2,3\}$.

2. 判断集合$\{x||x|=2\}$与集合$\{x|x^2-4=0\}$的关系.

3. 已知$\{x|x^2+bx+c=0\}=\{1\}$，求 b，c 的值.

习题 1.3

1. 用适当的符号($\in$，$\notin$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$，$=$)填空：

(1)0 ____ $\varnothing$；　　(2)$\varnothing$ ____ $\{\varnothing\}$；

(3)3 ____ $\{1,2\}$；　　(4)$\{1,2\}$ ____ $\{1,2\}$；

(5)$\{x\mid 1<x<7,x\in\mathbf{N}\}$ ____ $\{4,6\}$；

(6) $\{a,c\}$____$\{a,b,c,d\}$.

2. 指出下列各组集合之间的关系：

(1) $P=\{x\mid x$ 是等腰三角形$\}$，$Q=\{x\mid x$ 是等边三角形$\}$；

(2) $M=\{x\mid x>1\}$，$N=\{x\mid x\geqslant 2\}$；

(3) $A=\{x\mid x-1=0\}$，$B=\{1,2\}$；

(4) 集合 $A=\{x\mid x^2-3x-10=0\}$，$B=\{-2,5\}$.

3. 写出集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集和真子集.

1.4 集合的运算

过去我们只对数或式子进行算术运算或代数运算，那么集合与集合之间可以进行运算吗？

由两个已知的集合按照某种指定的法则构造出一个新的集合即为集合的运算.

1.4.1 交集

观察集合

$A=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3,6,7,8\}$，$C=\{1,2,3\}$

可以看出，集合 C 的元素恰好是集合 A 与集合 B 的所有共同元素.

一般地，像上述那样，给定两个集合 A，B，由既属于 A 又属于 B 的所有共同元素构成的集合叫作集合 A 与 B 的**交集**，记作

$$A\cap B,$$

读作“A 交 B”，可用图 1-2 所示的阴影部分来形象地表示.

想一想

两个非空集合的交集可能是空集吗？试举例说明.

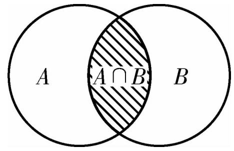


图 1-2

由交集的定义可知，对于任意两个集合 A,B 都有

$$A\cap B=B\cap A;$$

$$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing;$$

$$A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B.$$

动画

交集

例 1 已知 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{1,3,5,7\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{1,3\}$，可用图 1-3 来表示.

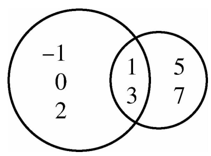


图 1-3

例 2 已知 $A=\{x\mid x$ 是等腰三角形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是直角三角形$\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x\mid x$ 是等腰三角形$\}\cap\{x\mid x$ 是直角三角形$\}$

$=\{x\mid x$ 是等腰直角三角形$\}$.

例 3 已知 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid 0<x<4\}$，求 $A\cap B$.

分析 集合 A,B 是用描述法表示的集合，并且集合的元素没法一一列举出来，因此可以结合数轴进行解题.

解 在数轴上表示集合 A,B，如图 1-4 所示.

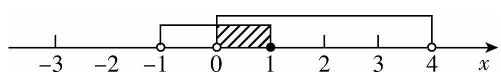


图 1-4

从图中易看出，阴影部分即为集合 A,B 的交集，即

$$A\cap B=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}\cap\{x\mid 0<x<4\}=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}.$$

例 4 已知 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=3\}$，求 $A\cap B$.

分析 集合 A,B 的元素是有序实数对 (x,y)，A,B 的交

集就是二元一次方程组$\begin{cases}4x+y=6,\\x+y=3\end{cases}$的解集.

解 解方程组$\begin{cases}4x+y=6,\\x+y=3\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$所以

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}\cap\{(x,y)\mid x+y=3\}\\&=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}4x+y=6,\\x+y=3\end{cases}\right\}\\&=\{(1,2)\}.\end{aligned}$$

议一议

例4中集合A,B的交集$\{(1,2)\}$能否写成$\{1,2\}$？两者有什么区别呢？

做一做

求下列每组集合的交集：

(1)$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$；

(2)$P=\{1,3,5\}$，$Q=\{2,4,6\}$；

(3)$A=\{x|x>-2\}$，$B=\{x|x\geqslant 1\}$；

(4)$A=\{(x,y)|x+2y=6\}$，$B=\{x,y|5x-y=3\}$.

1.4.2 并集

观察下面三个集合

$M=\{-2,-1,0\}$，$N=\{1,2,3,4\}$，$P=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

可以看出，集合P是由集合M与集合N的所有元素组成的.

一般地，像上述那样，对于给定的两个集合A和集合B，由集合A和集合B的所有元素组成的集合叫作集合A和集合B的**并集**，记作

$$A\cup B,$$

读作“A并B”.

例如，集合

$$A=\{-2,0,2\},B=\{0,3,5\}$$

的并集为

$$A\cup B=\{-2,0,2\}\cup\{0,3,5\}=\{-2,0,2,3,5\}.$$

由并集的定义可知，对于任意两个集合A,B都有

注 意

在求并集时，两个集合中相同的元素只列举一次，不能重复列举.

$$A\cup B=B\cup A;$$

$$A\cup A=A, A\cup\varnothing=A;$$

$$A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B.$$

集合 A 和集合 B 的并集可以用图 1-5 中的阴影部分来表示.

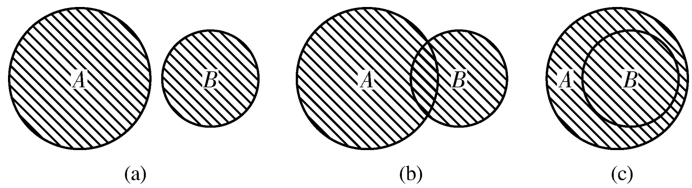


图 1-5

例 5　已知 $A=\{3,4,5,6\}$，$B=\{5,6,7,8\}$，求 $A\cup B$.

解　$A\cup B=\{3,4,5,6\}\cup\{5,6,7,8\}=\{3,4,5,6,7,8\}$.

例 6　已知 $A=\{x \mid -1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x \mid 0<x\leqslant 3\}$，求 $A\cup B$.

分析　本题结合数轴进行解题比较直观.

解　将集合 A 和集合 B 在数轴上表示出来，如图 1-6 所示.

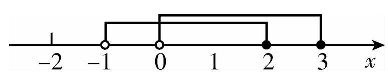


图 1-6

则可看出

$$\begin{aligned} A\cup B &=\{x \mid -1<x\leqslant 2\}\cup\{x \mid 0<x\leqslant 3\} \\ &=\{x \mid -1<x\leqslant 3\}. \end{aligned}$$

例 7　某班同学参加数学、英语两个兴趣小组，规定每名同学必须至少参加其中的一项，有 19 名同学参加了数学兴趣小组，有 23 名同学参加了英语兴趣小组，其中 5 名同学既参加了数学兴趣小组又参加了英语兴趣小组，试问该班总人数是多少？

解　用 A，B 分别表示由参加数学兴趣小组和英语兴趣小组的同学组成的集合，班上所有人组成的集合为 $A\cup B$. 由于有 5 名同学既属于 A 又属于 B，因此 $A\cup B$ 的元素数目等于

$$19+23-5=37,$$

即班上总共有 37 人.

做一做

求下列每组集合的并集：

(1)$A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{f,g\}$；

(2)$A=\{x\mid 1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{5,6,7,8,9,10\}$；

(3)$A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 9\}$；

(4)$A=\{x\mid 2x-3y+1=0\}$，$B=\{x\mid x+2y=0\}$.

1.4.3 补集

动画
补集

在研究集合与集合的关系时，如果所要研究的集合都是某一给定集合的子集，则称这个给定的集合为**全集**，一般用 U 表示. 例如，在研究数集时，常常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集.

如果给定某一集合 A 是全集 U 的一个子集，则 U 中不属于 A 的所有元素组成的集合叫作 A 在全集 U 中的**补集**，记作

$$\complement_U A,$$

读作"A 在 U 中的补集"，即

$$\complement_U A=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

注 意

如果全集 U 为实数集 $\mathbf{R}$，则集合 A 在 U 中的补集也可写成 $\complement A$.

用图形表示集合时，通常用矩形区域表示全集. 全集 U 与它的任意一个真子集 A 之间的关系可用图 1-7 来表示，其中阴影部分表示 A 在 U 中的补集.

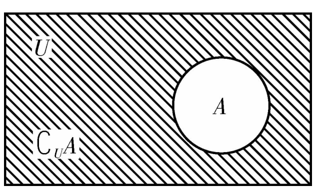


图 1-7

由补集的定义可知，对于任意集合 A 都有

$$A\cup\complement_U A=U,\ A\cap\complement_U A=\varnothing,\ \complement_U(\complement_U A)=A.$$

例 8 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，集合 $A=\{3,4,$

5,6}，求 $\complement_U A$，$A\cap\complement_U A$，$A\cup\complement_U A$.

解 $\complement_U A=\{1,2,7\}$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cup\complement_U A=U$.

例 9 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x>1\}$，求 $\complement_U A$.

解 $\complement_U A=\{x\mid x\leqslant 1\}$.

做一做

求下列每组集合的补集：

(1) $U=\{x\mid x$ 是小李所在班的所有学生$\}$，
$A=\{x\mid x$ 是小李所在班这次参加运动会的学生$\}$；

(2) $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{2,4,6,8\}$；

(3) $U=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 7\}$，$A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$；

(4) U 是自然数集，A 是正整数集.

习题 1.4

1. 填空题：

(1) 若 $A=\{$数学，英语，电路$\}$，$B=\{$数学，机械制图，车工工艺$\}$，则 $A\cap B=$________；$A\cup B=$________.

(2) 若 $A=\{x\mid x\geqslant 4\}$，$B=\{x\mid x>5\}$，则 $A\cap B=$________；$A\cup B=$________.

(3) $\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}=$________.

2. 已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{4,5,6,7\}$，求：(1) $A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap C$；(2) $A\cup B$，$B\cup C$，$A\cup C$.

3. 如果集合 M，N 分别满足下列等式，试写出集合 M，N 之间的关系.

(1) $M\cap N=M$；(2) $M\cup N=M$.

4. 已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,5,7\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$.

5. 用集合语言表示图 1-8 中的阴影部分.

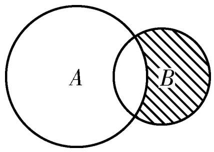


图 1-8

1.5 命 题

1.5.1 命题的概念

用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫作**命题**. 其中，正确的命题称为**真命题**，错误的命题称为**假命题**.

例如：

(1) $1+1=2$；

(2)河北的省会是石家庄；

(3)所有的自然数都大于 0；

(4) $\varnothing=\{0\}$.

这些语句都是命题，其中(1)(2)是真命题，(3)(4)是假命题.

又如：

$1+1=2$ 吗?

姚明长得真高!

请不要迟到.

这些语句都不是命题，因为疑问句、感叹句和祈使句都不可以判断真假，不满足命题的定义.

为方便起见，常用大写字母 P,Q,R 等作为命题的记号.

做一做

下面的语句哪些是命题？哪些不是命题？如果是命题，请指出其真假：

(1)我国的四大发明不包括造纸术；

(2)42 不能被 3 整除；

(3)5 是偶数；

(4)请你现在来一下办公室.

1.5.2 四种命题

1. 原命题和逆命题

一般地，对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们把这样的两个命题称为**互逆命题**. 其中一个命题称为**原命题**，另一个命题称为原命题的**逆命题**.

也就是说，如果原命题为

“若 p，则 q”，

那么它的逆命题为

“若 q，则 p”.

例如，将命题“若 $a=b$，则 $a^2=b^2$”的条件和结论互换，就得到它的逆命题“若 $a^2=b^2$，则 $a=b$”.

2. 否命题

如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题条件的否定和结论的否定，我们把这样的两个命题称为**互否命题**. 如果把其中一个命题称为**原命题**，那么另一个命题称为原命题的**否命题**.

也就是说，如果原命题为

“若 p，则 q”，

那么它的否命题为

“若非 p，则非 q”.

为书写简便，常将否命题记为

“若 $\neg p$，则 $\neg q$”.

例如，如果原命题是“若 $a=b$，则 $a^2=b^2$”，那么它的否命题是“若 $a\neq b$，则 $a^2\neq b^2$”.

3. 逆否命题

如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题结论的否定和条件的否定，我们把这样的两个命题称为**互为逆否命题**. 如果把其中一个命题称为**原命题**，那么另一个命题称为原命题的**逆否命题**.

也就是说，如果原命题为

“若 p，则 q”，

那么它的逆否命题为

“若非 q，则非 p”.

同理，常将逆否命题记为

“若 $\neg q$，则 $\neg p$”.

例如，如果原命题是“若 $a=b$，则 $a^2=b^2$”，那么它的逆否命题是“若 $a^2\neq b^2$，则 $a\neq b$”.

综上可知，设命题“若 p，则 q”为**原命题**，那么

- 命题“若 q，则 p”是原命题的**逆命题**；
- 命题“若 $\neg p$，则 $\neg q$”是原命题的**否命题**；
- 命题“若 $\neg q$，则 $\neg p$”是原命题的**逆否命题**.

4. 四种命题间的相互关系

原命题、逆命题、否命题和逆否命题之间的相互关系如图 1-9 所示.

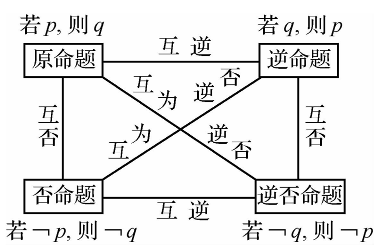


图 1-9

一般地，四种命题的真假性之间具有以下关系：

- 如果两个命题互为逆否命题，那么它们具有相同的真假性（同为真命题或同为假命题）；
- 如果两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系.

例如，在以下四个命题中，若设命题（1）是原命题，显然

> **想一想**
>
> 如果原命题是真命题，那么它的逆命题、否命题和逆否命题是真命题吗？

命题(2)(3)(4)分别是它的逆命题、否命题和逆否命题.

(1)若 a,b 都是偶数,则 $a+b$ 是偶数;

(2)若 $a+b$ 是偶数,则 a,b 都是偶数;

(3)若 a,b 不都是偶数,则 $a+b$ 不是偶数;

(4)若 $a+b$ 不是偶数,则 a,b 不都是偶数.

此外,我们发现,命题(2)(3)互为逆否命题,命题(2)(4)互为否命题,命题(3)(4)互为逆命题.

不难判断,原命题(1)是真命题,它的逆命题(2)是假命题,它的否命题(3)是假命题,而它的逆否命题(4)是真命题.

总结而言,命题(1)(4)互为逆否命题,它们同为真命题;命题(2)(3)互为逆否命题,它们同为假命题;其他两两命题的真假性之间没有关系.

例 1 下列语句中哪些是命题？是真命题还是假命题？

(1)矩形的对角线相等;

(2)垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?

(3)对角线互相垂直的四边形是菱形;

(4)两个全等三角形的面积相等;

(5)若方程 $x^2+a=0$ 无实根,则 $a\geqslant 0$;

(6)$x>13$.

分析 判断一个语句是不是命题,要看它是否符合“是陈述句”和“可以判断真假”这两个条件.

解 在上面 6 个语句中,(2)不是陈述句,所以它不是命题;(6)虽然是陈述句,但因为无法判断它的真假,所以也不是命题;其余 4 个都是陈述句,而且都可以判断真假,所以它们都是命题,其中(1)(4)是真命题,(3)(5)是假命题.

例 2 写出命题“若 $xy=0$,则 $x=0$ 或 $y=0$”的逆命题、否命题和逆否命题.

解 原命题:若 $xy=0$,则 $x=0$ 或 $y=0$.

逆命题:若 $x=0$ 或 $y=0$,则 $xy=0$.

否命题:若 $xy\neq 0$,则 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$.

逆否命题:若 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$,则 $xy\neq 0$.

例 3 将下列命题改写成“若 p,则 q”的形式,同时写出它的逆命题、否命题和逆否命题,并分别判断它们的真假.

(1)负数的立方是负数;

(2)个位上数字为 0 的整数能被 5 整除.

解 (1)原命题可以改写成:若一个数是负数,则这个数的立方是负数.

逆命题:若一个数的立方是负数,则这个数是负数.

否命题:若一个数不是负数,则这个数的立方不是负数.

逆否命题:若一个数的立方不是负数,则这个数不是负数.

原命题、逆命题、否命题和逆否命题均是真命题.

(2)原命题可以改写成:若一个整数的个位上数字为0,则它能被5整除.

逆命题:若一个整数能被5整除,则它的个位上数字为0.

否命题:若一个整数的个位上数字不为0,则它不能被5整除.

逆否命题:若一个整数不能被5整除,则它的个位上数字不为0.

原命题和逆否命题是真命题,逆命题和否命题是假命题.

做一做

1. 下列语句中哪些是命题?是真命题还是假命题?

(1)$|-1|=1$;

(2)$x^2-1=0$;

(3)$1+1>2$;

(4)等边三角形不是等腰三角形;

(5)$2\,014^{50}$是个大数;

(6)若一个三角形的两个角相等,则这个三角形的两条边相等.

2. 指出下列命题中的条件p和结论q,并判断它们的真假:

(1)若x,y互为倒数,则$xy=1$;

(2)若一个数是负数,则它的平方是正数;

(3)若$a>b$,则$ac^2>bc^2$.

3. 写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题,并判断它们的真假:

(1)若$|x|=|y|$,则$x=y$;

(2)若$x=1$,则$x^2=1$.

想一想

如果 $p\wedge q$ 为真命题，那么 $p\vee q$ 一定是真命题吗？相反，如果 $p\vee q$ 为真命题，那么 $p\wedge q$ 一定是真命题吗？

知识卡片

逻辑联结词

在数学中，有时会使用一些联结词，如“且”“或”“非”，来联结两个命题，以构成一个新的命题.

下面介绍逻辑联结词“且”“或”“非”的含义和用法. 为叙述方便，通常用小写字母 $p,q,r,s,\cdots$ 表示命题.

1. 且(and)

一般地，用逻辑联结词“且”把命题 p 和命题 q 联结起来，就得到一个新命题，记作

$$p\wedge q,$$

读作“p 且 q”.

例如，在下列三个命题中，命题(3)是由命题(1)(2)使用联结词“且”联结而得到的新命题.

(1)10 能被 2 整除；

(2)10 能被 5 整除；

(3)10 能被 2 整除且能被 5 整除.

我们规定：**当 p,q 都是真命题时，$p\wedge q$ 是真命题；当 p,q 这两个命题中有一个命题是假命题时，$p\wedge q$ 是假命题.**

在上述三个命题中，命题(1)(2)都是真命题，所以命题(3)是真命题.

2. 或(or)

一般地，用逻辑联结词“或”把命题 p 和命题 q 联结起来，就得到一个新命题，记作

$$p\vee q,$$

读作“p 或 q”.

例如，在下列三个命题中，命题(3)是由命题(1)(2)使用联结词“或”联结而得到的新命题.

(1)21 是 4 的倍数；

(2)21 是 7 的倍数；

(3)21 是 4 的倍数或是 7 的倍数.

我们规定：**当 p,q 这两个命题中有一个命题是真命题时，$p\vee q$ 是真命题；当 p,q 这两个命题都是假命题时，$p\vee q$是假命题.**

在上述三个命题中，命题(1)是假命题，命题(2)是真命题，所以命题(3)是真命题.

3. 非(not)

一般地，对一个命题 p 加以否定，就得到一个新命题，记作

$$\neg p,$$

读作“非 p”或“p 的否定”.

例如，在下列两个命题中，命题(2)是命题(1)的否定.

(1)正方形是矩形；

(2)正方形不是矩形.

显然，**若 p 是真命题，则 $\neg p$ 必是假命题；若 p 是假命题，则 $\neg p$ 必是真命题.**

在上述两个命题中，命题(1)是真命题，命题(2)是假命题.

例 4 用逻辑联结词“且”联结或改写下列命题，并判断它们的真假：

(1)p：矩形的对角线相等，q：矩形的对角线互相平分；

(2)p:15 是 3 的倍数，q:15 是 10 的倍数；

(3)1 既是奇数，又是质数；

(4)12 能被 2 和 3 整除.

解 (1)$p\wedge q$:矩形的对角线相等且互相平分.

因为 p 是真命题，q 是真命题，所以 $p\wedge q$ 是真命题.

(2)$p\wedge q$:15 是 3 的倍数且是 10 的倍数.

因为 p 是真命题，q 是假命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题.

(3)命题“1 既是奇数，又是质数”可以改写为“1 是奇数且 1 是质数”.

因为“1 是奇数”是真命题，“1 是质数”是假命题，所以这个命题是假命题.

(4)命题“12 能被 2 和 3 整除”可以改写为“12 能被 2 整除且 12 能被 3 整除”.

因为“12 能被 2 整除”与“12 能被 3 整除”都是真命

想一想

命题的否定与否定命题有什么区别?

题，所以这个命题是真命题.

例 5 判断下列命题的真假：

(1)$114\leqslant 114$；

(2)等腰三角形有一个角是 $90°$或有两个角是 $45°$；

(3)集合 M 是 $M\cup N$ 的子集或是 $M\cap N$ 的子集.

解 (1)命题“$114\leqslant 114$”是由命题

$$p:114<114,q:114=114$$

用“或”联结后构成的新命题，即 $p\vee q$.

因为命题 p 是假命题，命题 q 是真命题，所以命题 $p\vee q$是真命题.

(2)命题“等腰三角形有一个角是 $90°$或有两个角是 $45°$”是由命题

p：等腰三角形有一个角是 $90°$，

q：等腰三角形有两个角是 $45°$

用“或”联结后构成的新命题，即 $p\vee q$.

因为命题 p,q 都是假命题，所以命题 $p\vee q$ 是假命题.

(3)命题“集合 M 是 $M\cup N$ 的子集或是 $M\cap N$ 的子集”是由命题

p：集合 M 是 $M\cup N$ 的子集，

q：集合 M 是 $M\cap N$ 的子集

用“或”联结后构成的新命题，即 $p\vee q$.

因为命题 p 是真命题，命题 q 是假命题，所以命题 $p\vee q$ 是真命题.

例 6 写出下列命题的否定，并判断它们的真假：

(1)p：空集是集合 A 的子集；

(2)p：$7<5$；

(3)p：π 是有理数.

解 (1)$\neg p$：空集不是集合 A 的子集.

命题 $\neg p$ 是假命题.

(2)$\neg p$：$7\geqslant 5$.

命题 $\neg p$ 是真命题.

(3)$\neg p$：π 不是有理数.

命题 $\neg p$ 是真命题.

习题 1.5

1. 下列语句中哪些是命题？是真命题还是假命题？

(1)若一个三角形的两条边相等，则这个三角形的两个角相等；

(2)$\sqrt{(-3)^2}=3$；

(3)$x^2-2x-3=0$；

(4)等边三角形不是等腰三角形.

2. 将下列命题改写成“若 p，则 q”的形式，并指出条件 p 和结论 q.

(1)平行四边形的对角线互相垂直；

(2)空集是任何集合的真子集；

(3)能被 10 整除的整数一定能被 3 整除；

(4)对顶角相等.

3. 写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判断它们的真假.

(1)若整数 a 不能被 2 整除，则 a 是奇数；

(2)若 $x^2+y^2\neq0$，则 x,y 不全为 0；

(3)若 $x=2$，则 $x^2=4$.

1.6 充要条件

观察下列推论是否成立：

(a)$x=2$，则 $x^2=4$；

(b)$xy=0$，则 $x=0$.

显然，由(a)中的“$x=2$”一定能推断出“$x^2=4$”；由(b)中

的“$xy=0$”不能推断出“$x=0$”，因为有可能 $y=0$.

像上述那样，已知条件 p 和结论 q：

(1)如果由条件 p 成立可推出结论 q 成立，则说条件 p 是结论 q 的**充分条件**，记作“$p\Rightarrow q$”. 上述(a)中，条件 p：$x=2$，结论 q：$x^2=4$，即“$x=2$”是“$x^2=4$”的充分条件.

(2)如果由结论 q 成立可推出条件 p 成立，则说条件 p 是结论 q 的**必要条件**，记作“$q\Rightarrow p$(或 $p\Leftarrow q$)”. 上述(b)中，条件 p：$xy=0$，结论 q：$x=0$，即“$xy=0$”是“$x=0$”的必要条件.

如果 $p\Rightarrow q$，且 $p\Leftarrow q$，那么 p 是 q 的充分且必要条件，简称**充要条件**，记作“$p\Leftrightarrow q$”.

例 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件：

(1)p：$x>3$，q：$x>5$；

(2)p：$x-2=0$，q：$(x-2)(x+4)=0$；

(3)p：$-6x>3$，q：$x<-\dfrac{1}{2}$.

解 (1)由条件 $x>3$ 成立不能推出结论 $x>5$ 成立，如 $x=4$ 时，$4>3$ 但 $4<5$，因此 p 不是 q 的充分条件；而由结论 $x>5$ 可以推出条件 $x>3$ 成立，所以 p 是 q 的必要不充分条件.

(2)由条件 $x-2=0$ 能够推出结论 $(x-2)(x+4)=0$ 成立，但是由结论 $(x-2)(x+4)=0$ 不能推出条件 $x-2=0$ 成立，所以 p 是 q 的充分不必要条件.

(3)由条件 $-6x>3$ 成立能够推出结论 $x<-\dfrac{1}{2}$ 成立，而由结论 $x<-\dfrac{1}{2}$ 成立也能够推出条件 $-6x>3$ 成立，所以 p 是 q 的充要条件.

知识卡片

全称量词与存在量词

一、全称量词

观察下面的语句：

(1)$x<5$；

(2)$3x+2$ 是整数；

(3)对所有的 $x\in\mathbf{R}$,$x<5$;

(4)对任意一个 $x\in\mathbf{Z}$,$3x+2$ 是整数.

不难发现,语句(1)(2)无法判断真假,因此不是命题.语句(3)在语句(1)的基础上用短语"对所有的"对变量 x 进行限定,语句(4)在语句(2)的基础上用短语"对任意一个"对变量 x 进行限定,从而使语句(3)(4)成为可以判断真假的语句,因此语句(3)(4)是命题.

"对所有的""对任意一个"等短语在逻辑中通常称为全称量词,并用符号"$\forall$"表示.含有全称量词的命题称为**全称命题**.

例如,命题"所有的等边三角形都相似""对任意的 $k\in\mathbf{Z}$,$2k$ 是偶数"都是全称命题.

一般地,将含有变量 x 的语句用 $p(x)$,$q(x)$,$r(x)$,…表示,变量 x 的取值范围用 M 表示.

那么,**全称命题**"对 M 中任意一个 x,有 $p(x)$ 成立"可用符号简记为

$$\forall x\in M,p(x),$$

读作"对任意 x 属于 M,有 $p(x)$ 成立".

二、存在量词

观察下面的语句:

(1)$2x-3=1$;

(2)x 能被 3 和 5 整除;

(3)存在一个 $x_0\in\mathbf{R}$,使 $2x_0-3=1$;

(4)至少有一个 $x_0\in\mathbf{Z}$,x_0 能被 3 和 5 整除.

容易判断,语句(1)(2)不是命题.语句(3)在语句(1)的基础上用短语"存在一个"对变量 x 的取值进行限定,语句(4)在语句(2)的基础上,用"至少有一个"对变量 x 的取值进行限定,从而使语句(3)(4)变成了可以判断真假的语句,因此语句(3)(4)是命题.

"存在一个""至少有一个"等短语在逻辑中通常称为

想一想

“三角形的内角和为 180°”是全称命题还是特称命题？

存在量词，并用符号“$\exists$”表示. 含有存在量词的命题称为**特称命题**.

例如，命题“有一个质数是偶数”“有的平行四边形是矩形”都是特称命题.

特称命题“存在 M 中的一个 x_0，使 $p(x_0)$ 成立”可用符号简记为

$$\exists x_0 \in M, p(x_0),$$

读作“存在一个 x_0 属于 M，使 $p(x_0)$ 成立”.

三、含有一个量词的命题的否定

1. 全称命题的否定

写出下列命题的否定：

(1)所有的菱形都是平行四边形；

(2)每个质数都是奇数；

(3) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2-x+1>0$.

易知，上面三个命题都是全称命题，即符合形式“$\forall x \in M, p(x)$”.

命题(1)的否定是“并非所有的菱形都是平行四边形”，也就是说：

存在一个菱形不是平行四边形；

命题(2)的否定是“并非每个质数都是奇数”，也就是说：

存在一个质数不是奇数；

命题(3)的否定是“并非所有的 $x \in \mathbf{R}, x^2-x+1>0$”，也就是说：

$$\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2-x_0+1 \leqslant 0.$$

从命题形式看，这三个全称命题的否定都变成了特称命题.

一般地，对于全称命题的否定有下面的结论：

对于全称命题 p：

$$\forall x \in M, p(x),$$

它的否定 $\neg p$ 为：

$$\exists x_0 \in M, \neg p(x_0).$$

全称命题的否定是特称命题.

2. 特称命题的否定

写出下列命题的否定：

(1)有些整数的绝对值是正数；

(2)某些矩形是正方形；

(3) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2+1<1$.

易知，上面三个命题都是特称命题，即符合形式“$\exists x_0 \in M, p(x_0)$”.

命题(1)的否定是“不存在一个整数，它的绝对值是正数”，也就是说：

所有整数的绝对值都不是正数；

命题(2)的否定是“没有一个矩形是正方形”，也就是说：

每个矩形都不是正方形；

命题(3)的否定是“不存在 $x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2+1<1$”，也就是说：

$$\forall x \in \mathbf{R}, x^2+1 \geqslant 1.$$

从命题形式看，这三个特称命题的否定都变成了全称命题.

一般地，对于特称命题的否定有下面的结论：

对于特称命题 p：

$$\exists x_0 \in M, p(x_0),$$

它的否定 $\neg p$ 为：

$$\forall x \in M, \neg p(x).$$

特称命题的否定是全称命题.

做一做

1. 填空题(充分、必要、充要)：

(1)“$x^2=y^2$”是“$x=y$”的________条件；

(2)“内错角相等”是“两直线平行”的________条件；

(3)“$ac=bc$”是“$a=b$”的________条件；

(4)“$x=0$”是“$xy\neq 0$”的________条件.

2. 指出条件 p 是结论 q 的什么条件：

(1) p: $x>5$, q: $x>10$；

(2) p: $a=0$, q: $a+b=b$；

(3) p: $|x|>0$, q: $x>0$；

(4) p: $x=2$, q: $x^2-4x+4=0$.

习题 1.6

1. 用符号“$\Rightarrow$”“$\Leftarrow$”“$\Leftrightarrow$”填空：

(1) $x=1$ ____ $|x|=1$；

(2) $x^2>0$ ____ $x>0$；

(3) $a=b$ ____ $a+c=b+c$；

(4) $x=1$ ____ $x^2-3x+2=0$；

(5) x 是 3 的倍数____ x 是 9 的倍数；

(6) $x\in \mathbf{Z}$ ____ $x\in \mathbf{N}$.

2. 指出下列各组中条件 p 是结论 q 的什么条件：

(1) p: $\triangle ABC$ 是等腰三角形，q: $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形；

(2) p: $A\subseteq B$, q: $A\cup B=B$；

(3) p: $x>0, y>0$, q: $xy>0$；

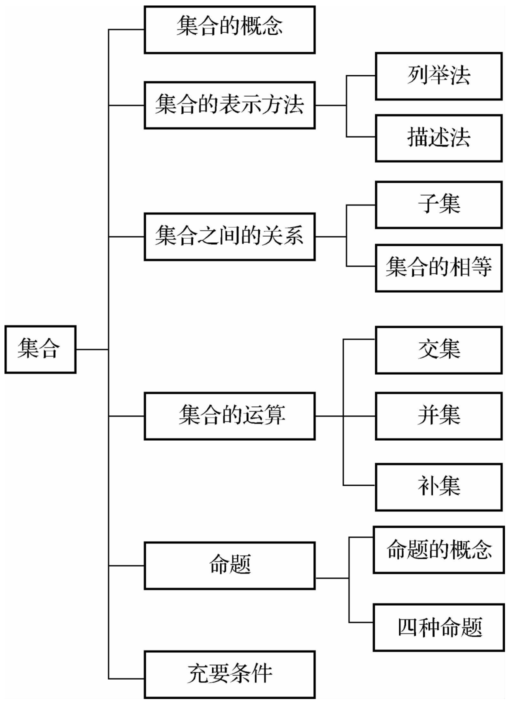
(4) p: $x=y$, q: $|x|=|y|$；

(5) p: $ab\neq 0$, q: $a\neq 0$；

(6) p: $x>1$, q: $x^2>x$.

单元小结

一、知识脉络图



二、主要内容

本单元主要学习数学中经常使用的集合和基本逻辑用语.

1. 集合及其表示法

集合是由某些指定的对象汇集在一起所组成的整体,而组成集合的每个对象称为这个集合的元素,如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$;否则就说 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.

集合中的元素有确定性、互异性和无序性.

不含任何元素的集合叫作空集,用符号$\varnothing$表示.

常见的数集有:自然数集 $\mathbf{N}$,正整数集 $\mathbf{N}^*$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数集 $\mathbf{R}$.

表示集合的方法通常有两种:列举法和描述法.

2. 集合之间的关系

有的集合之间有包含关系,即 $A\subseteq B$(或者说 $B\supseteq A$),这

时称 A 是 B 的子集，其中包含有两种情况：

(1)如果 B 中至少有一个元素不属于它的子集 A，则称 A 是 B 的真子集；

(2)A 与 B 的元素完全相同，则称 $A=B$.

注：$\varnothing$是任意集合的子集.

3. 集合的运算

交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A，且\ x\in B\}$；

并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A，或\ x\in B\}$；

补集：$\complement_U A=\{x\mid x\in U，且\ x\notin A\}$.

其中，U 是全集，A 是 U 的子集.

4. 命题

命题是指能够判断真假的语句(陈述句或式子).

5. 充分条件、必要条件、充分条件

当 $p\Rightarrow q$ 为真时，称 p 是 q 的充分条件，称 q 是 p 的必要条件.

如果 $p\Rightarrow q$ 为真且 $q\Rightarrow p$ 为真，则称 p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件，也称 p 与 q 等价，记作

$$p\Leftrightarrow q.$$

复习题

A 组

1. 选择题：

(1)设全集为 $\mathbf{Z}$，$A=\{奇数\}$，$B=\{偶数\}$，则(　　).

A. $A\subseteq B$　　B. $A=B$

C. $A\supseteq B$　　D. $A\cup B=\mathbf{Z}$

(2)集合$\{2,4,6\}$的子集有(　　)个，其中含有元素 2 的子集有(　　)个.

A. 6，2　　B. 7，3

C. 8，4　　D. 9，4

(3)集合 $A=\{x\mid 1<x\leqslant 7\}$，$B=\{x\mid 3<x<9\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\{x\mid 1<x\leqslant 7\}$　　B. $\{x\mid 3<x\leqslant 7\}$

C. $\{x \mid 3<x<9\}$　　D. $\{x \mid 1<x<9\}$

(4)$M\cap P=M$ 是 $M\subseteq P$ 的(　　)条件.

A. 充分　　B. 必要

C. 充要　　D. 以上都不正确

(5)下列各项中正确的一项是(　　).

A. $a^2>0\Rightarrow a>0$　　B. $a=0\Leftrightarrow ab=0$

C. $a=5\Rightarrow |a|=5$　　D. $ac^2>bc^2\Leftarrow a>b$

2. 用适当的符号($\in,\notin,\subsetneqq,\supsetneqq,=$)填空：

(1)a ____ $\{a,b,c,d\}$；

(2)$\{a\}$____$\{a,b,c,d\}$；

(3)0 ____ $\{a,b,c,d\}$；

(4)$\{1\}$____$\{x \mid x^2=1\}$；

(5)$\{-5,5\}$____$\{x \mid x^2-25=0\}$；

(6)$\{x \mid x>1\}$____ $\mathbf{R}$.

3. 用适当的方法表示下列集合：

(1)绝对值不大于 5 的所有实数；

(2)小于 6 的所有正整数组成的集合；

(3)方程组$\begin{cases}x-y=3,\\x+y=5\end{cases}$的解集.

4. 已知集合 $A=\{-2,-1,0\}$，$B=\{0,1,2\}$，写出 $A\cup B$ 的所有子集和真子集.

5. 设全集 $U=\{-7,-5,-3,-1,0,1,3,5,7\}$，集合 $A=\{-5,-3,-1,0\}$，$B=\{0,1,3\}$，求：

(1)$A\cap B$，$A\cup B$；(2)$\complement_U A$，$\complement_U B$.

6. 已知集合 $A=\{a,b,2\}$，$B=\{2a,2,b^2\}$，且满足 $A=B$，求 a,b 的值.

7. 指出条件 p 是结论 q 的什么条件.

(1)p:小李在英语大赛上获得第一名，q:小李平时认真学习英语；

(2)p:$x=y$，q:$|x|=|y|$；

(3)p:$x^2+(y-2)^2=0$，q:$x=0,y=2$.

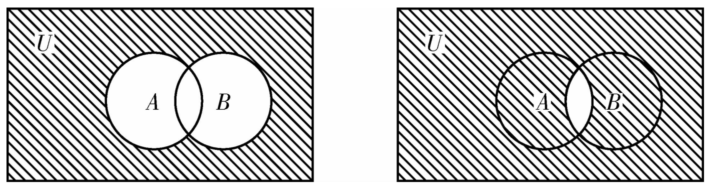
8. 以“若 $x^2+2x-3=0$，则 $x=1$”为原命题，写出它的逆命题、否命题、逆否命题，并判断这些命题的真假.

9. 设甲商店和乙商店分别经销 250 种商品和 120 商品，其中有 50 种商品相同，求甲、乙两商店共有多少种商品？

10. 某学校经管专业共有 50 人同时参加计算机和英语考核，经考核，计算机合格 33 人，英语合格 27 人，两科都合格 20 人，求两科均不合格的人数.

B 组

1. 下图中的全集为 U，集合 A 和集合 B 都是 U 的子集，试用集合语言表示图中的阴影部分.



（1）　　　　（2）

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x\leqslant 5\}$，$B=\{x \mid 0<x\leqslant 3\}$，求：

(1) $A\cap B$，$A\cup B$；

(2) $\complement_U A$，$\complement_U B$；

(3) $\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$；

(4) $\complement_U(A\cap B)$，$\complement_U(A\cup B)$.

知识拓展

康托尔和集合论

康托尔（Cantor，1845—1918），德国数学家，集合论的创始人

康托尔是 19 世纪末 20 世纪初德国伟大的数学家，集合论的创立者，数学史上最富有想象力和最有争议的人物之一. 19 世纪末，他所从事的关于连续性和无穷的研究从根本上背离了数学中关于无穷的使用与解释的传统，从而引起了激烈的争论乃至严厉的谴责. 然而数学的发展最终证明康托尔是正确的. 他所创立的集合论被誉为 20 世纪最伟大的数学创造. 集合概念大大扩充了数学的研究领域，给数学结构提供了一个基础. 集合论不仅影响了现代数学，而且深深影响了现代哲学和逻辑.

1.集合论的背景

集合论在19世纪诞生的基本原因来自数学分析基础的批判运动.数学分析的发展必然涉及无穷过程、无穷小和无穷大这些无穷概念.在18世纪,无穷概念没有精确的定义,使微积分理论不仅遇到严重的逻辑困难,而且使无穷概念在数学中信誉扫地.19世纪上半叶,柯西给出了极限概念的精确描述,并在此基础上建立起连续、导数、微分、积分及无穷级数的理论.正是这19世纪发展起来的极限理论相当完美地解决了微积分理论所遇到的逻辑困难.但是,柯西并没有彻底完成微积分的严密化.柯西思想有一定的模糊性,甚至产生逻辑矛盾.19世纪后期的数学家们发现使柯西产生逻辑矛盾的原因在于奠定微积分基础的极限概念上.严格地说柯西的极限概念并没有真正地摆脱几何直观,确实地建立在纯粹严密的算术的基础上.于是,许多受分析基础危机影响的数学家致力于分析的严格化.在这一过程中都涉及对微积分的基本研究对象——连续函数的描述.在数与连续性的定义中又涉及关于无限的理论.因此,无限集合在数学上的存在问题又被提出来了.这自然也就导致数学家们寻求无限集合的理论基础的工作.总之,为寻求微积分彻底严密的算术化倾向,成了集合论产生的一个重要原因.

2.集合论的建立

康托尔在柏林大学的导师是库曼、克罗内克和外尔斯托拉斯.库曼教授是数论专家,他以引进理想数并大大推动费马大定理的研究而举世闻名.克罗内克是一位大数学家,当时许多人都以得到他的赞许为荣.外尔斯托拉斯既是一位优秀教师又是一位大数学家,他的演讲给数学分析奠定了一个精确而稳定的基础.例如,微积分中著名的观念就是他首先引进的.正是受这些人的影响,康托尔对数论产生兴趣,并集中精力对高斯留下的问题做了深入的研究.他的毕业论文就是关于素数问题的.这是高斯在《算术研究》中提出而未解决的问题.这篇论文写得相当出色,它足以证明康托尔具有深刻的洞察力和对优秀思想的继承能力.然而,他的超穷集合论的创立并没有受惠于早期对数论的研究.相反,他很快接

受了数学家海涅的建议而转向了其他领域. 海涅鼓励康托尔研究一个十分有趣，也是较困难的问题：任意函数的三角级数的表达式是否唯一？对康托尔来说，这个问题是促使他建立集合论的最直接原因. 函数可用三角级数表示，最早是1822年傅立叶提出来的. 此后，对于间断点的研究越来越成为分析领域中引人注目的问题，从19世纪30年代起，不少杰出的数学家从事着对不连续函数的研究，并且都在一定程度上与集合这一概念挂起了钩. 这就为康托尔最终建立集合论创造了条件. 1870年，海涅证明，如果表示一个函数的三角级数在区间$[-\pi,\pi]$中去掉函数间断点的任意小邻域后剩下的部分上是一致收敛的，那么级数是唯一的. 至于间断点的函数情况如何，海涅没有解决. 康托尔开始着手解决这个以如此简洁的方式表达的唯一性问题. 于是他跨出了集合论的第一步.

康托尔一下子就表现出比海涅更强的研究能力. 他决定尽可能多地取消限制，当然这会使问题本身增加难度. 为了给出最有普遍性的解，康托尔引进了一些新的概念. 在其后的三年中，康托尔先后发表了五篇有关这一题目的文章. 1872年，当康托尔将海涅提出的一致收敛的条件减弱为函数具有无穷个间断点的情况时，他已经将唯一性结果推广到允许例外值是无穷集的情况. 康托尔1872年的论文是从间断点问题过度到点集论的极为重要的环节，使无穷点集成为明确的研究对象.

集合论里的中心难点是无穷集合这个概念本身. 从希腊时代以来，无穷集合很自然地引起数学家们和哲学家们的注意. 而这种集合的本质及看来是矛盾的性质，很难让人像有穷集合那样来把握它. 所以对这种集合的理解没有任何进展. 早在中世纪，人们已经注意到这样的事实：如果从两个同心圆出发画射线，那么射线就在这两个圆的点与点之间建立了一一对应，然而两圆的周长是不一样的. 16世纪，伽利略还举例说，可以在两个不同长的线段ab与cd之间建立一一对应，从而想象出它们具有同样的点.

伽利略又注意到正整数可以和它们的平方构成一一对

应，只要使每个正整数同它们的平方对应起来就行了：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots n \cdots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \cdots n^2 \cdots \end{array}$$

但这导致无穷大的不同的“数量级”，伽利略以为这是不可能的. 因为所有无穷大都一样大.

不仅是伽利略，在康托尔之前的数学家大多不赞成在无穷集之间使用一一对应的比较手段，因为它将出现部分等于全体的矛盾. 高斯明确表态：“我反对把一个无穷量当作实体，这在数学中是从来不允许的. 无穷只是一种说话的方式……”柯西也不承认无穷集合的存在. 他不能允许部分同整体构成一一对应这件事. 当然，潜无穷在一定条件下是便于使用的，但若把它作为无穷观则是片面的. 数学的发展表明，只承认潜无穷，否认实无穷是不行的. 康托尔把时间用到对研究对象的深沉思考中. 他要用事实来说明问题，说服大家. 康托尔认为，一个无穷集合能够和它的部分构成一一对应不是什么坏事，它恰恰反映了无穷集合的一个本质特征. 对康托尔来说，如果一个集合能够和它的一部分构成一一对应，它就是无穷的. 它定义了基数、可数集合等概念，并且证明了实数集是不可数的，代数集是可数的. 康托尔最初的证明发表在1874年的一篇题为《关于全体实代数的特征》的文章中，这标志着集合论的诞生.

随着实数不可数性质的确立，康托尔又提出一个新的、更大胆的问题. 1874年，他考虑了能否建立平面上的点和直线上的点之间的一一对应. 从直观上说，平面上的点显然要比线上的点要多得多. 康托尔起初也是这样认识的. 但三年后，康托尔宣布：不仅平面和直线之间可以建立一一对应，而且与一般的 n 维连续空间也可以建立一一对应！这一结果是出人意外的. 就连康托尔本人也觉得“简直不能相信”. 然而这又是明摆着的事实，它说明直观是靠不住的，只有靠理性才能发现真理，避免谬误.

既然 n 维连续空间与一维连续统具有相同的基数，于是，康托尔在1879到1884年集中于线性连续统的研究，相继发表了六篇系列文章，汇集成《关于无穷的线性点集》. 前四篇

直接建立了集合论的一些重要结果，包括集合论在函数论等方面的应用．第五篇发表于1883年，它的篇幅最长，内容也最丰富．它不仅超出了线性点集的研究范围，而且给出了超穷数的一个完全一般的理论，其中借助良序集的序型引进了超穷序数的整个谱系；同时还专门讨论了由集合论产生的哲学问题，包括回答反对者们对康托尔所采取的实无穷立场的非难．这篇文章对康托尔是极为重要的．1883年，康托尔将它以《集合论基础》为题作为专著单独出版．

3．集合论的意义

集合论是现代数学中重要的基础理论．它的概念和方法已经渗透到代数、拓扑和分析等许多数学分支及物理学和质点力学等一些自然科学部门，为这些学科提供了奠基的方法，改变了这些学科的面貌．几乎可以说，如果没有集合论的观点，人们就很难对现代数学获得一个深刻的理解．所以集合论的创立不仅对数学基础的研究有重要意义，而且对现代数学的发展也有深远的影响．

康托尔一生受过磨难．他及其集合论受到粗暴攻击长达十年．康托尔虽曾一度对数学失去兴趣，而转向哲学、文学，但始终未放弃集合论．康托尔能不顾众多数学家、哲学家甚至神学家的反对，坚定地捍卫超穷集合论，与他的科学家气质和性格是分不开的．康托尔个性的形成在很大程度上受到他父亲的影响．他的父亲乔治・瓦尔德玛・康托尔是在福音派新教的影响下成长起来的一位精明的商人，明智且有天分．他父亲的那种深笃的宗教信仰和强烈的使命感始终带给康托尔勇气和信心．正是这种坚定、乐观的信念使康托尔义无返顾地走向数学家之路并真正取得了成功．

今天集合论已成为整个数学大厦的基础，康托尔也因此成为世纪之交的最伟大的数学家之一．

（摘自卢介景．无穷统帅：康托尔[M]．济南：教育出版社．2001）．