

★ 服务热线: 400-615-1233
★ 配套精品教学资料包
★ www.huatengedu.com.cn



G

ONGCHENG
LIXUE

工程力学

—— (第2版) ——



工程力学 (第2版)

主编 张玉华 陈佳辉 李月姝

北京邮电大学出版社

X-A



ISBN 978-7-5635-6292-3

9 787563 562923 >

定价: 49.80元

策划编辑: 刘建
责任编辑: 边丽新
封面设计: 黄燕美

高等职业教育土建系列创新教材
▶ “互联网+”新形态教材



G

ONGCHENG
LIXUE

工程力学

—— (第2版) ——

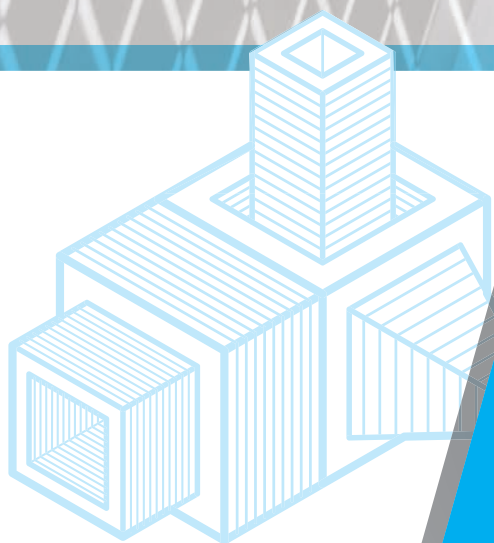
主编 张玉华 陈佳辉 李月姝
主审 王连威



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等职业教育土建系列创新教材

▶ “互联网+”新形态教材



GONGCHENG
LIXUE

工程力学

—— (第2版) ——

主 编	张玉华	陈佳辉	李月姝
副主编	巴斯德	夏 兰	王 茜
	吕 琦	林桂荣	
主 审	王连威		



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书根据高等职业教育的特色,以及工程力学在人才培养计划中的地位和作用,在编写过程中力求体现“以应用为目的,以必需、够用为度,以讲清概念、强化应用为重点”的原则,以满足当今高等教育对于人才培养的需求。全书主要内容包括绪论、静力学的基础知识、平面力系的简化与平衡、空间力系、材料力学的基础知识、轴向拉伸与压缩、剪切与挤压、扭转、构件截面的几何性质、弯曲内力、梁的应力与强度、应力状态及强度理论、梁的变形、组合变形、压杆稳定。

本书可作为高等职业教育相关专业工程力学课程的教材,也可作为相关技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学 / 张玉华,陈佳辉,李月姝主编. -- 2 版. -- 北京:北京邮电大学出版社,2021.1(2025.7 重印)
ISBN 978-7-5635-6292-3

I. ①工… II. ①张… ②陈… ③李… III. ①工程力学—高等教育—教材 IV. ①TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 014285 号

策划编辑:刘 建 责任编辑:边丽新 封面设计:黄燕美

出版发行:北京邮电大学出版社

社 址:北京市海淀区西土城路 10 号

邮政编码:100876

发 行 部:电话:010-62282185 传真:010-62283578

E-mail: publish@bupt. edu. cn

经 销:各地新华书店

印 刷:三河市龙大印装有限公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:17.5 插页 1

字 数:362 千字

版 次:2021 年 1 月第 2 版

印 次:2025 年 7 月第 5 次印刷

ISBN 978-7-5635-6292-3

定 价:49.80 元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

服务电话:400-615-1233



工程力学是一门理论性较强、与工程技术联系极为紧密的技术基础学科,涉及众多的力学学科分支与工程技术领域,工程力学的公理、定律和结论广泛应用于各行各业的工程技术中,是解决工程实际问题的重要基础。

本书从高等职业教育技术应用型人才的职业需要出发,本着强化学生的专业理论和实践能力的目的,通过加强学生工程力学理论理解 and 实践计算能力的培养,最终使其提高技术应用能力和综合运用所学理论知识解决实际问题的能力。

本书推荐学时安排如下表。

模块序号	内 容	学 时
0	绪论	2
1	静力学的基础知识	6
2	平面力系的简化与平衡	12
3	空间力系	6
4	材料力学的基础知识	6
5	轴向拉伸与压缩	10
6	剪切与挤压	4
7	扭转	8
8	构件截面的几何性质	6
9	弯曲内力	6
10	梁的应力与强度	6
11	应力状态及强度理论	6
12	梁的变形	6
13	组合变形	6
14	压杆稳定	6
总计		96

本书在第1版的基础上主要进行了如下调整。

- (1) 根据当下职业教育特点,对部分内容进行合并、增删,使内容更符合当下教育要求。
- (2) 对部分内容进行简化,降低学习难度,使学生更易理解和掌握。
- (3) 更换了书中的一些例题,使之与知识点更加匹配。

本书由张玉华、陈佳辉、李月姝任主编,由巴斯德、夏兰、王茜、吕琦、林桂荣任副主编。



具体编写分工如下:张玉华编写绪论、模块 1、模块 2 和模块 14,陈佳辉编写模块 3 和模块 4,李月姝编写模块 5 和模块 6,巴斯德编写模块 7 和模块 8,夏兰编写模块 9 和模块 10,王茜编写模块 11 和模块 12,吕琦编写模块 13,林桂荣负责全书资料图片及表格的编号和命名的安排整理工作。全书由张玉华统稿,由王连威教授主审。

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,敬请广大读者批评指正,以便再版修正。

编 者



工程力学是一门理论性较强、与工程技术联系极为紧密的技术基础学科,涉及众多的力学学科分支与工程技术领域,工程力学的公理、定律和结论广泛应用于各行各业的工程技术中,是解决工程实际问题的重要基础。

本书根据高等职业教育的特点,以及工程力学在人才培养计划中的地位和作用编写而成,在编写过程中始终坚持“以应用为目的,以必需、够用为度,以讲清概念、强化应用为重点”的原则,以满足当今高等职业教育对于人才培养的需求。

本书推荐学时安排如下表。

模 块	内 容	学 时
0	绪论	2
1	静力学基本知识	6
2	平面力系的简化与平衡	12
3	空间力系	6
4	材料力学的基本知识	6
5	轴向拉伸与压缩	10
6	剪切与挤压	4
7	扭转	8
8	构件截面的几何性质	6
9	弯曲内力	6
10	梁的应力与强度	6
11	应力状态及强度理论	6
12	梁的变形	6
13	组合变形	6
14	压杆稳定	6
总计		96

本书主要特色如下。

(1)每个模块均设置了“知识目标”和“技能目标”,使学生在在学习本模块内容之前就能了解需要掌握的重点,从而做到有目的地去学习。

(2)对于重要的定理、推论、定义等做了突出显示,以进一步引起学生的注意,从而加强其对这些重点内容的记忆。



(3)简化公式推导,并引入大量工程实例,着力体现高等职业教育的特色,努力提高学生分析问题和解决问题的能力。

(4)全书例题丰富,注重理论与应用相结合,充分体现理论实践一体化的特色。

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,敬请广大读者批评指正,以便再版修正。

编 者



绪论

.....	1
0.1 工程力学的研究对象	1
0.2 工程力学的主要内容	4
0.3 工程力学的研究方法	5
0.4 工程力学的学习方法	5



模块 1

静力学的基础知识

学习描述	6
1.1 静力学的基本概念	6
1.1.1 刚体与变形体	6
1.1.2 力	7
1.1.3 力系	8
1.1.4 平衡	8
1.2 静力学基本公理	9
1.2.1 二力平衡公理	9
1.2.2 加减平衡力系公理	10
1.2.3 力的平行四边形法则	11
1.2.4 作用与反作用公理	12
1.3 约束及约束反力	13
1.3.1 约束及约束反力概述	13
1.3.2 常见约束类型及其反力的特点	14
1.4 物体的受力图	19
1.4.1 单个物体的受力图	19
1.4.2 物体系统的受力图	20
1.5 力矩与力偶	21
1.5.1 力矩及合力矩定理	22
1.5.2 力偶及力偶的基本性质	25
1.6 力的平移定理	27
思考与练习	28

**模块 2****平面力系的简化与平衡 32**

学习描述	32
2.1 平面汇交力系	33
2.1.1 平面汇交力系合成与平衡的几何法	33
2.1.2 平面汇交力系合成与平衡的解析法	36
2.2 平面力偶系	41
2.2.1 平面力偶系的简化	41
2.2.2 平面力偶系的平衡方程	43
2.3 平面一般力系	44
2.3.1 平面一般力系的简化	44
2.3.2 平面一般力系的平衡	48
2.3.3 平面平行力系的平衡方程	52
2.3.4 物体系统的平衡	55
2.3.5 静定与超静定	58
思考与练习	59

**模块 3****空间力系 64**

学习描述	64
3.1 力在空间直角坐标轴上的投影	64
3.2 力对轴之矩与合力矩定理	67
3.2.1 力对轴之矩	67
3.2.2 合力矩定理	68
3.3 空间力系的平衡方程	69
3.4 物体的重心	71
3.4.1 重心的概念	71
3.4.2 求重心及形心位置的方法	72
思考与练习	76

**模块 4****材料力学的基础知识 78**

学习描述	78
4.1 材料力学的基本概念与基本内容	78
4.1.1 变形	78
4.1.2 材料力学的基本内容	79
4.2 材料的基本假设与杆件的基本变形	82
4.2.1 材料的基本假设	82

4.2.2 杆件的基本变形	83
4.3 构件的内力及截面法	85
4.3.1 构件的内力	85
4.3.2 求内力的基本方法——截面法	85
4.4 应力与应变	86
4.4.1 应力	86
4.4.2 应变	87
思考与练习	88



模块 5

轴向拉伸与压缩 91

学习描述	91
5.1 轴向拉伸与压缩的特点	91
5.1.1 工程实例	91
5.1.2 拉(压)杆的受力与变形特点	92
5.2 轴向拉(压)杆的轴力与轴力图	92
5.2.1 轴力	93
5.2.2 轴力图	95
5.3 轴向拉(压)杆横截面上的应力计算	97
5.3.1 轴向拉(压)杆横截面上的应力	97
5.3.2 横截面上应力公式的应用	98
5.3.3 应力集中及圣维南原理	99
5.4 轴向拉(压)杆的变形计算	100
5.4.1 纵向变形与胡克定律	100
5.4.2 横向变形与泊松比	102
5.5 材料在拉伸和压缩时的力学性能	103
5.5.1 材料在拉伸时的力学性能	103
5.5.2 材料在压缩时的力学性能	107
5.5.3 塑性材料和脆性材料的性能区别	108
5.6 轴向拉(压)杆的强度	108
5.6.1 材料的极限应力与许用应力	108
5.6.2 轴向拉(压)杆的强度计算	109
思考与练习	111



模块 6

剪切与挤压 117

学习描述	117
6.1 剪切与挤压概述	117
6.1.1 连接件	117



6.1.2 剪切与挤压的受力和变形	118
6.2 剪切实用计算	119
6.3 挤压实用计算	120
思考与练习	122

**模块 7****扭转** 124

学习描述	124
7.1 扭转概念及外力偶矩	124
7.1.1 扭转的受力和变形特点	124
7.1.2 传动轴的外力偶矩	125
7.2 圆轴扭转时的内力	125
7.2.1 扭矩的计算	126
7.2.2 扭矩的正、负规定	126
7.2.3 扭矩图	126
7.3 剪应力互等定理与剪切胡克定律	127
7.3.1 扭转试验现象与分析	127
7.3.2 剪应力互等定理	128
7.3.3 剪切胡克定律	128
7.4 圆轴扭转时的强度计算	129
7.4.1 横截面上的剪应力	129
7.4.2 强度条件公式	132
7.5 圆轴扭转时的变形及刚度计算	133
7.5.1 圆轴扭转时的变形计算公式	133
7.5.2 圆轴扭转时的刚度条件及计算	133
思考与练习	135

**模块 8****构件截面的几何性质** 138

学习描述	138
8.1 构件截面的形心位置	138
8.1.1 截面的静矩与形心的关系	138
8.1.2 组合图形的形心坐标	139
8.2 惯性矩、惯性半径、惯性积和极惯性矩	141
8.2.1 构件截面的惯性矩及其计算	141
8.2.2 构件截面的惯性半径	144
8.2.3 构件截面的惯性积	145
8.2.4 构件截面的极惯性矩	145

8.3 平行移轴公式及其计算	147
8.3.1 平行移轴公式	147
8.3.2 组合图形惯性矩的计算	148
思考与练习	150



模块 9

弯曲内力	153
------------	-----

学习描述	153
9.1 弯曲的概念及其实例	153
9.1.1 弯曲与平面弯曲	153
9.1.2 梁的三种基本形式	155
9.2 剪力和弯矩	155
9.2.1 剪力和弯矩的概念	155
9.2.2 剪力和弯矩的正负号规定	156
9.2.3 指定截面的剪力和弯矩的计算方法	157
9.2.4 计算剪力和弯矩的简便方法	159
9.3 列方程绘制梁的剪力图和弯矩图	160
9.3.1 建立剪力方程和弯矩方程	161
9.3.2 绘制剪力图和弯矩图	161
9.4 用简捷法绘制梁的剪力图和弯矩图	164
9.4.1 $M(x)$ 、 $F_Q(x)$ 、 $q(x)$ 之间的微分关系	165
9.4.2 剪力图与弯矩图的规律	165
9.4.3 简捷法应用实例	167
思考与练习	169



模块 10

梁的应力与强度	173
---------------	-----

学习描述	173
10.1 弯曲梁横截面上的正应力	173
10.1.1 横力弯曲与纯弯曲	173
10.1.2 纯弯曲梁横截面上的正应力	174
10.1.3 纯弯曲梁横截面上正应力的计算公式	175
10.1.4 横力弯曲梁的正应力	178
10.2 梁的正应力强度计算	180
10.2.1 梁的最大正应力	180
10.2.2 梁的正应力强度条件	181
10.3 梁的剪应力强度计算	186
10.3.1 矩形截面梁横截面上的剪应力	186
10.3.2 工字形截面梁横截面上的剪应力	187
10.3.3 圆形截面梁横截面上的最大剪应力	187



10.3.4 梁的剪应力强度条件	189
10.4 提高梁弯曲强度的措施	191
思考与练习	193

**模块 11****应力状态及强度理论** 201

学习描述	201
11.1 应力状态概述	201
11.2 应力状态分析	202
11.2.1 斜截面上的应力	203
11.2.2 应力圆	204
11.2.3 主应力与主平面	206
11.3 梁的主应力迹线的概念	208
11.4 广义胡克定律	209
11.5 强度理论	211
11.5.1 第一强度理论	211
11.5.2 第二强度理论	211
11.5.3 第三强度理论	212
11.5.4 第四强度理论	212
思考与练习	214

**模块 12****梁的变形** 218

学习描述	218
12.1 梁的变形概述	218
12.1.1 挠度和转角	218
12.1.2 梁的挠曲线方程	219
12.1.3 梁的转角方程	219
12.1.4 梁的挠曲线近似微分方程	219
12.2 梁的变形计算	220
12.2.1 用积分法计算梁的变形	220
12.2.2 用叠加法计算梁的变形	224
12.3 梁的刚度计算	226
12.3.1 梁的刚度校核	226
12.3.2 提高梁弯曲刚度的措施	228
12.4 简单超静定梁	229
12.4.1 超静定问题概述	230
12.4.2 简单超静定梁的解法	231
思考与练习	234

模块 13 组合变形 238

学习描述	238
13.1 组合变形概述	238
13.1.1 组合变形的概念	238
13.1.2 组合变形的计算原理及解题步骤	239
13.2 斜弯曲	239
13.2.1 正应力计算	239
13.2.2 强度计算	241
13.3 压缩(拉伸)与弯曲的组合变形	243
13.3.1 单向偏心压缩(拉伸)时的应力计算	244
13.3.2 双向偏心压缩(拉伸)时的应力计算	248
13.3.3 截面核心	250
思考与练习	250

模块 14 压杆稳定 253

学习描述	253
14.1 压杆的稳定性及临界力	253
14.1.1 压杆的稳定性与失稳	253
14.1.2 临界力	254
14.2 细长压杆的临界力计算——欧拉公式	255
14.2.1 临界力的计算公式	255
14.2.2 临界应力和柔度	257
14.2.3 欧拉公式的适用范围	257
14.3 三类压杆及临界应力总图	259
14.3.1 三类压杆	259
14.3.2 中长杆的经验公式	259
14.3.3 临界应力总图	260
14.4 压杆稳定性的校核	260
14.4.1 压杆稳定条件的内容	260
14.4.2 压杆稳定条件的应用	262
14.4.3 提高压杆稳定性的措施	264
思考与练习	265

参考文献	268
-------------------	-----

绪 论



工程力学是土建类专业技术基础课。其中的基本理论、基础知识和处理问题的基本方法,是学习后续专业课程及实际工程技术的基础。本课程的基础知识也是从事建筑设计和施工的工程技术人员必备的理论依据。为了使学生对工程力学课程有总体了解,下面对本课程的研究对象、主要内容、研究方法和学习方法等方面进行介绍。

0.1 工程力学的研究对象

工程力学的内容与工程中的建筑物密切相关。例如,图 0-1 所示的高层建筑、桥梁建筑、水利工程和航空航天器等都是工程力学的研究对象,它们需要用工程力学的知识分析计算,以确保建筑物能够安全、经济和美观。因此,工程力学是一门与工程实际联系最为紧密的、最为重要的专业基础课。



(a) 高层建筑



(b) 桥梁建筑 (赵州桥)



(c) 水利工程 (长江三峡水利工程)



(d) 航空航天器

图 0-1 工程力学的研究对象



1. 构件

在建筑物中用来支承荷载、传递荷载、起骨架作用的部分称为**结构**。组成结构的各个部件称为结构的**构件**。也就是说,结构是若干构件按一定规律组合而成的。例如,由梁、墙、板、柱、基础等构件组成的房屋结构,由桥面梁、桥墩、基础等构件组成的公路与铁路工程中的桥梁结构,等等。

在工程实际中,构件的形式多种多样,为了方便研究,一般情况下将构件归纳为以下三类。

1) 杆件

在实际的工程结构中,许多承力构件如桥梁,汽车传动轴,房屋的梁、柱等,其长度方向的尺寸远远大于横截面尺寸,这一类的构件称作杆件。杆件是工程实际中应用最为广泛的一种构件,如图 0-2 所示的房屋结构和桥梁结构都是由杆件组成的。杆件是很多实际结构必备的构件之一,因此结构中的杆件是工程力学课程研究的主要对象。

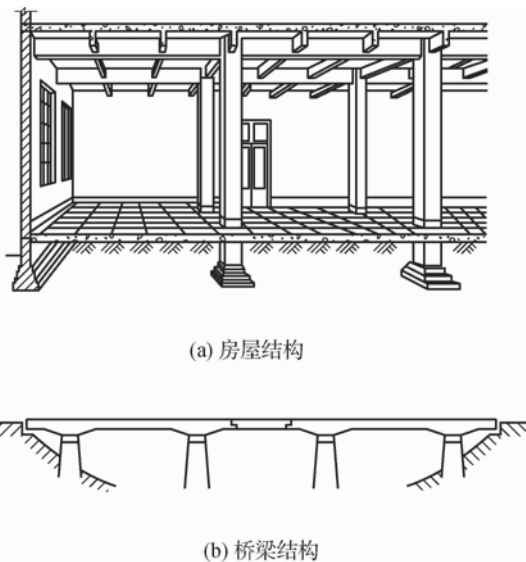


图 0-2 杆件组成的结构简图

杆件的横截面可以是多种多样的,常见的横截面形状有矩形、圆形、工字形、L 形、槽形、箱形、圆环形等。杆件常用横截面和轴线两个主要的几何元素来描述。横截面是垂直于杆件轴线的截面,轴线是杆件各个横截面形心的连线。过轴线各点的横截面总是与轴线垂直。此外,把平行于杆件轴线的截面,称为纵截面;把既不平行也不垂直于杆件轴线的截面,称为斜截面。杆件的几何元素如图 0-3 所示。

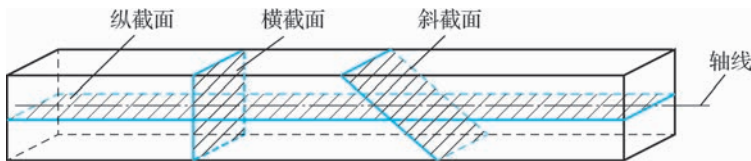


图 0-3 杆件的几何元素

轴线为直线的杆件称为直杆,轴线为曲线的杆件称为曲杆,如图 0-4 所示。工程实际中所遇到的杆件多数为等截面直杆(等直杆),如图 0-4(a)所示,常见的有楼面梁、房屋梁、桥梁及桁架中的各杆;有时也会遇到变截面直杆,如图 0-4(b)、(c)所示,如阳台用的悬挑梁等;也有如图 0-4(d)所示的轴线为曲线的杆件,如旋转楼梯梁等。

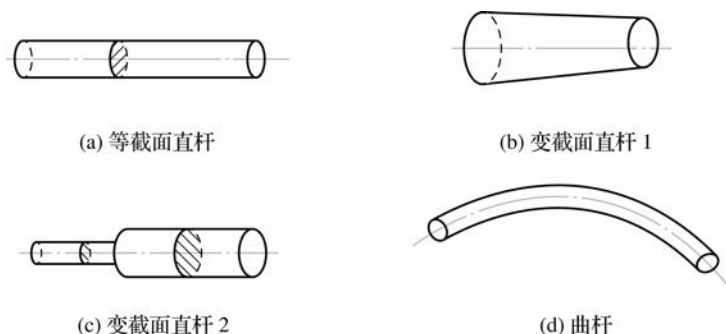


图 0-4 直杆和曲杆

本书主要研究等截面直杆。

2) 板和壳

板和壳都是宽而薄的构件,如图 0-5 所示。板和壳厚度中间的一个面称为中面。中面是平面的称为板,中面是曲面的称为壳。这类构件多用作建筑物水平方向的承重构件,如楼板、屋顶等。

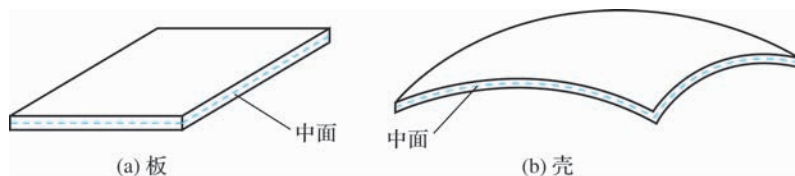


图 0-5 板和壳

3) 块体

块体是指长、宽、高三个尺度大体相近的构件,如图 0-6 所示。块体内部大多为实体结构,如房屋的柱基础、大坝坝体、挡土墙等。

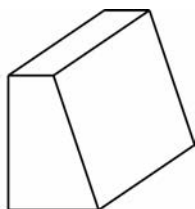


图 0-6 块体

2. 荷载

1) 荷载的概念

任何结构物在其使用的过程中都会受到来自其他物体的作用力。例如,桥面梁上受到



的作用力有桥梁本身的重力、车辆的压力及桥桩的支承力等。**荷载**是指主动作用在构件上的力,包括建筑物的自重(来自地球的作用力),车辆、货物、人群的压力,风、雪、水、土等其他物体对结构或构件的压力等。对于上面提到的桥梁来说,桥梁本身的重量与车辆的压力就是它所受到的荷载,而桥桩对桥面梁的支承力则是由荷载引起的被动力,常称为桥梁的约束反力。对于物体来说,没有荷载的作用就不会有约束反力的存在。因此,荷载是主动力,而约束反力是被动力。

2) 集中荷载

当力的作用面积很小,远远小于构件表面尺寸时,为了使计算简化,我们常常忽略力的作用范围,认为力集中作用于构件的一点上,称为集中力。如果力是作用在物体上的荷载,则称为集中荷载,如图 0-7(a)所示。例如,车轮对于桥面的作用力可视为桥的**集中荷载**。

3) 均布荷载

如果荷载是连续分布在物体体积内的,称为体分布荷载,如构件的自重;如果荷载是连续分布在物体表面的,称为面分布荷载,如风、雪的压力及船底、水库堤坝受到的水压力等;如果荷载连续分布在物体的一条线上且互相平行,称为**线分布荷载**,如梁的自重。线分布荷载常用线荷载集度 q 来表示。 q 是指单位长度上所受到的力,单位为 N/m 或 kN/m 。如果分布荷载是均匀分布的,则称为**均布荷载**[见图 0-7(b)],这时荷载集度 q 为常数。

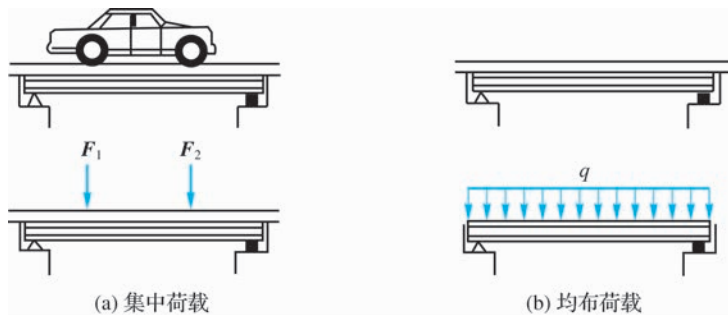


图 0-7 集中荷载和均布荷载

0.2 工程力学的主要内容

工程力学主要包括静力学和材料力学两大部分。

1. 静力学

本书模块 1、模块 2 和模块 3 为静力学内容。静力学是工程力学的重要基础,主要研究结构构件的受力问题和平衡问题,包括物体的受力分析、力系的简化与力系的平衡等静力学基础理论。

2. 材料力学

本书模块 4 至模块 14 为材料力学部分。材料力学主要研究单个构件在荷载作用下产生的内力、变形、构件的承载能力及建筑结构构件的受力情况等问题,为设计既安全又经济的结构构件,选择适当的材料、截面形状和尺寸,以及为建筑设计及解决施工中的受力

问题提供基本的力学知识和计算方法。

0.3 工程力学的研究方法

工程力学主要采用理论分析、试验研究和计算机分析三种研究手段。

理论分析是以基本概念和定理为基础,经过数学推理得到问题的答案。其中,静力学部分主要采用理论研究的方法;而材料力学部分,构件的强度、刚度和稳定性问题都与所选材料的力学性能有关,材料的力学性能是材料在力的作用下,抵抗变形和破坏等表现出来的性能,它必须通过材料试验才能测定。因此,试验方法是材料力学的重要方法之一。在材料力学中,常常采用试验研究与理论分析相结合的方法研究问题。先从试验中发现某种规律,然后通过理论分析的手段对其进行归纳总结得出相应的结论。而大型桥梁和高层建筑等结构计算都是借助计算机分析来完成的。

0.4 工程力学的学习方法

由于工程力学在整个专业培养中占有非常重要的地位,并且其内容多、强度大,所以学习时应着重注意以下几点。

- (1) 课前预习,认真听课,课后复习。
- (2) 理解基本概念和基本方法,掌握重点内容和解题思路。
- (3) 经常与同学讨论,多请教老师。
- (4) 做一定量的习题,认真、独立地完成作业。

应该强调的是:做习题是学好工程力学的重要手段。只有经过大量的练习,才能真正掌握力学的基本概念、基本定理以及求解力学问题的方法,提高计算能力。除了完成课堂上布置的作业和书中习题外,读者还可以参阅各种课外习题解答,从而提高自己的解题能力。对做题过程中出现的错误应认真分析,找出原因及时加以纠正。

模块 1

静力学的基础知识



学习描述

知识目标

- (1) 掌握刚体、力、平衡等概念以及静力学基本公理和基本定理。
- (2) 掌握各种常见约束的性质,正确表示出其相应的约束反力。
- (3) 了解力矩、力偶矩的基本概念,掌握力偶的基本性质及其推论的内容,熟练掌握力矩的计算方法。

技能目标

- (1) 能正确画出约束反力,并能正确画出各种工程结构及其构件的受力图。
- (2) 能熟练应用力矩及力偶的性质解决实际问题。

静力学主要研究力系的简化,以及物体在力系作用下的平衡问题,而静力学中的物体又都被看作刚体,所以也称为刚体静力学。本模块主要介绍静力学的基本概念、物体受力分析的方法及受力图的绘制等内容。静力学的基本概念是静力分析的基础,而物体的受力分析和画受力图是学习本课程必须首先掌握的一项重要基本技能。

1.1 静力学的基本概念

1.1.1 刚体与变形体

刚体是指在任何外力作用下,大小和形状都保持不变的物体。例如,一个圆环在整体和局部分别受力时均可被看成刚体,其受力图如图 1-1 所示。

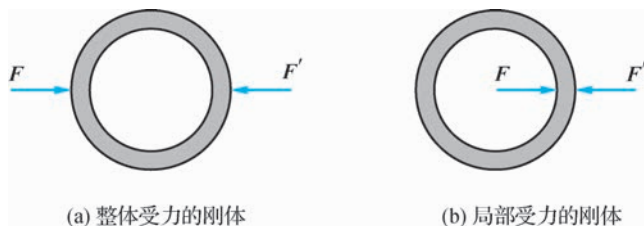


图 1-1 刚体

实际上任何物体在力的作用下都将发生变形,发生变形的物体称为变形体。例如,上述

圆环在力的作用下的变形情况如图 1-2 所示。

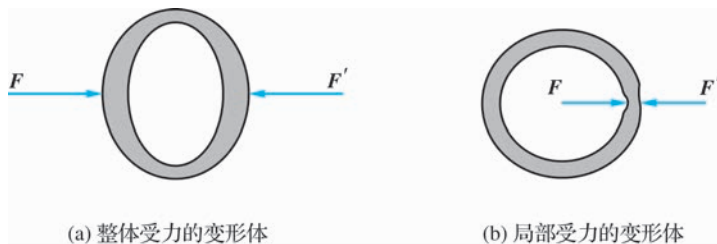


图 1-2 变形体

但在工程实际中许多物体的变形都非常微小,这些微小的变形对于讨论物体的平衡问题影响非常小,可以忽略不计。这样就可以将实际物体看成刚体,使所研究的问题得到简化。这种处理问题的方法即科学研究中常用的抽象化方法。变形体问题将在材料力学部分学习。

1.1.2 力

1. 力的作用效果

力是物体之间的相互机械作用。作用的结果可以是物体的运动状态发生改变,也可以是物体发生变形。力使物体运动状态发生改变的效应,称为力的外效应或运动效应;而力使物体发生形状改变的效应,称为力的内效应或变形效应。静力学只研究力的外效应,而力的内效应则是材料力学的研究内容。

2. 力的三要素

实践表明,力对物体的作用效应取决于力的三要素:力的大小、力的方向和力的作用点,如图 1-3 所示。三要素中任何一个发生变化,都会引起力对物体作用效应的改变。

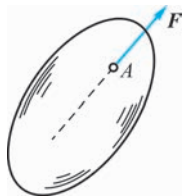


图 1-3 力的三要素

力的大小是指物体间机械作用的强弱。在国际单位制(SI)中,力的单位是牛顿,简称牛,用符号 N 表示。工程中,力的常用单位是千牛顿,简称千牛,用符号 kN 表示。

力的方向包含方位和指向两个方面,如某钢索的拉力竖直向上,则竖直是指力的方位,向上是说它的指向。

3. 力的表示

力是既有大小又有方向的量,所以力是矢量。求合力时应符合矢量运算法则。

力通常用有方向的线段来表示,线段的长(按选定的比例尺)代表力的大小,箭头方向代表力的方向,箭头或箭尾所在的点代表力的作用点,通过力的作用点并沿着力的方向的直线称为力的作用线。



本书中用黑体字母 $\boldsymbol{F}$ 表示力矢量, 而用普通字母 F 表示力的大小。

1.1.3 力系

1. 力系与等效力系

实际的工程结构及其构件会同时受到多个力的作用。通常情况下, 把作用在物体上的一群力称为力系。用简单的力系来代替复杂力系的过程, 称为力系的简化或力系的合成。如果两个力系对物体的作用效果相同, 就称这两个力系为等效力系。应用等效力系可以实现力系的简化。

2. 合力与分力

如果一个力与一个力系等效, 则这个力就称为该力系的合力, 而力系中的各个力都称为合力的分力, 如图 1-4 所示。合力对物体的作用效果等于各分力对物体作用效果的总和。

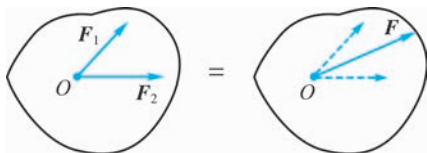


图 1-4 合力与分力

尤其应该注意: 均布荷载合力 F 的计算, 即 $F=ql$, 如图 1-5 所示。

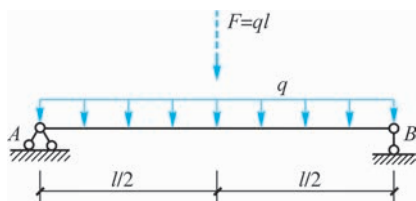


图 1-5 均布荷载合力的计算

1.1.4 平衡

1. 平衡状态

物体相对于地球保持静止或做匀速直线运动的状态, 称为平衡状态, 简称平衡。例如, 房屋、桥梁相对于地球保持静止, 因而它们都是平衡的; 沿直线匀速起吊的构件也是平衡的。

2. 力系的平衡条件

要使物体处于平衡状态, 就必须使作用于物体上的力系满足一定的条件, 这些条件就是力系的平衡条件。物体在各种力系作用下的平衡条件, 在建筑工程中有着十分重要的意义, 是对结构或构件进行静力计算的基础。

3. 平衡力系

作用在物体上使物体保持平衡的力系称为平衡力系。平衡力系中的任何一个力对于其余的力来说都是平衡力, 即任意一个力都与其余的力相平衡。任何平衡力系的合力都为零。

1.2 静力学基本公理

静力学公理是人们对于力的基本性质的概括和总结,它们是静力学的基本规律,是力系简化和平衡理论的依据。

1.2.1 二力平衡公理

1. 二力平衡公理的内容

作用于同一刚体上的两个力,使刚体保持平衡的必要与充分条件是:该二力的大小相等、方向相反且作用于同一直线上。

此公理说明了作用于物体上的最简单的力系平衡时所必须满足的条件,如图 1-6 所示。

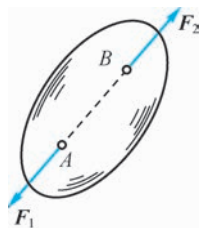


图 1-6 二力平衡公理

2. 二力构件和二力杆件

工程中将只受两个力作用而平衡的构件称为二力构件。由二力平衡公理可知,无论二力构件的形状如何,其所受的两个力必沿它们作用点的连线且等值反向,如图 1-7(a) 所示。当二力构件为直杆时,称为二力杆件,简称二力杆。若二力杆件处于平衡状态,则此二力作用线必与杆的轴线重合,如图 1-7(b) 所示。

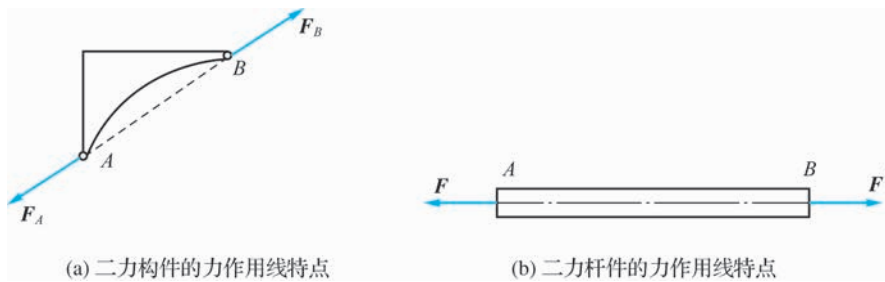


图 1-7 二力构件和二力杆件的力作用线特点

以上是正确做出二力构件和二力杆件两个力作用线的原则。

应用二力构件和二力杆件的概念,可以很容易地判定出结构中某些构件的受力情况。在对实际结构进行受力分析时,正确判断出其中的二力构件和二力杆件并能画出它们的力作用线是十分重要的。

【例 1-1】 画出图 1-8(a) 所示三铰拱中 AB 部分的受力图,不计结构自重。

【解】 由于题中车辆不在 AB 部分上,且不计结构自重,AB 部分与周围只有 A、B 两个



接触点,只可能通过 A、B 两点受力,因此 AB 部分是一个二力构件,故 A、B 两点的作用力必沿 A、B 两点的连线,如图 1-8(b)所示。

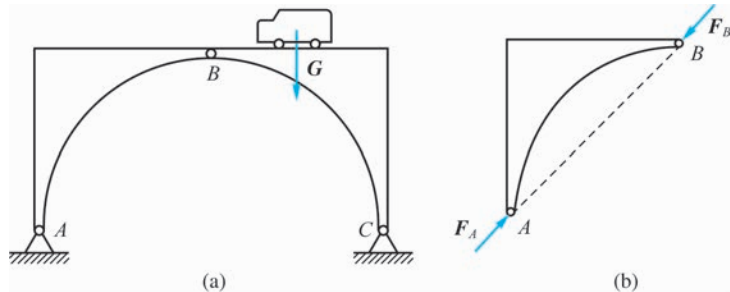


图 1-8 【例 1-1】图

【例 1-2】 试画出图 1-9(a)中 CD 杆件的受力图,不计各杆件自重。

【解】 由于外力 F 不在 CD 杆上,且不计 CD 杆自重,CD 杆与周围只有 C、D 两个接触点,只可能通过 C、D 两点受力,因此 CD 杆是一个二力杆件,故 C、D 两点的作用力必沿 C、D 两点的连线。其受力图可能是图 1-9(b)、(c)所示两种情况中的一种。

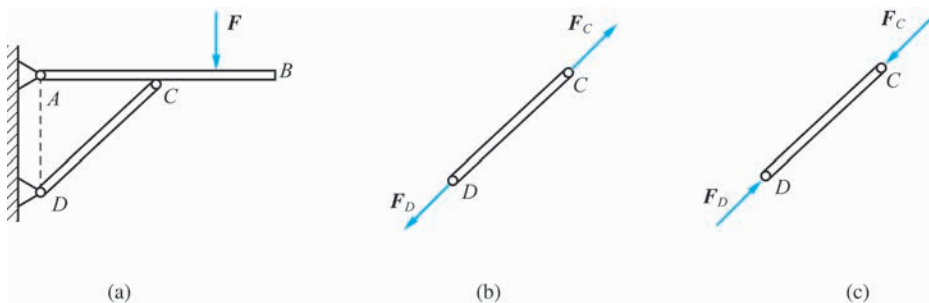


图 1-9 【例 1-2】图

1.2.2 加减平衡力系公理

1. 加减平衡力系公理的内容

在作用于刚体的力系上,加上或减去任意的平衡力系,并不能改变原力系对刚体的作用效应,这就是加减平衡力系公理。

应用加减平衡力系公理可以对力系进行简化,此公理也是研究力系等效变换的重要依据。

2. 力的可传性原理

作用于刚体上某点的力,可以沿其作用线移到刚体上任意一点,而不改变该力对刚体的作用效果,这就是力的可传性原理。

证明:如图 1-10(a)所示,设力 F 作用在 A 点。根据加减平衡力系公理,可在其作用线上任取一点 B,加上一个平衡力系 F_1 和 F_2 ,并使 $F_1 = F_2 = F$,如图 1-10(b)所示。 F 和 F_2 形成一个新的等效力系,可以去掉。此时只剩下作用在 B 点上的力 F_1 ,由于 F_1 与 F 等效,就相当于把作用在 A 点的力 F 沿其作用线移到 B 点,如图 1-10(c)所示。由此,力的可传性得到证明。

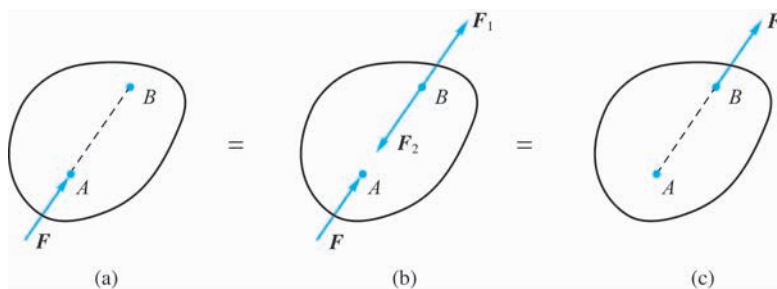


图 1-10 力的可传性原理证明图

力的可传性原理的应用条件:力只能在所作用的同一刚体内滑移,而不能移到刚体外的其他物体上。

应该指出:无论是二力平衡公理、加减平衡力系公理,还是力的可传性原理都只适用于刚体而不适用于变形体。例如,图 1-11 所示的两根软绳,当受到两个等值反向的拉力作用时可以保持平衡,而当受到两个等值反向的压力作用时则不能保持平衡。



图 1-11 绳子的受力情况

1.2.3 力的平行四边形法则

1. 力的平行四边形法则的内容

力的平行四边形法则:作用于刚体上同一点的两个力可以合成为一个合力,合力的作用点也作用于该点上,合力的大小及方向可由以这两个力为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示,如图 1-12 所示。

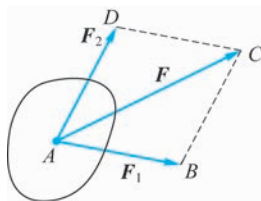


图 1-12 力的平行四边形法则和三角形法则

力的平行四边形法则是力系合成与分解的基础,是力系简化的重要依据。这种求合力的方法称为矢量加法。其矢量表达式为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

即作用于物体上同一点的两个力 $\mathbf{F}_1$ 与 $\mathbf{F}_2$ 的合力 $\mathbf{F}$ 等于这两个力的矢量和。



2. 力的三角形法则

为了方便,在上述力的平行四边形中,只需画出力的平行四边形的一半即可。其方法是:从任意点 A 画出某一个分力,在其末端 B 处画出另一个分力,最后矢量 AC 即表示合力 F ,如图 1-13 所示。 $\triangle ABC$ 称为力的三角形,此种求合力的方法称为力的三角形法则。

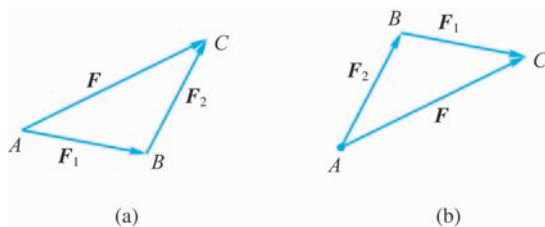


图 1-13 力的三角形法则

3. 三力平衡汇交定理

当一刚体受共面且不平行的三个力作用而平衡时,这三个力的作用线必汇交于一点,称为三力平衡汇交定理。

此定理常用来确定物体在共面且不平行的三个力作用下平衡时其中一个未知力的方向。

证明:一刚体受三个力 F_1 、 F_2 、 F_3 的作用而平衡,如图 1-14(a)所示。根据力的可传性原理,将力 F_1 、 F_2 移到汇交点 O 处,并合成为力 F_{12} ,则 F_3 应与 F_{12} 平衡,如图 1-14(b)所示。根据二力平衡条件, F_3 与 F_{12} 必等值、反向、共线,所以 F_3 必通过 O 点,且与 F_1 、 F_2 共面,定理得证。

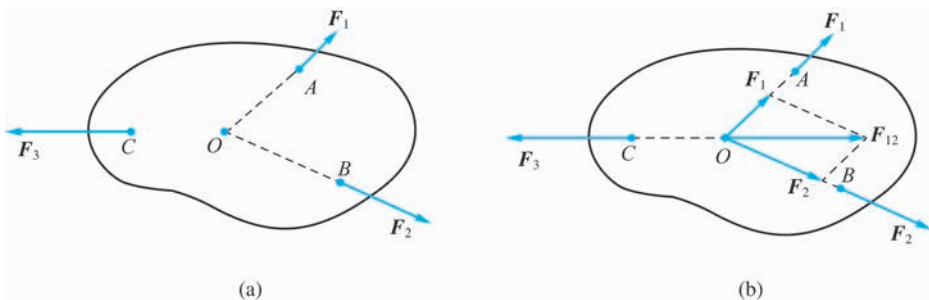


图 1-14 三力平衡汇交定理

1.2.4 作用与反作用公理

作用与反作用公理:两物体间相互作用的力总是同时存在且大小相等、方向相反、沿同一直线,分别作用在两个相互作用的物体上。

如果将相互作用力之一视为作用力,则另一作用力即反作用力。用 F' 表示力 F 的反作用力。作用力与反作用力公理概括了自然界中物体间相互作用的关系,没有作用力也就没有反作用力,它是分析物体受力时必须遵循的原则。

例如,地面上有一个物体处于静止状态,如图 1-15(a)所示。物体对地面有一个作用力 F_N , F_N 作用在地面上,而地面对物体也有一个反作用力 F'_N , F'_N 作用在物体上。力 F_N 和 F'_N 大小相等、方向相反、沿同一条直线分别作用在地面和物体上,是一对作用力和反作用力,如图 1-15(b)所示。物体上作用的两个力 G 和 F'_N 处于平衡状态,因此力 G 和 F'_N 是一对平衡力,如图 1-15(c)所示。

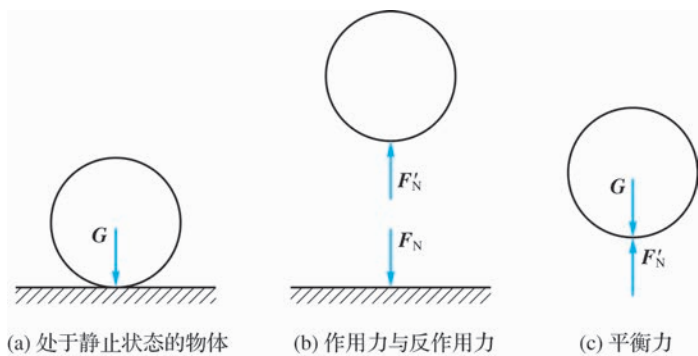


图 1-15 作用与反作用公理

必须注意,作用力和反作用力是分别作用在两个相互作用的物体上的,不能错误地与二力平衡公理混同起来。

1.3 约束及约束反力

在静力学中,需要对研究对象进行受力分析,画出其受力图,并计算出研究对象所受到的所有约束反力。约束和约束反力问题是静力学中的重点内容,也是本课程的基础,应予以重视。

1.3.1 约束及约束反力概述

1. 自由体和非自由体

在力学中通常把物体分为自由体和非自由体两类。

如果一个物体在空间的位移不受任何限制,可以自由运动,则称此物体为自由体,如空中飞行的飞机、人造卫星等(见图 1-16)。



图 1-16 自由体

工程中大多数物体的运动都要受到一定的限制,使其在某些方向上的运动不能发生。



凡是受到周围物体的限制,不能在某些方向上运动的物体,均被称为非自由体,如楼房建筑、桥梁建筑等(见图 1-17)。



(a) 楼房建筑



(b) 桥梁建筑

图 1-17 非自由体

2. 约束和约束反力及其方向的确定

在工程实际中,组成结构的任何构件都是非自由体,即都要受到与其相接触的其他构件的限制而不能自由运动,如房屋中的梁受到两端柱子的约束不能自由运动而保持平衡,楼板受到梁的约束而保持平衡,等等。

1) 约束

当物体受到约束时,被约束物体与约束物体之间必然有相互作用力。在力学中,把限制物体运动的其他物体称为约束。工程结构如果没有约束,将不能承受荷载以满足各种需要。约束是以物体相互接触的方式构成的。例如,对桥梁结构来说,支座是桥梁的约束,基础是柱子的约束,柱子是大梁的约束;对房屋结构来说,楼房梁是板的约束,柱是梁的约束,基础是墙柱的约束,等等。

工程力学的研究对象通常是被约束物体,而不是其周围的约束。

2) 约束反力

物体受到的力一般可分为两类:主动力和约束反力。使物体运动或使物体有运动趋势的力,称为主动力(荷载),如重力、风力、水压力、土压力等。对物体的运动或运动趋势起限制作用的力,称为约束反力,简称反力。

3) 约束反力方向的确定原则

约束与物体相互接触并向物体提供约束反力。约束反力取决于约束本身的性质、主动力和物体的运动状态。约束反力阻止物体运动,其作用点在相互接触处。约束反力的方向总是与物体的运动或运动趋势方向相反,这是确定约束反力方向的原则。

在静力学中,约束反力和主动力组成平衡力系。一般情况下,主动力是已知的,而约束反力一般是未知待求的,通常用平衡条件求出未知的约束反力。

1.3.2 常见约束类型及其反力的特点

如何确定一个物体所受的约束反力是静力学中的重要内容之一。现介绍工程中几种常见的约束类型,并研究它们的约束反力方向的确定方法。

1. 柔体约束

由柔软的、不可伸长的、不计重量的绳索、皮带、链条等柔性体连接物体所形成的约束,统称为柔体约束。这类约束的特点是只能限制物体沿着柔体伸长的方向运动,所以柔体约

束反力只能是拉力。例如,一根重量为 G 的牛腿柱被吊起,钢丝绳通过 A 、 B 两点与牛腿柱连接,如图 1-18(a)所示。两个约束反力 F_A 与 F_B 分别与 AC 线和 BC 线重合,其指向背离牛腿柱,作用点分别在 A 、 B 两点上,如图 1-18(b)所示。

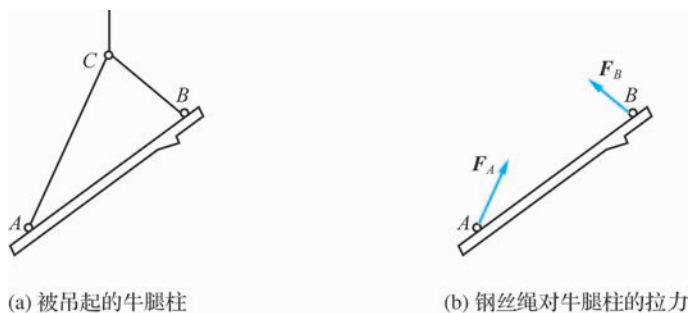


图 1-18 柔体约束

2. 光滑接触面约束

当两个物体直接接触且接触面间的摩擦力很小可以忽略不计时,两个物体间的约束为光滑接触面约束。光滑接触面约束反力过接触点沿公法线方向指向被约束物体,所以只能是压力,作用点在接触点处,方向垂直于接触面而指向被约束物体,常用 F_N 表示,如图 1-19 所示。

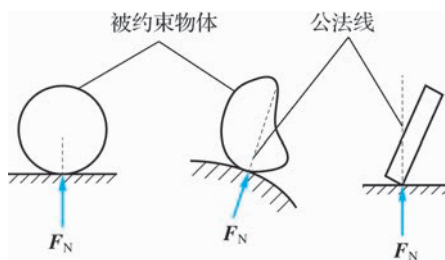


图 1-19 光滑接触面约束

3. 光滑铰链约束

1) 中间铰链约束

中间铰链简称铰链。在工程实际中,常用圆柱形销钉插入两个构件的圆孔中,将两个构件连接起来。销钉的这种约束称为中间铰链约束,简称铰链约束。例如,门窗上的合页、机器上的轴承等都是中间铰链约束。中间铰链约束的结构简图如图 1-20(a)、(b)所示;其计算简图如图 1-20(c)所示。如果销钉与圆孔间不计摩擦,可视为两个光滑面接触。所以,当物体受力后,销钉的约束反力应沿接触面的公法线方向,并且通过圆孔和铰链中心,如图 1-20(d)所示。由于接触面的位置与主动力有关,所以当主动力尚未确定时,接触点的位置也不能预先确定。因此,约束反力 F_C 的方向不能预先确定,为方便计算,常用两个相互垂直的分力 F_{Cx} 和 F_{Cy} 来表示,如图 1-20(e)所示。



动画

光滑铰链约束

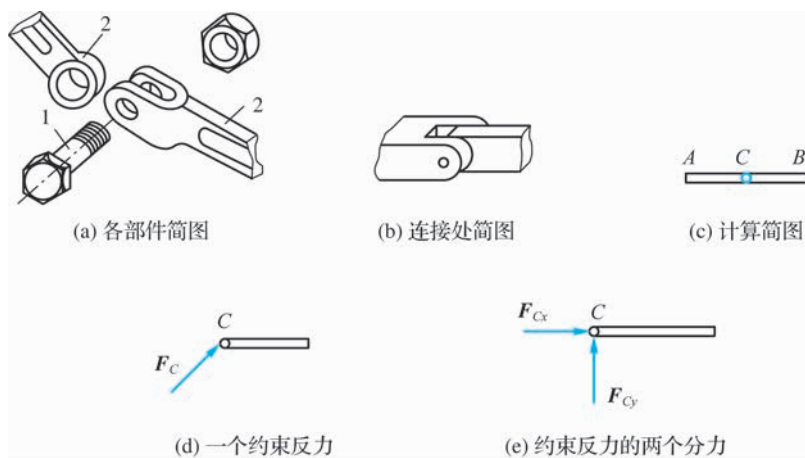


图 1-20 铰链约束

1—销钉；2—构件

2) 固定铰支座

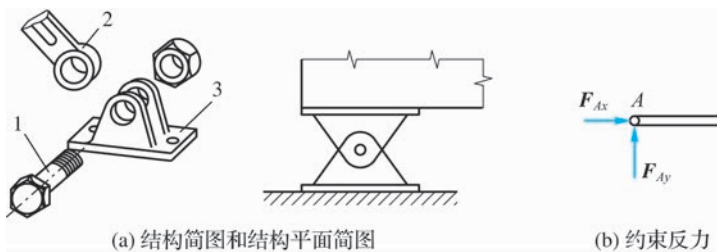
把结构与基础联系起来的装置称为**支座**。支座的作用是传递荷载,固定结构的位置。

用圆柱铰链连接的两个构件中,如果有一个构件固定不动就构成了**固定铰支座**。例如,桥梁的一端与桥墩连接时,常用固定铰支座约束,如图 1-21 所示。



图 1-21 固定铰支座的应用

固定铰支座的结构简图和结构平面简图如图 1-22(a)所示。固定铰支座的约束反力与圆柱铰链相同,是一个大小和方向都由主动力决定的力,通常表示为相互垂直的两个分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} ,如图 1-22(b)所示。在计算简图中用两根互相不平行的链杆来代替固定铰支座。通常,计算简图有 4 种画法,如图 1-22(c)、(d)、(e)、(f)所示。



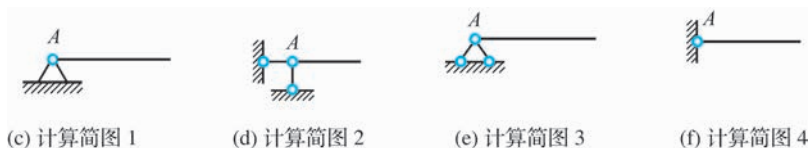


图 1-22 固定铰支座

1—销钉；2—被约束物体；3—固定部分

在工程实际中,桥梁上的某些支座比较接近理想的固定铰支座,而在房屋建筑中这种理想的固定铰支座很少,通常是把限制移动,而允许产生微小转动的支座都视为固定铰支座。例如,将屋架的端部支承在柱子上,并将预埋在屋架和柱子上的两块钢板焊接起来,以阻止屋架的移动,但因焊缝的长度有限,对屋架的转动限制作用很小,故可以把这种装置视为固定铰支座,如图 1-23 所示。

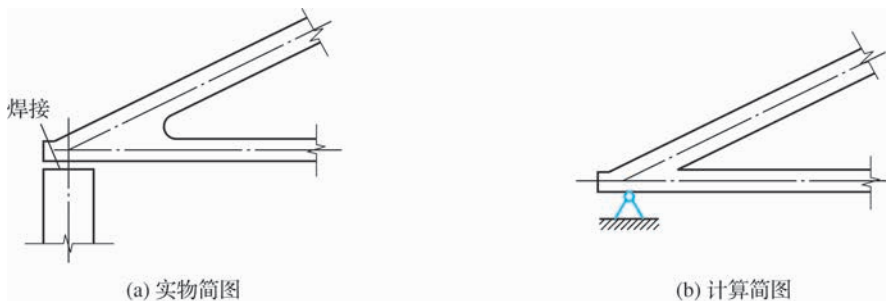


图 1-23 屋架

3) 可动铰支座

将铰链支座用辊轴支承在光滑的支承面上,就构成可动铰支座,其实物简图如图 1-24(a)所示。这种支座可以沿固定面滚动,约束的特点与光滑接触面约束相同,约束反力垂直于支承面,通过圆柱销中心,其大小和方向未知,一般用 F_N 表示。可动铰支座约束反力的计算简图如图 1-24(b)、(c)、(d)所示,约束反力的画法如图 1-24(e)所示。在桥梁、房屋等工程结构中常用可动铰支座来支承较长的梁,它允许梁的支承端沿支承面移动。

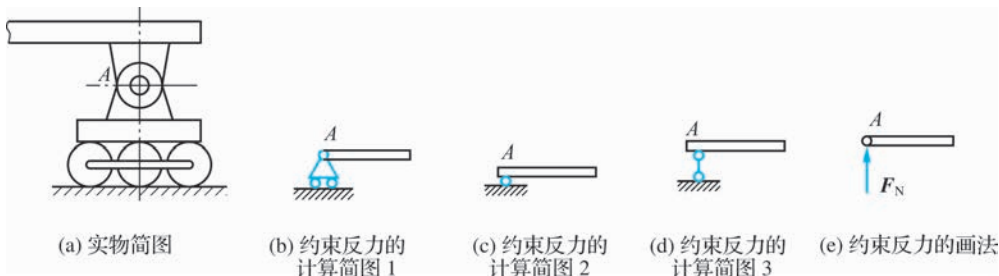


图 1-24 可动铰支座

在实际工程中,理想的可动铰支座是很少的,但能近似看成可动铰支座的装置却很多。例如,钢筋混凝土梁通过混凝土垫块搁置在砖墙上[见图 1-25(a)],就可将砖墙简化为可动铰支座,其计算简图如图 1-25(b)所示。

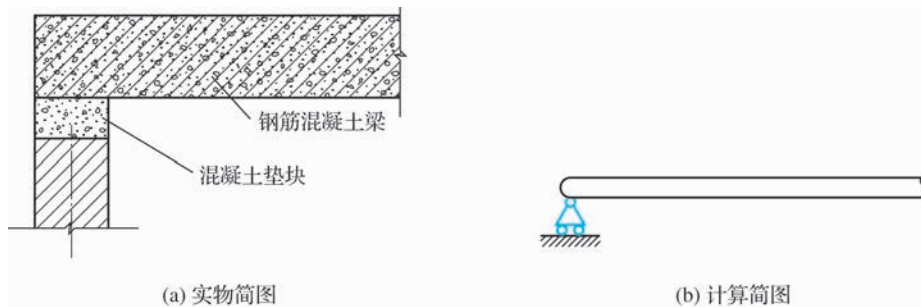


图 1-25 钢筋混凝土梁

4) 链杆约束

两端用光滑铰链与其他构件连接且中间不受力的直杆,称为链杆。如图 1-26(a)所示的 AB 杆就是链杆约束,由于 AB 杆限制了构件与支座间沿杆轴线方向的相对移动,所以约束反力 F_{NA} 的作用线沿链杆轴线,指向待定,如图 1-26(b)所示。

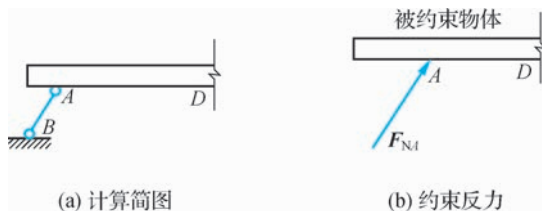


图 1-26 链杆约束

4. 固定端约束

使被约束物体在约束端完全固定(既不能转动又不能移动)的支座,称为固定端支座。如图 1-27(a)所示的房屋建筑中的阳台挑梁,其一端嵌固在墙壁里,或与墙壁、屋内梁一次性浇筑。墙壁对挑梁的约束就是固定端支座。图 1-27(b)为挑梁的计算简图。固定端支座的约束反力一般用三个反力分量来表示,即两个相互垂直的分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和一个反力偶 M_A 。图 1-27(c)为挑梁固定端支座 A 的约束反力。

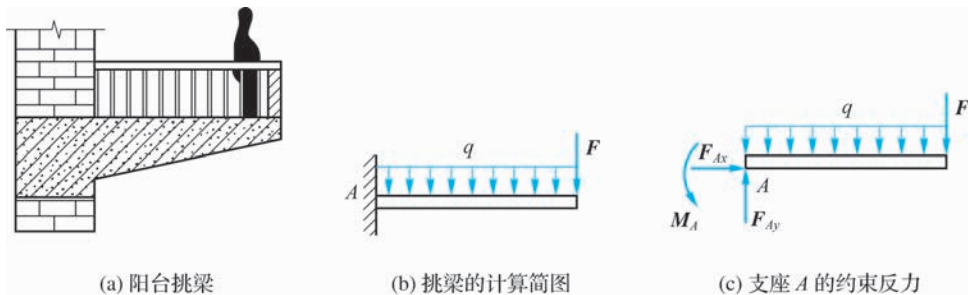
动画
固定端支座

图 1-27 固定端支座

以上是工程中常见的几种约束形式及其反力方向的确定方法。在工程实际问题中所遇到的约束有些并不一定与上面所介绍的形式完全一样,这时就需要对实际约束的构造及其

性质进行分析,分清主次,略去一些次要因素,就可以将实际约束简化为属于上述约束形式之一,以便于计算。

1.4 物体的受力图

为了解决工程实际问题,进行力学计算,我们经常要对物体的受力情况进行分析,即分析物体受到哪些力的作用,力的方向和作用位置如何。这种对物体的受力情况进行全面分析的过程,称为**受力分析**。在对某物体进行受力分析时,需要将被研究的物体从与它相联系的其他物体中分离出来,单独画出计算简图,此步骤称为取研究对象(取分离体)。将作用于研究对象的所有主动力和约束反力在计算简图上画出来所得到的图形,称为研究对象的**受力图**。

画受力图的一般步骤如下。

(1)根据题意选取研究对象。

(2)画作用于研究对象上的主动力。

(3)画约束反力。在去掉约束处,根据约束的类型逐一画出约束反力。应特别注意对二力杆件的判断。

正确地画出研究对象的受力图是求解静力学问题的关键,这是本书的重点内容,必须认真对待,熟练掌握。下面举例说明受力图的画法和步骤。

1.4.1 单个物体的受力图

【例 1-3】 重量为 G 的球用绳索系住靠在光滑的斜面上[见图 1-28(a)],试画出球的受力图。

【解】 (1)取球为研究对象,将它单独画出来。

(2)画出主动力(重力为 G)。 G 作用于球心且铅垂向下。

(3)画约束反力。光滑斜面对球的约束反力是 F_{NB} ,它通过切点 B 并且沿公法线指向球心 O ;绳索对球的约束反力是 F_{TA} ,它通过接触点 A 沿绳索的中心线而背离球。球的受力图如图 1-28(b)所示。

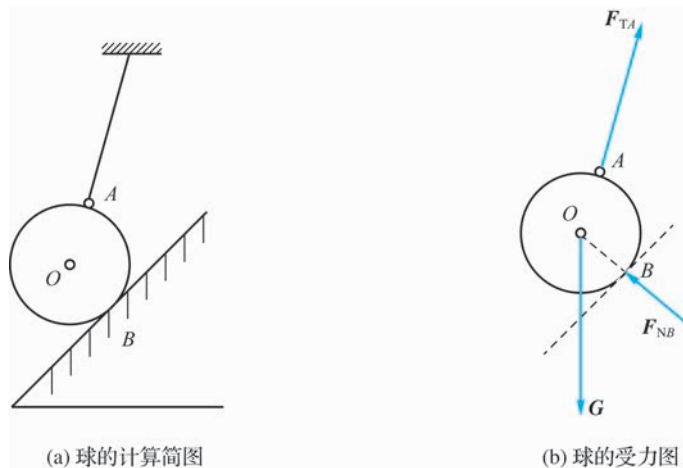


图 1-28 【例 1-3】图



【例 1-4】 画出图 1-29(a)所示的简支梁的受力图。

【解】 (1)取梁 AB 为研究对象。解除 A 、 B 支座的约束,将其从周围的物体中分离出来。

(2)画出主动力。按主动力 F 的位置和大小在梁 AB 的计算简图上画出力 F 。

(3)画出约束反力。 B 支座为单链杆支座,解除约束后,其反力 F_B 应沿垂直方向,指向暂设向上。 A 支座为固定铰支座,其约束反力必定经过 A 点,根据三力平衡汇交定理可知,其作用线应通过 F_B 和 F 的交点 O ,所以反力 F_A 的作用线可以完全确定,方向假设为右上方,如图 1-29(b)所示。

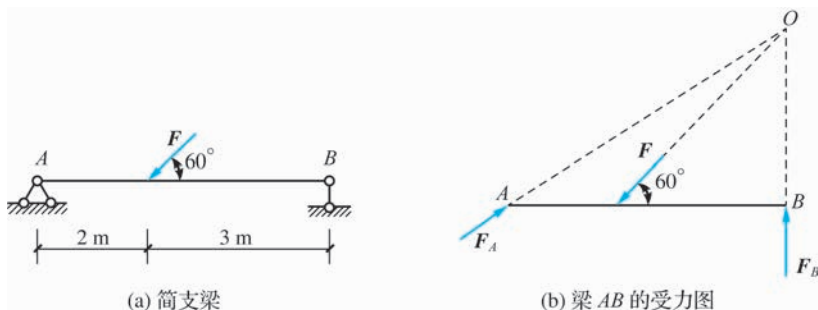


图 1-29 【例 1-4】图

1.4.2 物体系统的受力图

由两个或两个以上的物体所组成的系统,称为物体系统。其受力图的画法与单个物体受力图的画法基本相同,只是所取的研究对象一般既要取物体系统这个整体,又要取系统中的某个构件。在对系统整体进行受力分析时,要画出整体的主动力和约束反力,但物体系统内各构件之间的相互作用力属于作用力与反作用力,作用效果相互抵消,不应画出来。

【例 1-5】 如图 1-30(a)所示,水平均质梁 AB 用斜杆 CD 支承, A 、 C 、 D 三处均为光滑铰链连接。水平均质梁 AB 重 G_1 ,其上放置一台重量为 G_2 的电动机,不计杆 CD 的自重,试分别画出杆 CD 和梁 AB (包括电动机)的受力图。

【解】 (1)取杆 CD 为研究对象,由于杆 CD 的两端为光滑铰链,自重不计,所以杆 CD 为二力杆,根据经验判断,此处杆 CD 受压力,杆 CD 的受力图如图 1-30(b)所示。

(2)取梁 AB (包括电动机)为研究对象,它受到 G_1 、 G_2 两个主动力的作用。梁 AB 在铰链 D 处受二力杆 CD 约束反力 F_{ND} 的作用。根据作用与反作用公理, F'_{ND} 与 F_{ND} 方向相反。梁受固定铰支座约束反力的作用,由于方向未知,可用两个大小未定的正交分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 来表示。梁 AB 的受力图如图 1-30(c)所示。

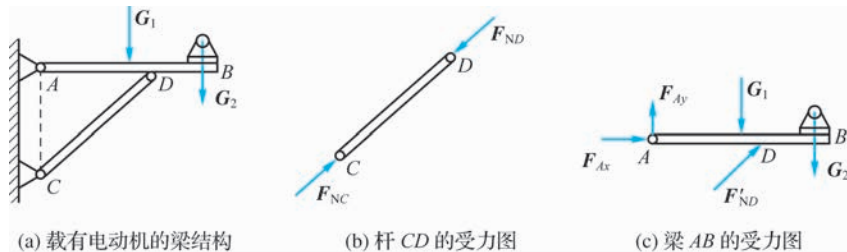


图 1-30 【例 1-5】图

【例 1-6】 画出如图 1-31(a)所示多跨静定梁的受力图(包括整体与 AC 梁、CD 梁的受力图)。

【解】 (1)画出整体受力图[见图 1-31(b)]。取整体为研究对象,解除所有与地面相连的支座约束。由于 A 端为固定铰支座,所以解除约束后应有两个支座反力 F_{Ax} 和 F_{Ay} ;B 支座为单链杆支座,其约束反力 F_B 沿链杆方向;D 端为可动铰支座,且与地面成 30° 夹角,因此该端的约束反力 F_D 应与铅垂线成 30° 夹角。图 1-31(b)中的反力方向均为假设。

(2)画出 AC 梁与 CD 梁的受力图[见图 1-31(c)、(d)]。与整体受力图的不同之处在于,AC 梁的受力图和 CD 梁的受力图在铰 C 处分开,因此左右各有约束反力 F_{Cx} 、 F_{Cy} 和 F'_{Cx} 、 F'_{Cy} 存在,并彼此形成作用力与反作用力。

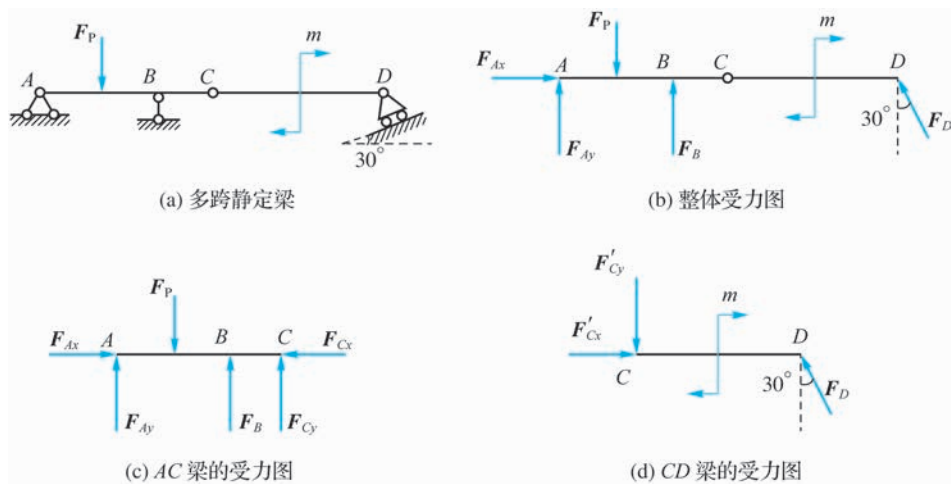


图 1-31 【例 1-6】图

通过以上各例题,总结出画受力图时的注意事项有以下几点。

(1)凡是在去掉约束的地方都要画上约束力,并要根据约束类型画出作用线的位置,同时假设约束力的方向。

(2)若有二力构件,一定要根据二力平衡公理确定出约束力的作用点和作用线。

(3)若研究对象受三个不平行的共点力的作用而平衡,则可根据三力平衡汇交定理确定某一约束力的作用线,并假设其方向。

(4)每画出一个力都要清楚其施力物体是哪个物体,既不要多画力,也不要少画力。在画几个物体组合的受力图时,研究对象内各部分间的相互作用力不能画出来,研究对象对周围物体的作用力也不能画出来。

(5)对于物体系统,在画相互作用的两个物体的受力图时,应遵循作用力与反作用力的关系,作用力的方向一经假定,则反作用力的方向必与之相反。

1.5 力矩与力偶

力对刚体作用使刚体产生两种运动效应,即移动效应和转动效应。在平面力系中描述力对刚体的转动效应有两种物理量,即力对某一点的力矩和力偶。



1.5.1 力矩及合力矩定理

1. 力矩

力可以使物体产生移动效应,也可以使物体产生转动效应。下面以扳手拧螺母为例来说明力使物体产生的**转动效应**。

如图 1-32 所示,在扳手上的 A 点施加一个力 F ,将使扳手和螺母一起绕螺钉中心点 O 转动,这就是说,力可以使物体(扳手)产生转动效应。实践经验表明,扳手的转动效果不仅与力 F 的大小有关,而且还与 O 点到力作用线的垂直距离 d 有关。当 d 保持不变时,力 F 越大,物体转动越快;当力 F 不变时, d 越大,物体转动也越快。若改变力的作用方向,则扳手的转动方向就会发生改变,因此,我们用 F 与 d 的乘积再加上正负号来表示力 F 使物体绕 O 点转动的效应,并称之为**力 F 对 O 点之矩**,简称**力矩**,以符号 $M_O(F)$ 表示,即

$$M_O(F) = \pm Fd \quad (1-1)$$

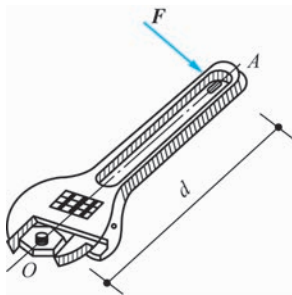


图 1-32 扳手

O 点称为转动中心,简称**矩心**。矩心 O 到力作用线的垂直距离 d 称为**力臂**。力矩的单位是牛顿米($N \cdot m$)或千牛顿米($kN \cdot m$)。

式(1-1)中的正负号表示力矩的转向。通常规定:力使物体绕矩心做逆时针方向转动时,力矩为正,反之为负。因此,力矩为代数量。

由图 1-33 可以看出,力对点之矩还可以用以矩心为顶点,以力矢量为底边所构成的三角形面积的 2 倍来表示,即

$$M_O(F) = \pm 2S_{\triangle OAB} \quad (1-2)$$

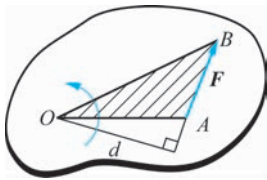


图 1-33 力矩三角形

显然,力矩在下列两种情况下等于零。

(1) 力等于零。

(2) 力的作用线通过矩心,即力臂等于零。

【例 1-7】 如图 1-34 所示,已知 $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 30 \text{ kN}$ 。试分别计算两个力对 O 点的

力矩。

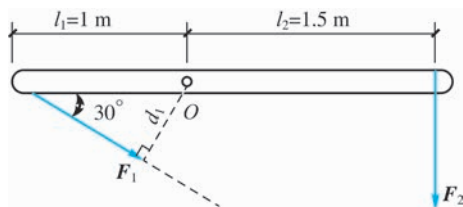


图 1-34 【例 1-7】图

【解】 由式(1-1),有

$$\begin{aligned} M_O(\mathbf{F}_1) &= F_1 d_1 = 10 \times 1 \times \sin 30^\circ \\ &= 5 (\text{kN} \cdot \text{m}) \\ M_O(\mathbf{F}_2) &= -F_2 l_2 = -30 \times 1.5 \\ &= -45 (\text{kN} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

2. 合力矩定理

力系对物体的作用效应可以用它的合力 $\mathbf{F}$ 来代替,而力使物体绕某点的转动效应则由力对该点之矩来度量,因此一个力系对某点的作用效应通常用合力矩定理来计算。

合力对某点之矩等于力系中各分力对同一点之矩的代数和,这就是合力矩定理。

合力矩定理是力学中应用十分广泛的一个重要定理,下面以两个汇交力系的情形予以证明。

证明:如图 1-35 所示,设在物体上的 A 点作用两个汇交的力 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$,该力系的合力为 $\mathbf{F}_R$ 。在力系的作用面内任选一点 O 为矩心,过 O 点并垂直于 OA 作 y 轴。从各力矢量的末端向 y 轴作垂线,令 F_{y1} 、 F_{y2} 和 F_{Ry} 分别表示力 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 和 $\mathbf{F}_R$ 在 y 轴上的投影。由图 1-35 可知, $F_{y1} = \overline{Ob}_1$, $F_{y2} = -\overline{Ob}_2$, $F_{Ry} = \overline{Ob}$,各力对 O 点之矩分别为

$$\left. \begin{aligned} M_O(\mathbf{F}_1) &= 2S_{\triangle AOB_1} = \overline{Ob}_1 \cdot \overline{OA} = F_{y1} \cdot \overline{OA} \\ M_O(\mathbf{F}_2) &= -2S_{\triangle AOB_2} = -\overline{Ob}_2 \cdot \overline{OA} = F_{y2} \cdot \overline{OA} \\ M_O(\mathbf{F}_R) &= 2S_{\triangle AOB} = \overline{Ob} \cdot \overline{OA} = F_{Ry} \cdot \overline{OA} \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

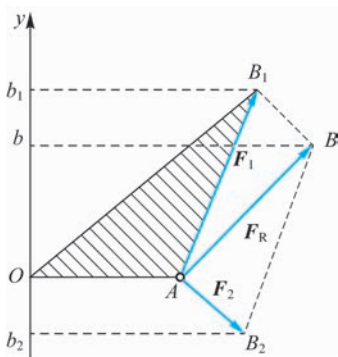


图 1-35 合力矩定理



根据合力投影定理(参见 2.1 节)有

$$F_{Ry} = F_{y1} + F_{y2}$$

上式两边同乘以 $\overline{OA}$, 得

$$F_{Ry} \cdot \overline{OA} = F_{y1} \cdot \overline{OA} + F_{y2} \cdot \overline{OA}$$

将式(1-3)代入得

$$M_O(F_R) = M_O(F_1) + M_O(F_2)$$

以上证明可以推广到多个汇交力系的情况, 用式子可表示为

$$M_O(F_R) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_n) = \sum M_O(F) \quad (1-4)$$

合力矩定理适用于有合力的平面力系。

【例 1-8】 如图 1-36 所示, 每 1 m 长挡土墙所受土压力的合力为 F_R , 其大小 $F_R = 200 \text{ kN}$, 其方向如图所示, 求 F_R 使墙倾覆的力矩。

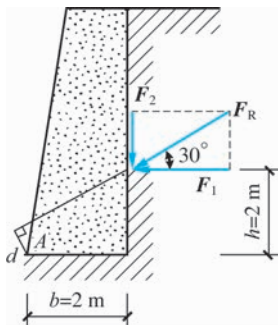


图 1-36 【例 1-8】图

【解】 F_R 可使挡土墙绕 A 点倾覆, 求 F_R 使墙倾覆的力矩, 就是求它对 A 点的力矩。 F_R 力臂的求解较麻烦, 但如果将 F_R 分解为两个分力 F_1 和 F_2 , 而两个分力的力臂是已知的, 由合力矩定理可知, 合力 F_R 对 A 点之矩等于 F_1 、 F_2 对 A 点之矩的代数和, 即

$$\begin{aligned} M_A(F_R) &= M_A(F_1) + M_A(F_2) = F_1 h - F_2 b \\ &= 200 \times \cos 30^\circ \times 2 - 200 \times \sin 30^\circ \times 2 \\ &= 146.41 (\text{kN} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

【例 1-9】 求图 1-37 所示分布荷载对 A 点之矩。

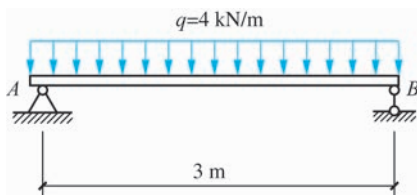


图 1-37 【例 1-9】图

【解】 沿直线平行分布的线荷载可以合成为一个合力, 合力的方向与分布荷载的方向相同, 合力的作用线通过荷载图的中心, 合力的大小等于荷载图的面积, 即 $Q = 3q = 3 \times 4 = 12 \text{ kN}$ 。

由合力矩定理可知, 分布荷载对某点之矩就等于其合力对该点之矩, 故题中均布荷载对 A 点之矩为

$$M_A(q) = -12 \times 1.5 = -18 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

1.5.2 力偶及力偶的基本性质

1. 力偶及其三要素

在生产实践和日常生活中,经常遇到大小相等、方向相反、作用线不重合的两个平行力所组成的力系。工程中把这种最简单的力系称为力偶。力偶只能使物体产生转动效应而不能使物体产生移动效应。例如,用手拧水龙头、司机用双手转动方向盘等,如图 1-38(a)、(b)所示。

图 1-38(c)所示的力 F 与 F' 构成一力偶,记作 (F, F') 。组成力偶的两个力所在的平面,称为力偶作用面。两个力作用线之间的垂直距离 d ,称为力偶臂。力偶使物体转动的方向,称为力偶的转向。

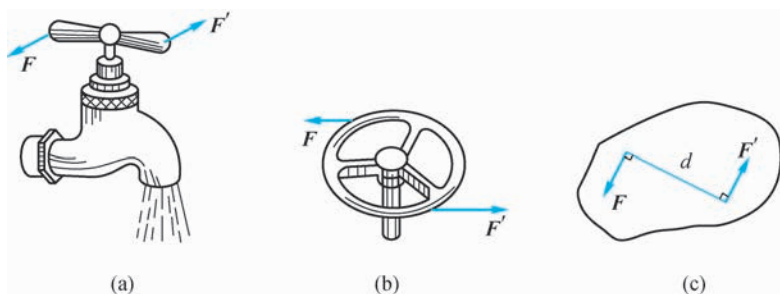


图 1-38 力偶

2. 力偶矩

力偶使物体转动的快慢,取决于力偶中力偶矩的大小。

实践表明,当力偶中的力 F 越大,或力偶臂越大时,力偶使物体的转动效应越强;反之越弱。因此,我们用力偶中力的大小和力偶臂的乘积,加上适当的正负号来度量力偶对物体的转动效应,称为力偶矩。在力学中,用符号 $M(F, F')$ 或 M 表示。

$$M(F, F') = \pm Fd \quad (1-5)$$

力偶矩是代数量。当力偶逆时针转动时,力偶矩为正;反之为负。在平面力系中,力偶矩的单位是 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 或 $\text{N} \cdot \text{m}$ (与力矩的单位相同)。

实践证明,力偶对物体的作用效应取决于以下三个要素。

1) 力偶矩的大小

物体转动的快慢取决于力偶矩的大小,即作用于物体上的力偶矩越大,物体转动的就越快;反之就越慢。因此,对力偶而言,无须知道力偶中力的大小和力偶臂的长度,只需要知道力偶矩就可以了。

2) 力偶的转向

力偶的转向决定了物体的转向,当物体只在一个力偶的作用下转动时,物体的转向与这个力偶的转向相同。

3) 力偶的作用平面

力偶的作用平面是指形成力偶的两个力的作用线所决定的平面。力偶只能使物体在其



作用平面内转动。

力偶常用图 1-39 所示的符号表示。此符号非常形象地表示了力偶的三要素。

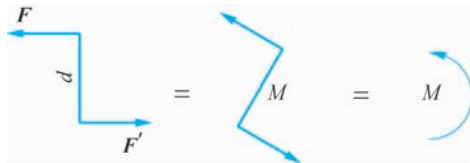


图 1-39 力偶图示

3. 力偶的基本性质

性质 1: 力偶对其作用平面内任意一点的力矩, 恒等于其力偶矩, 而与矩心的位置无关。

证明: 如图 1-40 所示, 设物体上作用一力偶臂为 d 的力偶 (F, F') , 该力偶对任意一点 O 之矩为 $M = Fd$ 。在力偶的作用面内任取一点 O 为矩心, 显然, 力偶使物体绕 O 点转动的效应等于组成力偶的两个力对 O 点之矩的代数和。用 x 表示从 O 点到 F' 的距离, 则两个力对 O 点之矩的代数和为

$$M_O(F, F') = F(x+d) - F'x = Fd = M \quad (1-6)$$

得证。

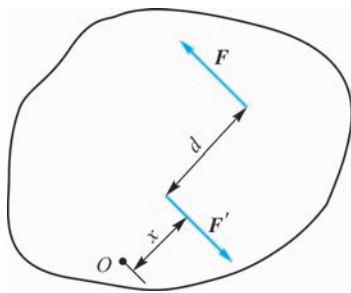


图 1-40 性质 1 的证明

性质 2: 力偶无合力, 力偶不能与一个力等效, 也不能与一个力平衡。

力偶无合力, 故力偶对物体不会产生任何平动, 力与力偶不能相互替代, 不能构成平衡。因此, 力与力偶是力系的两个基本元素。

根据力偶三要素及以上两个性质, 可以对力偶做如下说明。

(1) 力偶可在其作用面内任意移动, 而不改变它对物体的作用。

如图 1-41(a) 所示, 作用在方向盘上的力偶 (F, F') , 不论加在 A, B 位置上还是 C, D 位置上, 对方向盘的作用效应都不变。

(2) 只要力偶矩不变, 可任意改变力的大小和力偶臂的长短, 而不改变力偶对物体的作用。

如图 1-41(b) 所示, 作用在方向盘上的两个力偶 (F, F') 和 (P, P') , 虽然两个力偶臂不相等, 但只要调整力的大小, 使力偶矩相等, 则两力偶的作用效应还是相同的。

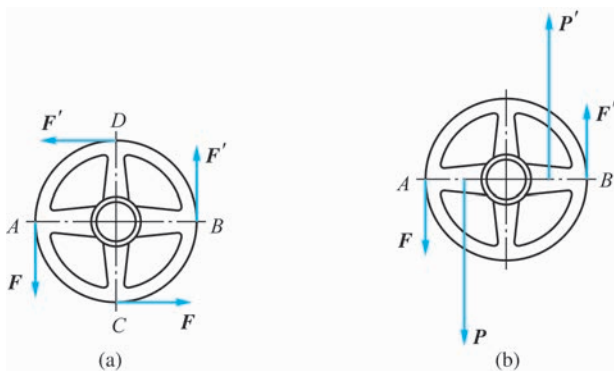


图 1-41 等效力偶 1

如图 1-42 所示的力偶的作用效应是相同的,它们是等效力偶。

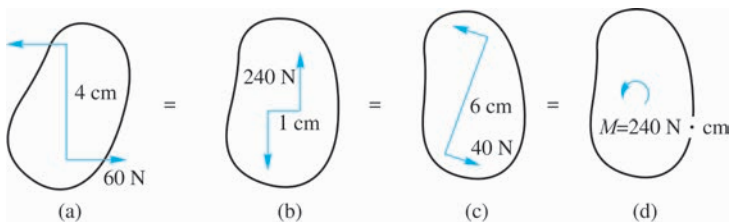


图 1-42 等效力偶 2

1.6 力的平移定理

由力的可传性可知,作用在刚体上的力沿其作用线可以传到刚体上的任意一点,而不改变其对刚体的作用效应。但如果力平行移到刚体上的任意一点,如何使其对刚体的作用效应不改变呢? 这就需要用力偶的平移定理来解决。

力的平移定理:作用在刚体上 A 点的力 F 可以平移到此刚体上的任意一点 O ,但必须附加一个力偶,其力偶矩等于原来的力 F 对新作用点 O 之矩。

证明:如图 1-43(a)所示,欲将刚体上 A 点的力 F 平移到任意指定点 O ,可在 O 点加上两个大小相等、方向相反、与 F 平行的力 F' 和 F'' ,并使 $F''=F'=F$,如图 1-43(b)所示;三个力 F 、 F' 、 F'' 组成新的力系,与原来的力 F 等效。显然, F'' 和 F 组成一个力偶,称为附加力偶,其力偶矩为

$$M = Fd \quad (1-7)$$

于是,作用于 A 点的力 F 可以由作用于 O 点的力 F' 及附加力偶 M 来代替,如图 1-43(c) 所示。又因为附加力偶矩为 F 对 O 点之矩,所以有 $M = M_O(F)$,即得证力的平移定理。

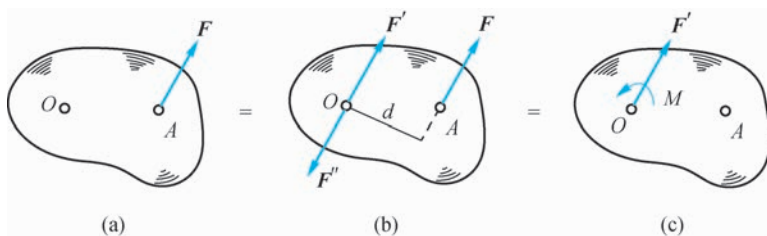


图 1-43 力的平移定理

根据上述力的平移的逆过程,共面的一个力和一个力偶也可以合成为一个力,该力的大小和方向与原来的力相同,作用线间的垂直距离为

$$d = \frac{|M|}{F'} \quad (1-8)$$

力的平移定理表明了力对绕力的作用线外的一点转动的物体有两种作用:一是平移力的平移作用,二是附加力偶对物体产生的旋转作用。



思考与练习

- 1-1 作用与反作用公理与二力平衡公理的区别是什么?
- 1-2 什么是二力构件和二力杆件?分析二力构件和二力杆件受力时与形状有无关系?
- 1-3 两力大小相等、两力矢相等、两力相等,这三种说法有何区别?
- 1-4 找出图 1-44 所示结构中的二力构件(未画出重力的物体均不计自重)。

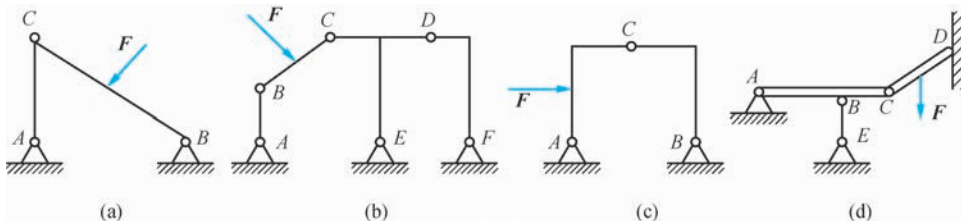


图 1-44 题 1-4 图

1-5 三力平衡汇交定理是否为刚体平衡的充要条件?换言之,作用在刚体上的三个力共面且汇交于一点,刚体是否一定平衡?三个汇交力平衡的充要条件是什么?

1-6 根据什么原则确定约束反力的方向?约束有哪几种基本类型?其约束反力方向应如何表示?

1-7 画物体的受力图时应注意什么问题?

1-8 合力矩定理中,合力对某一点之矩与各分力对同一点之矩有何关系?

1-9 什么是均布荷载?均布荷载对某一点取力矩时怎样计算?

1-10 力偶的基本性质是什么?

1-11 平面中的力矩与力偶矩有什么异同?

1-12 画出图 1-45 所示各物体(不包括销钉和支座)的受力图,所有接触面均为光滑接触面。

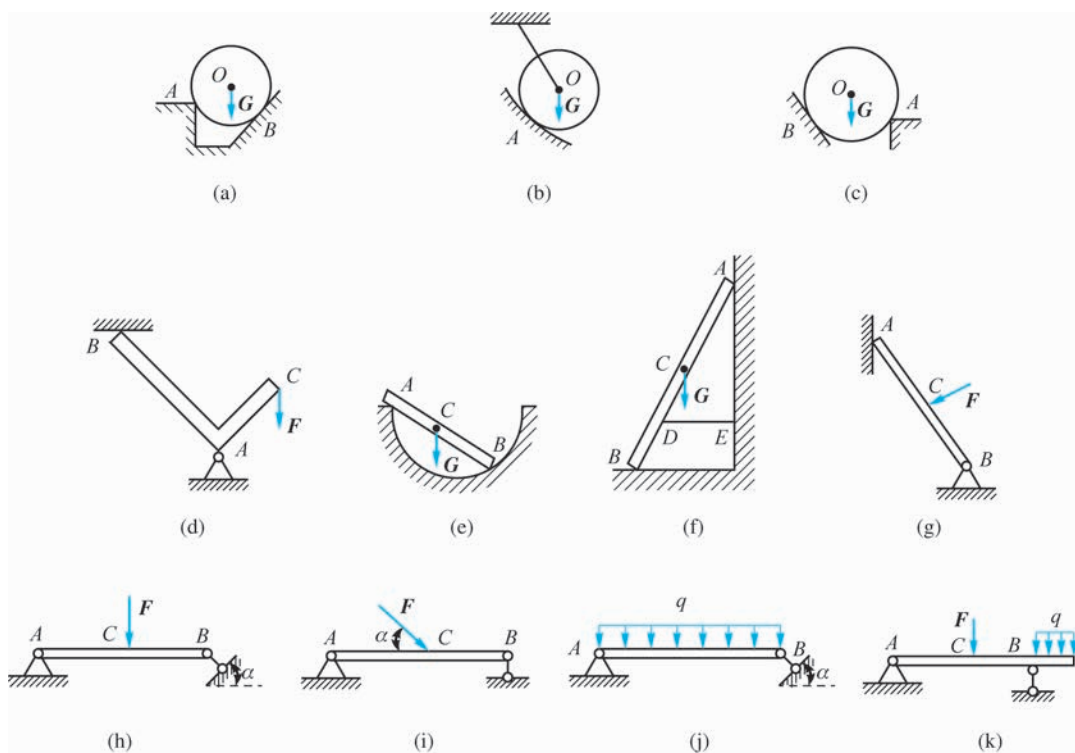
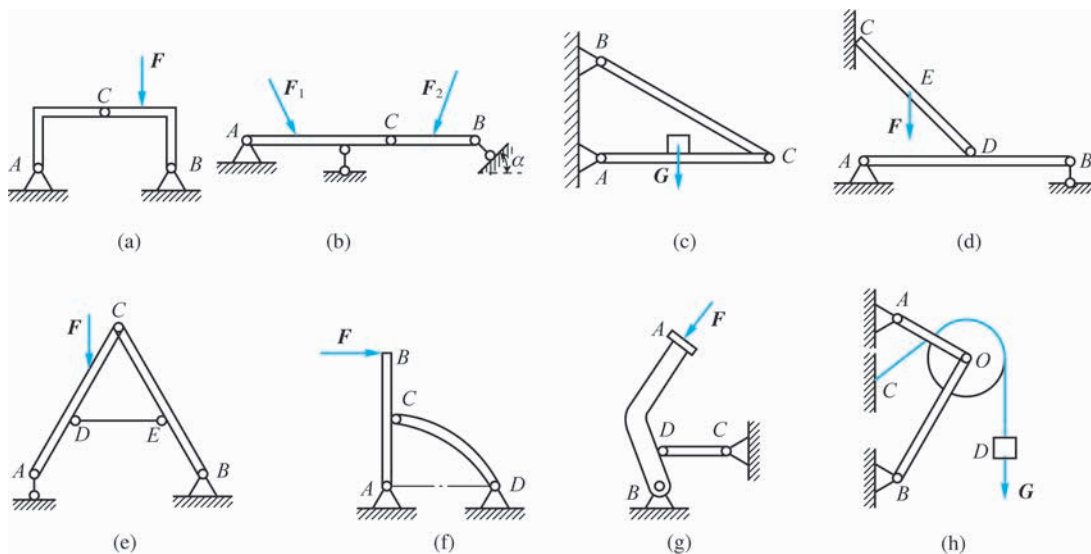


图 1-45 题 1-12 图

1-13 画出图 1-46 所示各物体系统中各物体(不包括销钉和支座)以及物体系统整体的受力图。



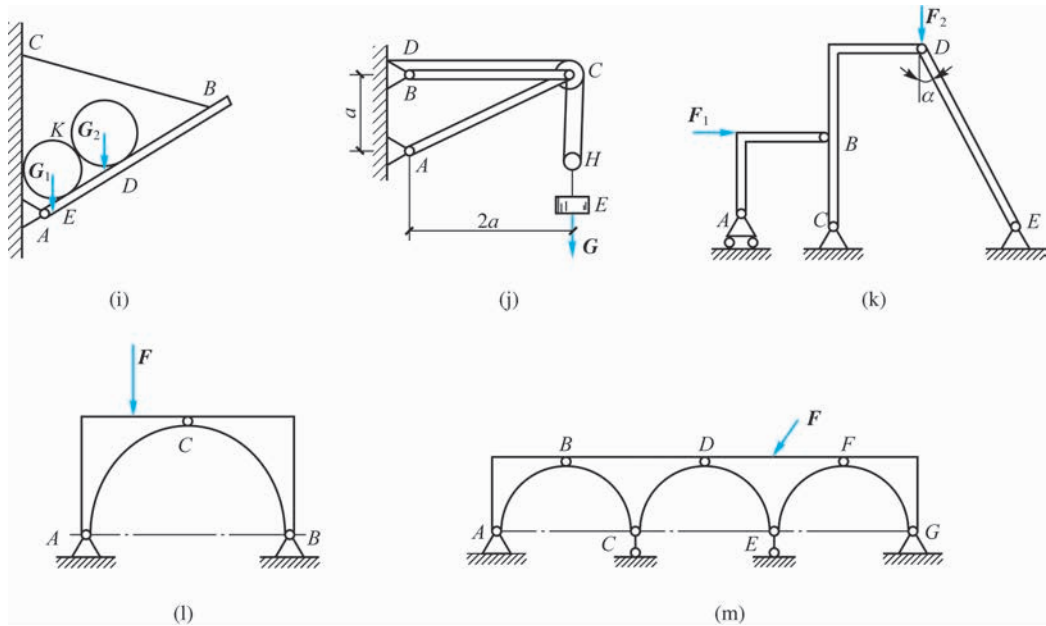


图 1-46 题 1-13 图

1-14 如图 1-47 所示各物体的受力图是否有错误？如有误应如何改正(各杆自重不计)？

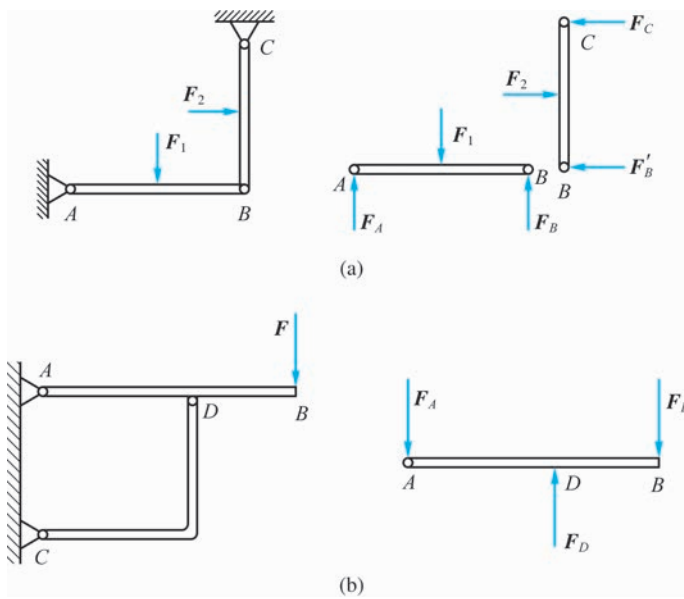


图 1-47 题 1-14 图

1-15 计算图 1-48 中 P 对 O 点之矩。

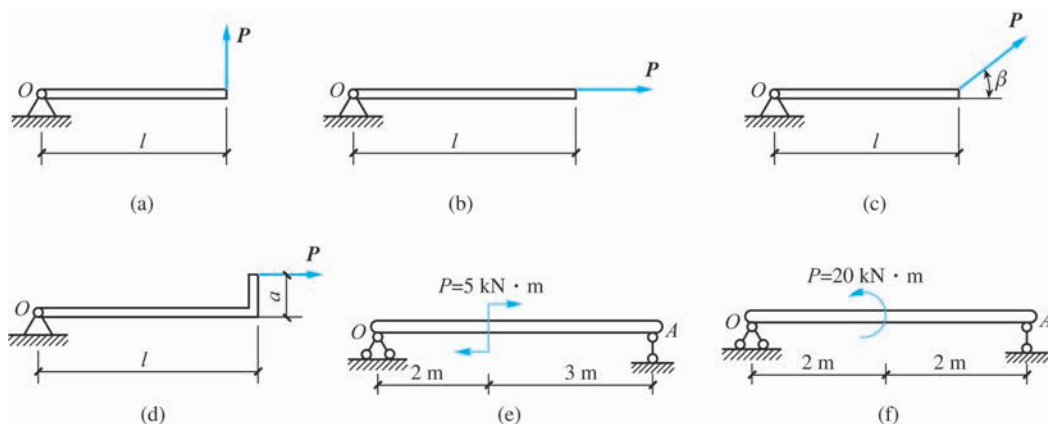


图 1-48 题 1-15 图

1-16 一个 400 N 的力作用在 A 点,方向如图 1-49 所示。

(1)求此力对 D 点之矩;

(2)要在 C 点加一最小力得到与(1)相同的矩,求最小力。

1-17 如图 1-50 所示的刚架, $F=20\text{ kN}$,求约束反力。

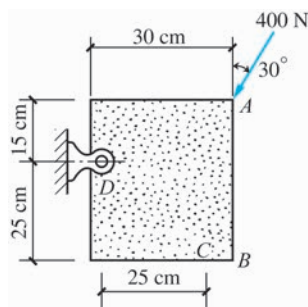


图 1-49 题 1-16 图

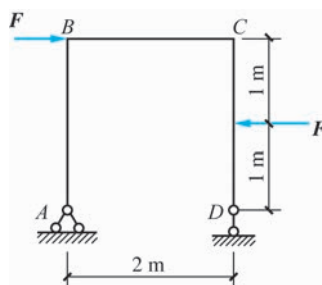


图 1-50 题 1-17 图

模块 2

平面力系的简化与平衡



学习描述

知识目标

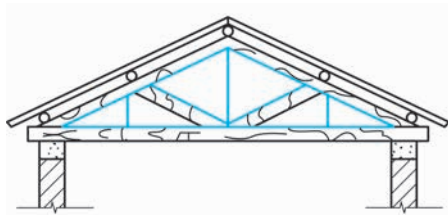
- (1) 掌握平面汇交力系、平面力偶系、平面一般力系的合成(简化)方法。
- (2) 理解主矢和主矩的概念。
- (3) 熟练掌握平面汇交力系、平面力偶系、平面一般力系的平衡方程。

技能目标

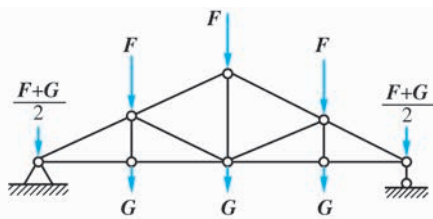
能用平面汇交力系、平面力偶系、平面一般力系的平衡方程解决实际工程中的基本力学问题,培养工程实践能力。

在静力学中为了便于研究问题,通常按力系中作用线分布情况的不同将力系分为平面力系和空间力系两大类。各力的作用线都在同一平面上的力系称为平面力系,否则称为空间力系。

工程实际中,很多结构所受到的力系都可以简化为平面力系。例如,图 2-1(a)所示的屋顶架结构受到屋面荷载、自重、墙或柱子对屋架的反力作用,这些力就组成了一个平面力系,其计算简图如图 2-1(b)所示。



(a) 屋顶架的结构简图



(b) 屋顶架的计算简图

图 2-1 平面屋顶架结构

实际工程中还有一些结构(如水坝、挡土墙等)所承受的力本来不是平面力系,但也可以简化为平面力系或近似地作为平面力系来考虑。如图 2-2(a)所示,水坝纵向很长、横截面相同,其受力情况沿长度方向大致相同,因此可沿其纵向截取 1 m 长度的坝体作为研究对象,这样就可以将简化后的自重、地基反力、水压力等看作一个平面力系,其计算简图如图 2-2(b)所示。



动画
计算简图

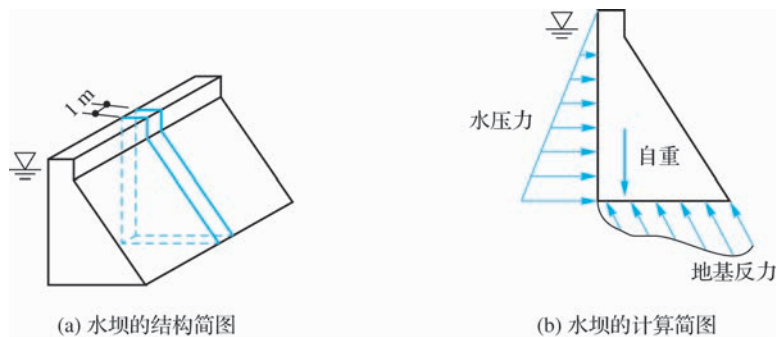


图 2-2 水坝

平面力系是工程中最常见的力系,在建筑工程中很多实际问题都可以简化为平面力系来处理。平面力系可分为平面汇交力系、平面力偶系和平面一般力系(平面任意力系)。本模块主要介绍以上三种力系的简化和平衡问题,学习过程中应重点掌握平面力系的简化和平衡方程的应用。

2.1 平面汇交力系

在工程实际中经常遇到平面汇交力系,平面汇交力系是指作用在物体上各力的作用线都相交于一点的平面力系。如图 2-3(a)所示,起重机起吊构件时,吊钩上有三个力,分别是钢绳拉力 F_1 及两根缆绳的拉力 F_2 和 F_3 ,它们都在同一个铅垂平面内并汇交于一点,组成一个平面汇交力系;又如如图 2-3(b)所示刚架的角撑板承受 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 四个力的作用,各力的作用线位于同一平面内且汇交于一点,也组成一个平面汇交力系。

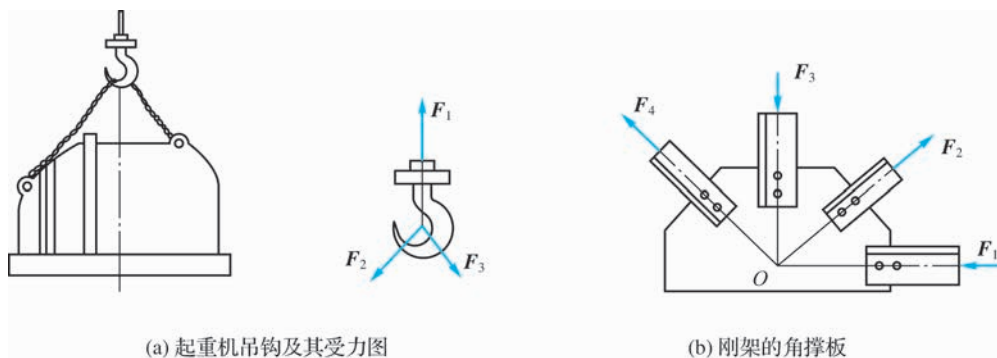


图 2-3 平面汇交力系

平面汇交力系是最简单的平面力系之一,是研究复杂力系的基础。本节分别用几何法(作图法)和解析法(计算法)讨论平面汇交力系的合成(简化)与平衡问题。

2.1.1 平面汇交力系合成与平衡的几何法

1. 平面汇交力系合成的几何法

设在刚体的 O 点上作用一平面汇交力系[见图 2-4(a)],其合力 F_R 可通过连续使用力的



三角形法则将各力依次合成来求得,即先作 F_1 、 F_2 的合力 F_{R1} ,再将 F_{R1} 与 F_3 合成为 F_{R2} ,最后求出 F_{R2} 与 F_4 的合力 F_R [见图 2-4(b)]。合力 F_R 即该平面汇交力系的合力,用矢量式可表示为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 \quad (2-1)$$

由图 2-4(b)可知, $\mathbf{F}_{R1}$ 和 $\mathbf{F}_{R2}$ 可以省略,求合力 $\mathbf{F}_R$ 时,只需将 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 、 $\mathbf{F}_3$ 、 $\mathbf{F}_4$ 首尾相连,形成一条折线,最后把第一个力的起点和最后一个力的终点用有向线段 $\mathbf{F}_R$ 连接起来,形成一个封闭的多边形 $ABCDE$ 。 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 、 $\mathbf{F}_3$ 、 $\mathbf{F}_4$ 和合力 $\mathbf{F}_R$ 构成的多边形,称为此平面汇交力系的力的多边形,如图 2-4(c)所示。封闭边 AE 表示该平面汇交力系的合力 $\mathbf{F}_R$ 的大小和方向,合力仍作用在力系的汇交点。这种用力的多边形求合力的作图规则称为力的多边形法则。



动画

平面汇交力的合成

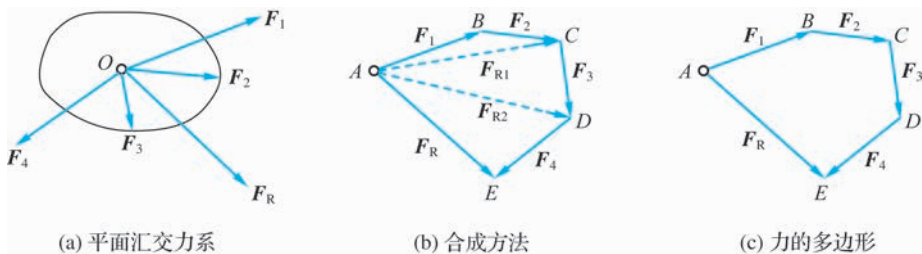


图 2-4 力的多边形法则

如果平面汇交力系由 n 个力组成,也可以利用力的多边形法则求得合力 $\mathbf{F}_R$,于是得到如下结论。

平面汇交力系合成的结果是一个合力,其大小和方向由力的多边形的封闭边代表,作用线通过力系中各力作用线的汇交点。

合力 $\mathbf{F}_R$ 的表达式为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

或简写为

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i \quad (2-2)$$

用力的多边形法则求平面汇交力系合力的方法称为平面汇交力系合成的几何法。合成中需要注意以下两点。

(1)合力 $\mathbf{F}_R$ 的作用线必通过汇交点。

(2)改变力系合成的顺序,只会改变力的多边形的形状,并不会影响最后的结果,即不论如何合成,合力 $\mathbf{F}_R$ 是唯一确定的。

【例 2-1】 如图 2-5(a)所示,在固定的圆环上作用三个力,即 $F_1 = 300 \text{ N}$, $F_2 = 600 \text{ N}$, $F_3 = 1\,500 \text{ N}$,其作用线相交于 O 点,试用几何法求力系的合力。

【解】 (1)选比例尺,如图 2-5(b)所示。

(2)将 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 、 $\mathbf{F}_3$ 首尾相连得到力的多边形 $ABCD$,其封闭边矢量 $\mathbf{AD}$ 就是合力矢 $\mathbf{F}_R$ 。量得 AD 的长度,得到合力 $F_R = 1\,646 \text{ N}$, $\mathbf{F}_R$ 与 x 轴的夹角 $\alpha = 16^\circ 16'$,如图 2-5(c)所示。

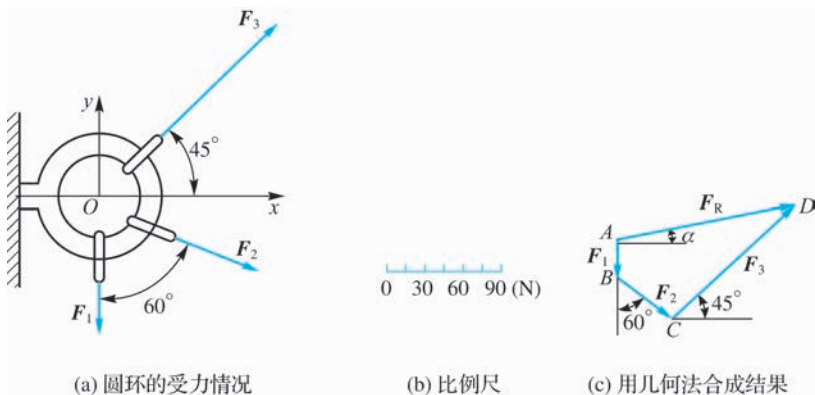


图 2-5 【例 2-1】图

2. 平面汇交力系平衡的几何条件

由平面汇交力系的合成结果可知,平面汇交力系合成的结果为一个合力。因此,若平面汇交力系为平衡力系,则合力必为零。相反,若合力为零,则平面汇交力系必为平衡力系。由此可见,平面汇交力系平衡的必要和充分条件是:该力系的合力等于零,即

$$\mathbf{F}_R = 0 \text{ 或 } \sum \mathbf{F}_i = 0 \quad (2-3)$$

因为平面汇交力系的合力是由力的多边形的封闭边表示的,所以若合力为零,则说明力的多边形的封闭边的长度必为零,即力的多边形中的最后一个力的终点恰好与第一个力的起点重合,汇交力系中的各个力(不需要合力)形成了一个首尾相连、自行封闭的力的多边形。

因此,平面汇交力系平衡的必要和充分的几何条件是:力的多边形首尾相连、自行封闭。

【例 2-2】 支架的横梁 AB 与斜杆 CD 彼此以铰链 C 相连接,并各以铰链 A 、 D 连接于铅直墙上,如图 2-6(a)所示。已知 $AC=CB$,杆 CD 与水平线成 45° 角,荷载 $F_P=10 \text{ kN}$,作用于 B 处。设梁和杆的重量忽略不计,求铰链 A 的约束反力和杆 CD 所受的力。

【解】 选取横梁 AB 为研究对象。横梁在 B 处受荷载 F_P 的作用。 CD 为二力杆,它对横梁 C 处的约束反力 F_C 的作用线必沿两铰链 C 、 D 中心的连线。铰链 A 处的约束反力 F_A 的作用线可根据三力平衡汇交定理确定,即通过另外两个力的交点 E ,如图 2-6(b)所示。

根据平面汇交力系平衡的几何条件,这三个力应组成一个封闭的力的三角形。按照图中力的比例尺,先画出已知力 $ab=F_P$,再由点 a 作直线 ad 平行于 AE ,由点 b 作直线 bd 平行于 CE ,这两条直线相交于 d 点,如图 2-6(c)所示。由于横梁 AB 处于平衡,所以 $\triangle abd$ 自行封闭,可确定力 F_C 和 F_A 的大小,量出它们的长度,按比例尺算得 $F_C=28.3 \text{ kN}$, $F_A=22.4 \text{ kN}$ 。

根据作用力与反作用力的关系,作用于斜杆 CD 的 C 端的力 F'_C 与 F_C 的大小相等、方向相反,由此可知斜杆 CD 受压力,如图 2-6(b)所示。

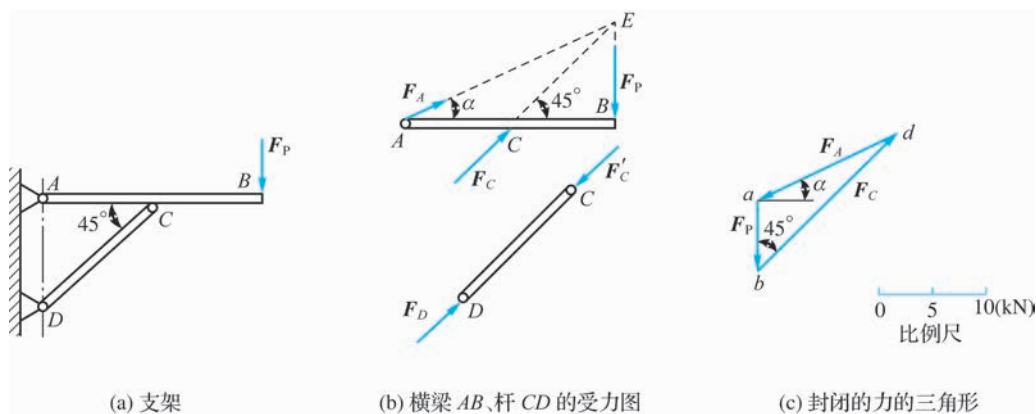


图 2-6 【例 2-2】图

2.1.2 平面汇交力系合成与平衡的解析法

解析法是以力在坐标轴上的投影为基础来进行计算的方法。利用解析法可以将力矢量转化为代数量进行运算。为此先介绍关于力在直角坐标轴上投影的概念。

1. 力在直角坐标轴上的投影

如图 2-7 所示,设力 F 作用在一个构件上,在力 F 所在的平面内取直角坐标系 xOy ,过力 F 的两个端点 A 和 B 分别向 x 、 y 轴作垂线,垂足分别为 a 、 b 及 a' 、 b' 。将线段 ab 与 $a'b'$ 的长度冠以适当的正负号,称为力 F 在 x 、 y 轴上的投影,分别记为 F_x 、 F_y 。力的投影是代数量,为了加以区别,需要规定投影的正负:当 a 到 b (或 a' 到 b') 的方向与 x 轴 (或 y 轴) 的正向一致时,力的投影取正值;反之取负值。

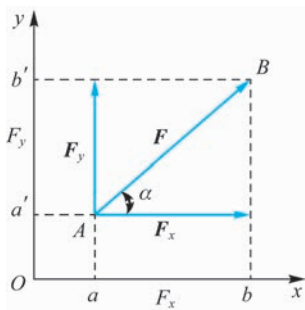


图 2-7 力的投影

力在直角坐标轴上的投影与力的大小和方向有关。

一般情况下,若已知力 F 与 x (或 y) 轴的夹角为 α ,则该力在 x 、 y 轴上的投影分别为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \pm F \cos \alpha \\ F_y &= \pm F \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

由式(2-4)可知:当力与投影轴垂直时,力在轴上的投影为零;当力与投影轴平行时,力在轴上投影大小的绝对值等于该力的大小。

若已知力 F 在直角坐标轴上的投影为 F_x 和 F_y ,则可求出该力的大小和方向为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \tan \alpha &= \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

式中, α 为力 F 与 x 轴所夹的锐角; 力 F 的具体方向由 F_x 和 F_y 的正负号来确定。

必须注意的是, 力的投影与力的分量是两个不同的概念, 两者不可混淆。当力 F 沿相互垂直的两个坐标轴正交分解时[见图 2-8(a)], F_x 、 F_y 这两个分力的大小分别等于力 F 在两个坐标轴上的投影 F_x 和 F_y ; 但当两个坐标轴不垂直时[见图 2-8(b)], 力 F 沿两个坐标轴的分力 F_x 、 F_y 在数值上不等于力 F 在两个坐标轴上的投影 F_x 和 F_y 。

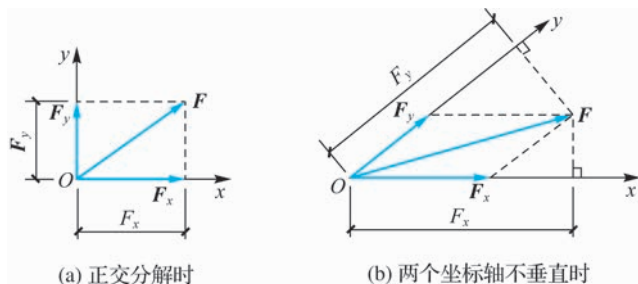


图 2-8 力的分解

尤其要注意的是: 力在坐标轴上的投影是代数量, 而力沿坐标轴的分力是矢量。

【例 2-3】 如图 2-9 所示, 已知 $F_1=100\text{ N}$, $F_2=200\text{ N}$, $F_3=300\text{ N}$, $F_4=400\text{ N}$, 试分别求出各力在 x 轴和 y 轴上的投影。

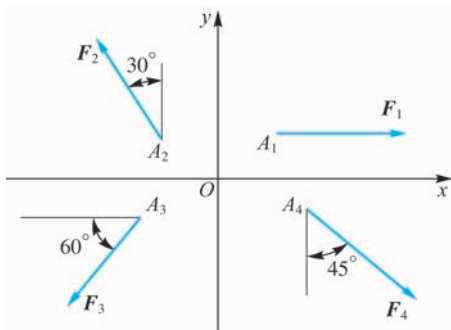


图 2-9 【例 2-3】图

【解】 根据式(2-4)可求得各力在 x 轴、 y 轴上的投影分别为

$$F_{x1}=100 \times \cos 0^\circ=100\text{ N}, F_{y1}=100 \times \sin 0^\circ=0;$$

$$F_{x2}=-200 \times \cos 60^\circ=-100\text{ N}, F_{y2}=200 \times \sin 60^\circ=100\sqrt{3}\text{ N};$$

$$F_{x3}=-300 \times \cos 60^\circ=-150\text{ N}, F_{y3}=-300 \times \sin 60^\circ=-150\sqrt{3}\text{ N};$$

$$F_{x4}=400 \times \cos 45^\circ=200\sqrt{2}\text{ N}, F_{y4}=-400 \times \sin 45^\circ=-200\sqrt{2}\text{ N}$$

2. 合力投影定理

由式(2-5)可知, 如能求出合力在正交坐标轴上的投影, 则合力的大小和方向就可以确定。为此需讨论合力及其分力在同一坐标轴上投影的关系。

图 2-10 为平面汇交力系中的各力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 组成的力的多边形, F_R 为合力, 将力的



多边形中的各力投影到 x 轴上,可以得到

$$ae = ab + bc + cd - ed$$

由投影定义可知,上式左端为合力 F_R 的投影,右端为 4 个分力的投影的代数和。

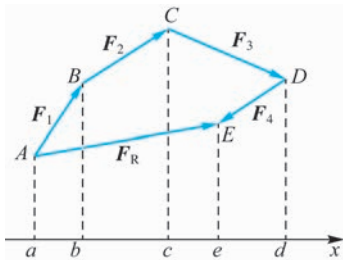


图 2-10 合力投影定理

由 $F_{Rx} = F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4}$ 这一关系可推广到任意一个汇交力系的情形,即

$$F_{Rx} = F_{x1} + F_{x2} + \cdots + F_{xn} = \sum F_x \quad (2-6)$$

于是得到合力投影定理:合力在任意一个轴上的投影,等于各分力在同一个轴上投影的代数和。

3. 平面汇交力系合成的解析法

如图 2-11 所示,当平面汇交力系为已知时,可建立一个直角坐标系 xOy ,先求出力系中各力在 x 轴和 y 轴上的投影,再根据合力投影定理求得合力 F_R 在 x 、 y 轴上的投影 F_{Rx} 和 F_{Ry} 。由图 2-11 中的几何关系可见,合力 F_R 的大小和方向可由式(2-7)确定。

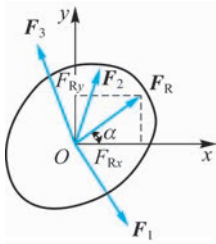


图 2-11 平面汇交力系的合成图

$$\left. \begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \\ \tan \alpha &= \frac{|F_{Ry}|}{|F_{Rx}|} = \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

式中, α 为合力 F_R 与 x 轴所夹的锐角;合力 F_R 在哪个象限由 F_{Rx} 和 F_{Ry} 的正负号来确定,合力的作用线通过力系的汇交点 O 。

下面举例说明如何用解析法求平面汇交力系的合力。

【例 2-4】 试用解析法求【例 2-1】中图 2-5(a)所示的平面汇交力系合力的大小和方向。

【解】 建立直角坐标系 xOy ,则合力 F_R 在 x 轴、 y 轴上的投影分别为

$$F_{Rx} = \sum F_x = 300 \times \cos 90^\circ + 600 \times \cos 30^\circ + 1\,500 \times \cos 45^\circ = 1\,580.3 \text{ (kN)}$$

$$F_{Ry} = \sum F_y = -300 \times \sin 90^\circ - 600 \times \sin 30^\circ + 1\,500 \times \sin 45^\circ = 460.7 \text{ (kN)}$$

则合力 F_R 的大小为

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{1\,580.3^2 + 460.7^2} = 1\,646 (\text{kN})$$

合力 F_R 的方向为

$$\tan \alpha = \frac{|F_{Ry}|}{|F_{Rx}|} = \frac{460.7}{1\,580.3} \approx 0.292$$

$$\alpha = 16^\circ 16'$$

由于 F_{Rx} 和 F_{Ry} 都为正,故 α 在第一象限,而合力 F_R 的作用线通过力系的汇交点 O 。

4. 平面汇交力系平衡的解析条件

平面汇交力系平衡的充分必要条件是力系的合力等于零。从式(2-7)可知,要满足 $F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 0$, 其充分必要条件为

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad (2-8)$$

即平面汇交力系平衡的充分必要(解析)条件是:力系中各力在 x 、 y 轴上投影的代数和都等于零。

式(2-8)称为平面汇交力系的平衡方程。平面汇交力系有两个独立的平衡方程,可以用来求解两个未知量。

用解析法求未知的约束力时,约束力的指向要事先假定。利用平衡方程解出的未知力若为正值,说明预先假定的指向是正确的;若为负值,说明实际指向与假定的方向相反。

【例 2-5】 如图 2-12(a)所示,一物体 B 重为 30 kN ,用不可伸长的柔索 AB 和 BC 悬挂后平衡,设柔索的质量不计, AB 与铅垂线的夹角 $\alpha = 30^\circ$, BC 水平。求柔索 AB 和 BC 的拉力。

【解】 (1)取重物 B 为研究对象。

(2)受力分析。画出重物 B 的受力图,如图 2-12(b)所示。重物 B 共受三个力的作用而平衡,即自重 G 、两根柔索的约束反力 F_{TBA} 与 F_{TBC} 。根据约束特点,柔索所提供的 F_{TBA} 和 F_{TBC} 均为拉力。

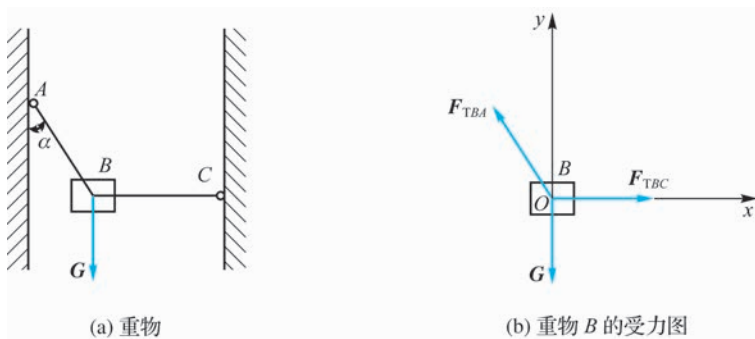


图 2-12 【例 2-5】图

(3)建立直角坐标系 xOy ,列平衡方程求解。

由



$$\begin{cases} \sum F_x = 0, -F_{TBA} \cos 60^\circ + F_{TBC} = 0 \\ \sum F_y = 0, F_{TBA} \cos 30^\circ - G = 0 \end{cases}$$

解得 $F_{TBA} = 34.64 \text{ kN}$, $F_{TBC} = 17.32 \text{ kN}$ 。

【例 2-6】 如图 2-13(a)所示的三角支架,已知挂在 B 点的物体自重为 G ,试求 AB 、 BC 两杆所受的力。

【解】 方法一:应用平面汇交力系的解析法求解。

(1)取铰 B 为研究对象。

(2)对铰 B 进行受力分析,画出受力图。

由于 AB 、 BC 两杆为二力杆件,所以 B 点在已知力 G 和两个未知力 F_{NBA} 、 F_{NBC} 的作用下处于平衡状态,其受力图如图 2-13(b)所示。因三个力作用于同一点 B ,故该力系为平面汇交力系。

(3)列平衡方程并求解。题中只有两个未知力 F_{NBA} 、 F_{NBC} ,利用平衡方程中的两个投影方程即可求解。

由

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, F_{NBC} \cos 60^\circ - F_{NBA} = 0 \\ \sum F_y = 0, F_{NBC} \sin 60^\circ - G = 0 \end{cases}$$

解得

$$F_{NBC} = \frac{G}{\sin 60^\circ} = 1.15G$$

$$F_{NBA} = F_{NBC} \cos 60^\circ = 1.15G \times 0.5 = 0.575G$$

方法二:应用平面汇交力系的几何法求解。先应用平面汇交力系平衡的几何条件作一个自行封闭的力的三角形,再解这个三角形即可。由铰 B 平衡可知,力的三角形自行封闭,先按已知力 G 的方向作出 G 的作用线,再过 G 的起点和终点分别作出力 F_{NBC} 、 F_{NBA} 的作用线,依次将各力首尾相连,即可确定 F_{NBC} 和 F_{NBA} 的指向,如图 2-13(c)所示。

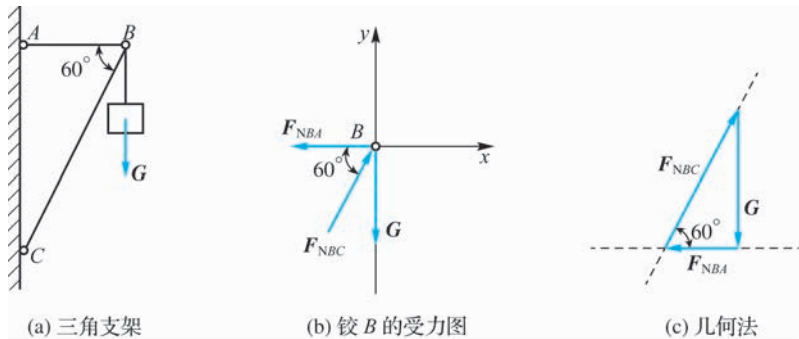


图 2-13 【例 2-6】图

计算直角三角形,可得

$$F_{NBC} = \frac{G}{\sin 60^\circ} = 1.15G$$

$$F_{NBA} = F_{NBC} \cos 60^\circ = 0.575G$$

【例 2-7】 简易起重机如图 2-14(a)所示,起吊钢丝绳绕过定滑轮 B ,通过铰车把重物吊起。重物重 $G=20 \text{ kN}$, A 、 B 、 C 三处均为铰链连接,不计各杆的自重和滑轮的尺寸,求 AB 和 BC 杆所受的力。

【解】 (1)选取研究对象。由于已知力和未知力都与定滑轮 B 有关,所以将定滑轮 B 连同销钉一起作为研究对象。

(2)对 B 点做受力分析,画出受力图,如图 2-14(b)所示。 B 点受四个力的作用而平衡,这四个力为两根绳子的拉力 G 、 F_T ,及二力杆件 AB 和 BC 的作用力 F_{NBA} 、 F_{NBC} 。

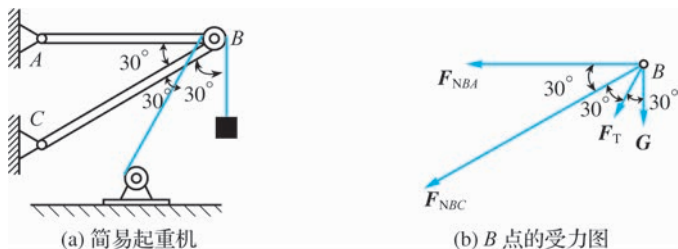


图 2-14 【例 2-7】图

(3)列平衡方程并求解。由

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, -F_{NBA} - F_{NBC} \cos 30^\circ - F_T \sin 30^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0, -F_{NBC} \sin 30^\circ - F_T \cos 30^\circ - G = 0 \end{cases}$$

其中, $F_T = G$ 。解得 $F_{NBC} = -74.64 \text{ kN}$ (压), $F_{NBA} = 54.64 \text{ kN}$ (拉)。

F_{NBA} 的计算结果为正值,说明其实际方向与图中所假设的方向相同,为拉力; F_{NBC} 的计算结果为负值,说明其实际方向与图中所假设的方向相反,为压力。

F_{NBA} 、 F_{NBC} 是两个二力杆件 AB 和 BC 提供给 B 的作用力,根据作用力与反作用力的关系, AB 和 BC 杆所受的力 F'_{NBA} 、 F'_{NBC} 的数值为 $F'_{NBC} = -74.64 \text{ kN}$ (压), $F'_{NBA} = 54.64 \text{ kN}$ (拉)。

2.2 平面力偶系

作用在结构或构件上的同一平面内的几个力偶,称为平面力偶系。平面力偶系和平面汇交力系一样,也是力学中最简单的力系之一,是研究复杂力系的基础。本节主要介绍平面力偶系的简化与平衡问题。

2.2.1 平面力偶系的简化

为了简化计算过程,可以把作用在结构或构件上的几个力偶进行合成,利用力偶的性质解决平面力偶系的简化问题。

1. 两个力偶的简化

如图 2-15(a)所示,设在物体的同一平面上有两个力偶 M_1 和 M_2 的作用,其力偶矩分别为 $M_1 = F_1 d$, $M_2 = F_2 d$ 。为了求其合成结果,在力偶作用面内任取一线段 AB ,使 $AB = d$ 。根据力偶的等效性,将原力偶变换成两个等效力偶 (F_1, F'_1) 、 (F_2, F'_2) [见图 2-15(b)],则 F_1 、 F_2 的大小分别为 $F_1 = M_1/d$, $F_2 = M_2/d$ 。将 F'_1 、 F'_2 和 F_1 、 F_2 分别在 B 、 A 两点合成,则有



$F_R = F_1 - F_2$, $F'_R = F'_1 - F'_2$ 。 F_R 和 F'_R 等值、反向、平行,组成一个新力偶,如图 2-15(c)所示。此新力偶即为原两力偶的合力偶。

合力偶矩用 M 表示,即 $M = F_R d = (F_1 - F_2) d = M_1 - M_2$ 。

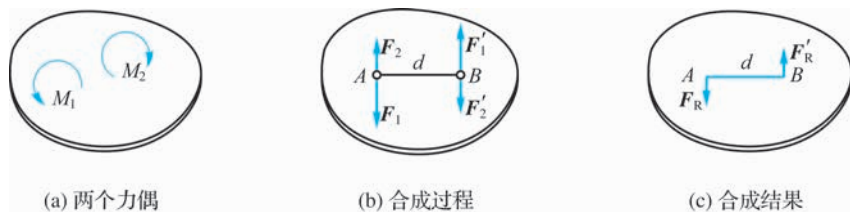


图 2-15 两个力偶的简化

2. 平面力偶系的简化

由以上分析可知,根据力偶的等效性, n 个力偶所组成的平面力偶系可以简化成一个合力偶,合力偶矩为

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i \quad (2-9)$$

即同一平面内的几个力偶矩可以进行代数运算。

由此,平面力偶系的简化结果是:平面力偶系可以简化成一个合力偶,合力偶矩等于各分力偶矩的代数和,也等于组成力偶系的各力对平面内任意一点力矩的代数和,即

$$M = \sum M_O(F_i) \quad (2-10)$$

【例 2-8】 如图 2-16 所示,在同一平面内的物体受到三个力偶的作用,其中, $F_1 = 200 \text{ N}$, $F_2 = 400 \text{ N}$, $M = 150 \text{ N} \cdot \text{m}$,求其合成的结果。

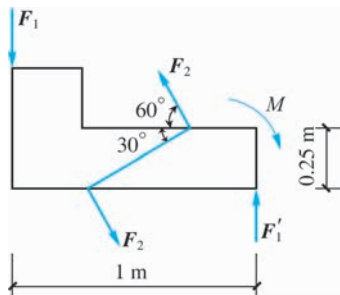


图 2-16 【例 2-8】图

【解】 规定以逆时针方向转动的力偶矩为正,则三个力偶矩的数值及正负分别为

$$M_1 = F_1 d_1 = 200 \times 1 = 200 (\text{N} \cdot \text{m})$$

$$M_2 = F_2 d_2 = 400 \times \frac{0.25}{\sin 30^\circ} = 200 (\text{N} \cdot \text{m})$$

$$M_3 = -M = -150 (\text{N} \cdot \text{m})$$

由式(2-9)可知,三个同一平面内力偶合成的结果是一个合力偶,合力偶矩 M 为

$$M = \sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 = 200 + 200 - 150 = 250 (\text{N} \cdot \text{m})$$

即合力偶矩的大小等于 $250 \text{ N} \cdot \text{m}$,转向为逆时针方向,作用在原力偶系的平面内。

2.2.2 平面力偶系的平衡方程

由于平面力偶系合成的结果只能是一个合力偶,所以当合力偶矩等于零时,使物体顺时针方向转动的力偶和使物体逆时针方向转动的力偶相等,作用效果相互抵消,物体处于平衡状态。因此,平面力偶系平衡的必要和充分条件是:平面力偶系中各力偶矩的代数和等于零,即

$$\sum M_i = 0 \quad (2-11)$$

或力偶系中各力对平面内任意一点力矩的代数和为零,即

$$\sum M_O(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (2-12)$$

【例 2-9】 如图 2-17(a)所示,梁 AB 受一力偶 M 的作用,其力偶矩 $M=100 \text{ N} \cdot \text{m}$,梁长 $l=5 \text{ m}$,梁的自重不计,求两支座的约束反力。

【解】 (1)取梁 AB 为研究对象。

(2)对梁 AB 进行受力分析并画出受力图。如图 2-17(b)所示,梁 AB 共受到三个力的作用,即力偶 M 、支座 A 提供的支座反力 $\mathbf{F}_A$ 及支座 B 提供的支座反力 $\mathbf{F}_B$ 。B 处为可动铰支座,其反力 $\mathbf{F}_B$ 的作用线沿铅垂方向,指向假定向上。A 处为固定铰支座,其反力 $\mathbf{F}_A$ 的方向本来是不能确定的,但因梁上只受力偶作用,故 $\mathbf{F}_A$ 必须与 $\mathbf{F}_B$ 组成一个力偶才能与梁上的力偶 M 平衡,所以 $\mathbf{F}_A$ 的方向为沿铅垂方向向下。



图 2-17 【例 2-9】图

(3)列平衡方程并求解。由式(2-11)得

$$\begin{aligned} \sum M_i &= 0, F_B l - M = 0 \\ F_A &= F_B = \frac{M}{l} = \frac{100}{5} = 20(\text{N}) \end{aligned}$$

求得的结果为正值,说明原假设 $\mathbf{F}_A$ 和 $\mathbf{F}_B$ 的指向就是力的实际指向。

【例 2-10】 在梁 AB 的两端各作用一力偶,其力偶矩的大小分别为 $M_1=120 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2=360 \text{ kN} \cdot \text{m}$,转向如图 2-18(a)所示。梁长 $l=6 \text{ m}$,梁的重量不计。求该梁 A、B 处的支座反力。

【解】 (1)取梁 AB 为研究对象。

(2)对梁 AB 进行受力分析并画出受力图。作用在梁 AB 上的力有四个:两个已知力偶 M_1 、 M_2 和支座 A、B 的反力 $\mathbf{F}_A$ 、 $\mathbf{F}_B$ 。如图 2-18(b)所示,B 处为可动铰支座,其反力 $\mathbf{F}_B$ 的作用线沿铅垂方向,指向假定向上;A 处为固定铰支座,其反力 $\mathbf{F}_A$ 的方向本来是不能确定的,但因梁上只受力偶作用,故 $\mathbf{F}_A$ 必须与 $\mathbf{F}_B$ 组成一个力偶才能与梁上的力偶平衡,所以 $\mathbf{F}_A$ 的方向也为铅垂方向,指向假定向下。

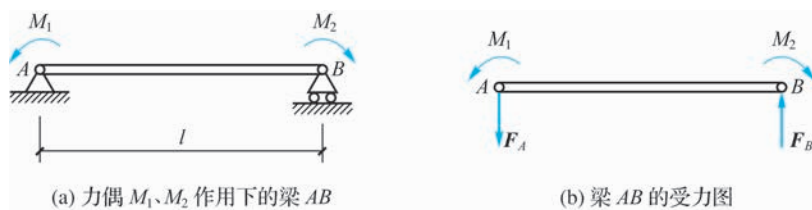


图 2-18 【例 2-10】图

(3)列平衡方程并求解。由式(2-11)得

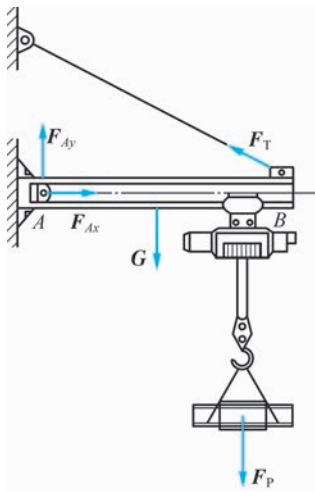
$$\sum M_i = 0, M_1 - M_2 + F_A \cdot l = 0$$

$$F_A = F_B = \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{360 - 120}{6} = 40 (\text{kN})$$

求得的结果为正值,说明原假设 F_A 和 F_B 的指向就是力的实际指向。

2.3 平面一般力系

平面一般力系是指各力的作用线在同一平面内任意分布,既不完全相交,也不完全平行的力系。工程实际中很多构件所受的力都可以看成平面一般力系。例如,如图 2-19 所示,作用在悬臂吊车横梁 AB 上的力有自重 G 、荷载 F_P 、拉力 F_T 和铰链 A 的约束反力 F_{Ax} 、 F_{Ay} ,这些力的作用线在同一平面内任意分布,组成平面一般力系。

图 2-19 吊车横梁 AB 的受力

2.3.1 平面一般力系的简化

1. 平面一般力系向一点的简化

如图 2-20(a)所示,设物体上作用有平面一般力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$,为将此力系简化,先在該力系的作用面内任选一点 O ,称之为简化中心。根据力的平移定理,将各力全部平移到 O

点处,得到一个作用于 O 点的平面汇交力系 $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_n$ 和一个由附加力偶组成的平面力偶系,其力偶矩为 $M_1, M_2, \dots, M_n$, 如图 2-20(b) 所示。这些力偶作用在同一平面内,其力偶矩分别为

$$\begin{aligned} M_1 &= M_O(\mathbf{F}_1) \\ M_2 &= M_O(\mathbf{F}_2) \\ &\vdots \\ M_n &= M_O(\mathbf{F}_n) \end{aligned}$$

2. 平面一般力系的主矢和主矩

将平面汇交力系和平面力偶系分别进行合成。

1) 主矢

平面汇交力系可合成为一个力 $\mathbf{F}'_R$, 作用于 O 点, 并等于 $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_n$ 的矢量和, 即

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 + \dots + \mathbf{F}'_n = \sum \mathbf{F}'$$

因为

$$\mathbf{F}'_1 = \mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_2 = \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}'_n = \mathbf{F}_n$$

所以

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F} \quad (2-13)$$

$\mathbf{F}'_R$ 的合成如图 2-20(c) 所示。

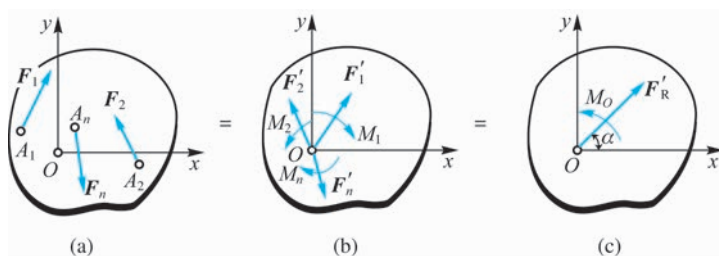


图 2-20 平面一般力系向一点的简化

也就是说,平面汇交力系可以合成为一个力,这个力作用于简化中心,其大小和方向等于原平面一般力系中各力的矢量和 $\mathbf{F}'_R$, 称为该力系的主矢。

可应用解析法求主矢 $\mathbf{F}'_R$ 的大小和方向。过 O 点取直角坐标系 xOy , 主矢 $\mathbf{F}'_R$ 在 x 轴和 y 轴上的投影分别为

$$F'_{Rx} = F'_{x1} + F'_{x2} + \dots + F'_{xn} = F_{x1} + F_{x2} + \dots + F_{xn} = \sum F_x$$

$$F'_{Ry} = F'_{y1} + F'_{y2} + \dots + F'_{yn} = F_{y1} + F_{y2} + \dots + F_{yn} = \sum F_y$$

主矢 $\mathbf{F}'_R$ 的大小和方向为

$$\left. \begin{aligned} F'_R &= \sqrt{F'^2_{Rx} + F'^2_{Ry}} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \\ \tan \alpha &= \frac{|F'_{Ry}|}{|F'_{Rx}|} = \frac{|\sum F_y|}{|\sum F_x|} \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$



式中, α 为 $\mathbf{F}'_R$ 与 x 轴所夹的锐角; $\mathbf{F}'_R$ 的指向由 $\sum F_x$ 和 $\sum F_y$ 的正负号决定。

2) 主矩

附加的平面力偶系合成后仍为一个力偶, 如图 2-20(c) 所示。由力偶系合成的理论可知, $M_1, M_2, \dots, M_n$ 可合成为一个力偶, 此力偶的矩为 M_O , 即

$$M_O = M_1 + M_2 + \dots + M_n = M_O(\mathbf{F}_1) + M_O(\mathbf{F}_2) + \dots + M_O(\mathbf{F}_n)$$

或

$$M_O = \sum M_O(\mathbf{F}) \quad (2-15)$$

所以, 平面一般力系中各力对简化中心的矩的代数和为 M_O , 称为该力系的**主矩**。

3. 平面一般力系的简化结果

1) 结论

在一般情况下, 平面一般力系向作用面内任意一个简化中心简化时, 可得到一个力和一个力偶。该力作用在简化中心上, 其大小和方向等于原力系的主矢; 该力偶的矩等于原力系对简化中心的主矩。

应当注意的是, 由于主矢等于原力系各力的矢量和, 故主矢 $\mathbf{F}'_R$ 的大小和方向与简化中心的位置无关。而主矩等于原力系各力对简化中心的力矩的代数和, 取不同的点作为简化中心, 各力的力臂会发生改变, 各力对简化中心的力矩也会发生改变。因而, 一般情况下的主矩 M_O 随着简化中心位置的不同而不同。

2) 简化结果的讨论

平面一般力系向一点简化, 一般可得到一个力和一个力偶, 但这并不是最后的简化结果。根据主矢与主矩是否存在, 可能出现下列几种情况。

(1) 简化为一个合力偶。当 $F'_R = 0, M_O \neq 0$ 时, 原力系与一个力偶等效, 而这个力偶的力偶矩就是主矩。

由于力偶对平面内任意一点之矩都相同, 所以当力系简化为一个力偶时, 主矩与简化中心的位置无关。

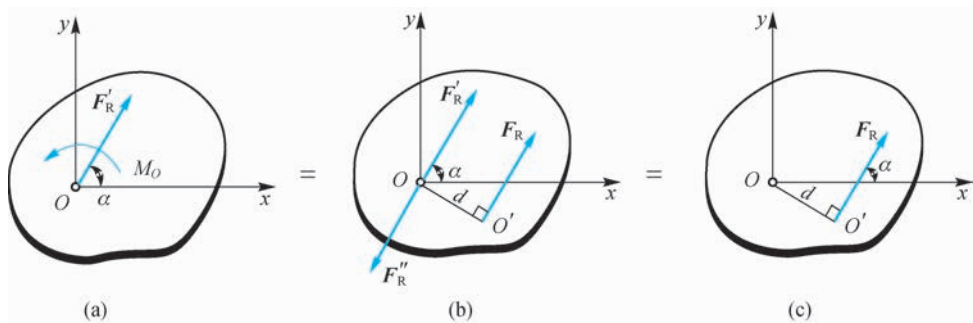
(2) 简化为一个合力。当 $F'_R \neq 0, M_O = 0$ 时, 作用于简化中心 O 点的力 $\mathbf{F}'_R$ 与原力系等效, 为力系的合力, 合力的作用线通过简化中心。

当 $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$ 时, 可以进一步对 $\mathbf{F}'_R$ 和 M_O 进行合成, 如图 2-21(a) 所示。

将力偶矩为 M_O 的力偶用两个反向平行力 $\mathbf{F}_R$ 和 $\mathbf{F}''_R$ 表示, 并令 $F'_R = F_R = -F''_R$, 如图 2-21(b) 所示。于是, 可将作用于 O 点的力 $\mathbf{F}'_R$ 与力偶 $(\mathbf{F}_R, \mathbf{F}''_R)$ 合成为一个作用于 O' 点的力 $\mathbf{F}_R$, 如图 2-21(c) 所示。力 $\mathbf{F}_R$ 为原力系的合力, 其大小和方向与主矢 $\mathbf{F}'_R$ 相同, 但合力 $\mathbf{F}_R$ 的作用线不过简化中心 O , 而是在 O' 点的位置, 其作用线到 O 点的距离 d 可以通过式 (2-16) 确定。

$$d = \frac{|M_O|}{F'_R} \quad (2-16)$$

(3) 处于平衡状态。当 $F'_R = 0, M_O = 0$ 时, 力系处于平衡状态。

图 2-21 当 $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$ 时的简化结果

【例 2-11】 已知混凝土水坝自重 $G_1=600$ kN, $G_2=300$ kN, 水压力在最低点的荷载集度 $q=80$ kN/m, 各力的方向及作用线位置如图 2-22(a) 所示。试将这三个力向底面 A 点简化, 并求简化的最后结果。

【解】 以底面 A 点为简化中心, 建立直角坐标系, 由式(2-14)可求得主矢 F'_R 的大小和方向。

由于

$$\sum F_x = \frac{1}{2} \times q \times 8 = \frac{1}{2} \times 80 \times 8 = 320 (\text{kN})$$

$$\sum F_y = G_1 + G_2 = 600 + 300 = 900 (\text{kN})$$

所以

$$F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = \sqrt{(320)^2 + (900)^2} = 955.2 (\text{kN})$$

$$\tan \alpha = \frac{|\sum F_y|}{|\sum F_x|} = \frac{900}{320} = 2.813$$

$$\alpha = 70^\circ 25'$$

因为 $\sum F_x$ 和 $\sum F_y$ 均为正值, 故 F'_R 指向第一象限并与 x 轴的夹角为 α , 再由式(2-15)可求得主矩为

$$\begin{aligned} M_A &= \sum M_A(\mathbf{F}) \\ &= -\frac{1}{2} \times q \times 8 \times \frac{1}{3} \times 8 - G_1 \times 1.5 - G_2 \times 4 \\ &= -\frac{1}{2} \times 80 \times 8 \times \frac{1}{3} \times 8 - 600 \times 1.5 - 300 \times 4 \\ &= -2\,953.3 (\text{kN} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

计算结果为负值, 说明 M_A 是顺时针转向。初步简化结果如图 2-22(b) 所示。

因为主矢 $F'_R \neq 0$, 主矩 $M_A \neq 0$, 所以还可进一步合成为一个合力 F_R 。 F_R 的大小、方向与 F'_R 相同, 它的作用线到 A 点的距离为

$$d = \frac{|M_A|}{F'_R} = \frac{2\,953.3}{955.2} = 3.1 (\text{m})$$

因主矩为负值(顺时针转向), 故合力 F_R 应在 A 点的右侧, 如图 2-22(c) 所示。

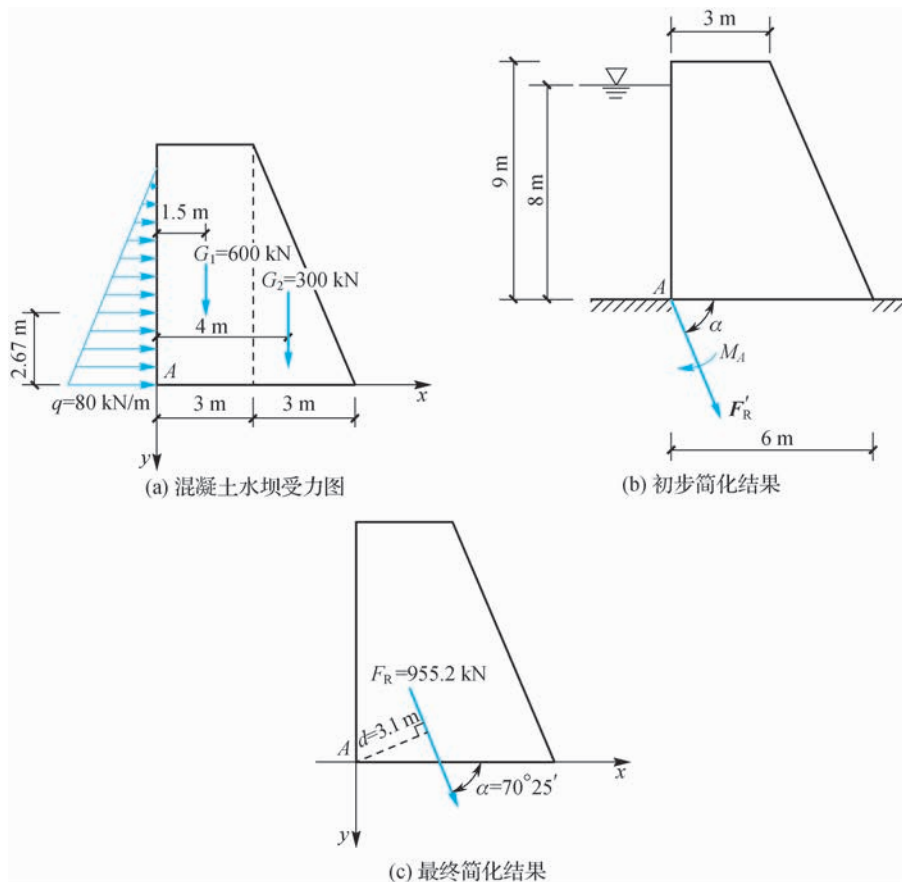


图 2-22 【例 2-11】图

2.3.2 平面一般力系的平衡

1. 平面一般力系的平衡条件

由前面的讨论可知,当物体受平面一般力系作用时,平面一般力系向任意一点简化可得到两个基本力系:平面汇交力系和平面力偶系。平面汇交力系合成为一个主矢,平面力偶系合成为一个主矩。故平面一般力系平衡时,两个基本力系必须分别平衡,即主矢与主矩都等于零时,物体平衡;若物体平衡,则力系的主矢和主矩必为零,即

$$F'_R = 0, M'_O = 0$$

当主矢为零,即 $F'_R = 0$ 时,力系中各力在两个坐标轴上投影的代数和分别等于零,即 $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$;当主矩为零时,各力对任意一点之矩的代数和等于零,即 $\sum M_O = 0$ 。

因此,平面一般力系平衡的解析条件为:力系中所有力在两个坐标轴上投影的代数和均等于零,所有力对任意一点之矩的代数和等于零。

2. 平面一般力系平衡方程的形式

平面一般力系的平衡方程有以下三种形式。

1) 基本式

式(2-17)即平面一般力系平衡方程的基本形式。前两个方程称为**投影方程**,后一个方程称为**力矩方程**,这三个方程是彼此独立的,因此可求解三个未知量。

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

在应用平面一般力系平衡方程求解未知量时,为了使计算简便,有时可以采用平面一般力系平衡方程的其他两种形式。

2) 二力矩式

在力系作用面内任取两点 A、B 及 x 轴(或 y 轴),可以证明平面一般力系的平衡方程可改写成两个力矩方程和一个投影方程的形式,即

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \\ \sum F_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

式中, x 轴(或 y 轴)不与 A、B 两点的连线垂直。

3) 三力矩式

在力系作用面内任意取三个不在同一条直线上的点 A、B、C,则力系的平衡方程可写为三个力矩方程的形式,即

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \\ \sum M_C &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

式中, A、B、C 三点不在同一条直线上。

在实际应用中,无论选用基本式、二力矩式和三力矩式中的哪一种形式,一般都是可以的,所得结果都是相同的,选择哪种形式完全取决于计算是否方便。

但是必须注意不论选择何种形式,平面一般力系独立的平衡方程只有三个。在这三个独立的方程之外列出的任何方程都是这三个独立方程的组合而不是独立的。因此,应用平面一般力系的平衡方程只能求解三个未知量。

3. 平面一般力系平衡方程的应用

平面一般力系的平衡问题在工程实际中极为常见。平面一般力系的平衡包括两种情况,即单个物体的平衡和物体系统的平衡。

下面讨论单个物体的平衡问题,由于此类问题是求解物体系统平衡问题的基础,因此必须熟练掌握。

求单个物体平衡问题的步骤如下。

(1) 选取研究对象。根据已知量和待求量,选择合适的研究对象。

(2) 分析研究对象的受力情况,画出研究对象的受力图。这是解题的关键一步,画出作用在研究对象上的所有力,包括主动力和约束反力。



(3)列出平衡方程。平面一般力系只有三个独立平衡方程。平面平行力系(后面介绍)只有两个平衡方程,选取适当的坐标系和矩心以使方程中的未知量最少。

(4)解方程求出未知量。计算结果为负值,表示力在受力图中假设的指向与实际方向相反。运算时应连同正负号一起代入。

为简化计算,在建立投影方程时所选取的坐标轴应该与尽可能多的未知力垂直,以便使这些未知力在此坐标轴上的投影为零,避免一个方程中含有多个未知量而需要解联立方程的麻烦。在建立力矩方程时,尽量选取两个未知力的交点作为矩心,这样通过矩心的未知力就不会在此力矩方程中出现,从而达到减少方程中未知量个数的目的。尽量使一个方程只包含一个未知量,以减少解联立方程的麻烦。

(5)校核计算结果。

现举例说明求解单个物体平衡问题的方法和主要步骤。

【例 2-12】 已知水平梁 AB , A 端为固定铰支座, B 端为水平面上的滚动支座, 受力及几何尺寸如图 2-23(a) 所示, 试求 A 、 B 端的约束力。

【解】 (1)选取梁 AB 为研究对象。

(2)对梁 AB 进行受力分析, 画出受力图, 如图 2-23(b) 所示。

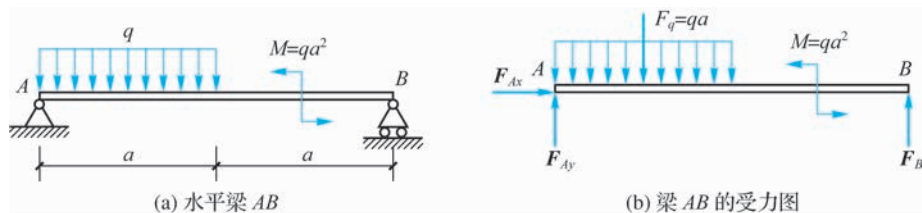


图 2-23 【例 2-12】图

作用在梁 AB 上的主动力为均布荷载 q 和力偶矩 M , 约束力有固定铰支座 A 端的两个分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 及滚动支座 B 端的 F_B 。三个支座的约束反力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_B 的方向均为假设方向。通常把均布荷载看成一个集中力 F_q , 显然 $F_q=qa$ 且作用在均布荷载的中间位置。

作用在梁 AB 上的这五个力组成一个平面一般力系。

(3)建立直角坐标系, 列出平面一般力系的三个平衡方程并求解。

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, F_{Ax} = 0 \\ \sum M_A &= 0, 2aF_B - \frac{1}{2}qa^2 + M = 0\end{aligned}$$

解得

$$F_B = -\frac{qa}{4}$$

F_B 的计算结果为负值, 说明其实际方向与图中假设的方向相反, 即向下。

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_B - qa = 0$$

解得

$$F_{Ay} = \frac{5qa}{4}$$

F_{Ay} 的计算结果为正值, 说明其实际方向与图中假设的方向相同, 即向上。

应强调指出: 对于平面一般力系只能列出三个平衡方程, 除此之外所列出的其他方程都

是不独立的,但它们能起到校核的作用。如本例中可以利用 $\sum M_B=0$ 校核以上计算结果的正确性。

(4)校核。由于

$$\sum M_B = -2aF_{Ay} + qa\left(\frac{a}{2} + a\right) + qa^2 = -\frac{5qa^2}{2} + \frac{3qa^2}{2} + qa^2 = 0$$

所以计算结果正确。

在以后进行此类计算时应尤其注意以下两个问题。

(1)关于力的实际方向与假设方向问题。

①受力图中所画的约束反力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_B 的方向均为假设方向。

②如果力的计算结果为正值,表明其实际方向与受力图中假定的指向相同;反之,表明力的实际方向与受力图中假定的指向相反。

(2)关于力偶问题。

①在列平衡方程时,因为组成力偶的两个力在任意一个坐标轴上投影的代数和都等于零,所以力偶 M 在 x 、 y 轴上力的投影方程中不出现。

②力偶 M 对平面内任意一点之矩都是同一个数值,就是它本身的力偶矩,与力偶 M 到矩心的距离无关。

【例 2-13】 求图 2-24(a)所示悬臂梁的支座反力。

【解】 (1)取梁 AB 为研究对象。

(2)对梁 AB 进行受力分析,画出受力图,如图 2-24(b)所示。梁 AB 上共有七个作用力,即集中荷载 F_P 、均布荷载 q 、三角形荷载、力偶荷载 $M=12\text{ kN}\cdot\text{m}$,支座反力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 M_A 。

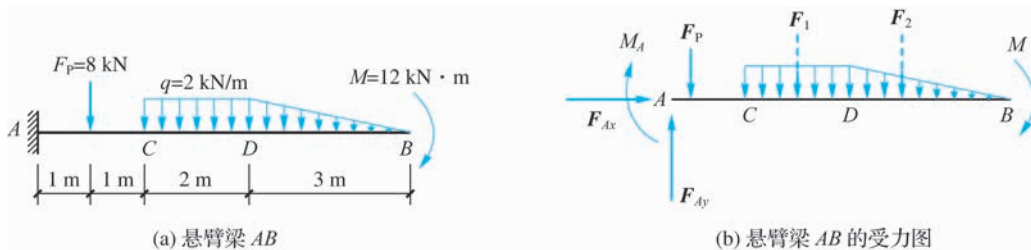


图 2-24 【例 2-13】图

由于 A 支座为固定端支座,去掉支座约束后可以用 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 M_A 代替,反力指向为假设。可将均布荷载和三角形荷载简化为集中力 F_1 ($2 \times 2 = 4\text{ kN}$)和 F_2 ($\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3\text{ kN}$), F_1 和 F_2 分别作用在 CD 段的中间和 DB 段距 D 点 $1/3$ 处(距离 D 点 1 m 处)。

以上这七个作用力组成一个平面一般力系。

(3)列出平面一般力系的三个平衡方程并求解。

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, F_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0, F_{Ay} - 8 - 4 - 3 = 0 \end{cases}$$

解得 $F_{Ay} = 15\text{ kN}$ 。

F_{Ay} 的计算结果为正值,说明其实际方向与图中的假设方向相同,即向上。



$$\sum M_A = 0, -M_A - 8 \times 1 - 4 \times 3 - 3 \times 5 - 12 = 0$$

解得 $M_A = -47 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

M_A 的计算结果为负值,说明受力图中 M_A 的转向假设错误,实际转向应为逆时针。

【例 2-14】 钢筋混凝土刚架所受荷载及支承情况如图 2-25(a)所示。已知 $q=4 \text{ kN/m}$, $F_{P1}=10 \text{ kN}$, $M=2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_{P2}=20 \text{ kN}$, 试求支座处的反力。

【解】 (1) 选取刚架 ADCB 为研究对象。由于已知力和待求力都作用于刚架 ADCB 上,故选取刚架 ADCB 为研究对象,不包括两个支座。

(2) 对刚架 ADCB 进行受力分析,画出受力图,如图 2-25(b)所示。作用于刚架 ADCB 上的主动力有 F_{P1} 、 F_{P2} 、 M 和 q , 支座反力有 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 F_B , 以上七个力构成一个平面一般力系。

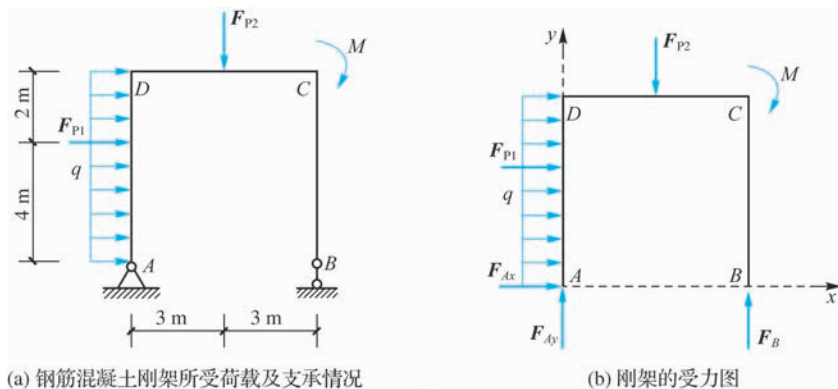


图 2-25 【例 2-14】图

(3) 建立直角坐标系,列出平面一般力系的三个平衡方程并求解。

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_{P1} + 6q = 0$$

解得 $F_{Ax} = -F_{P1} - 6q = -10 - 6 \times 4 = -34 \text{ kN}(\leftarrow)$ 。

$$\sum M_A = 0, 6F_B - 4F_{P1} - 3F_{P2} - M - 6q \times 3 = 0$$

解得 $F_B = \frac{4F_{P1} + 3F_{P2} + M + 18q}{6} = \frac{4 \times 10 + 3 \times 20 + 2 + 18 \times 4}{6} = 29 \text{ kN}(\uparrow)$ 。

$$\sum M_B = 0, -6F_{Ay} - 4F_{P1} + 3F_{P2} - M - 6q \times 3 = 0$$

解得 $F_{Ay} = \frac{-4F_{P1} + 3F_{P2} - M - 18q}{6} = \frac{-4 \times 10 + 3 \times 20 - 2 - 18 \times 4}{6} = -9 \text{ kN}(\downarrow)$ 。

F_{Ax} 和 F_{Ay} 的计算结果均为负值,说明实际方向与假设方向相反。

(4) 校核。利用 $\sum F_y = 0$ 校核以上计算结果的正确性。

因为 $\sum F_y = F_{Ay} + F_B - F_{P2} = -9 + 29 - 20 = 0$, 所以计算结果正确。

2.3.3 平面平行力系的平衡方程

各力作用线在同一平面内,且相互平行的力系,称为平面平行力系。平面平行力系是平面一般力系的一种特殊情况,如图 2-26 所示。

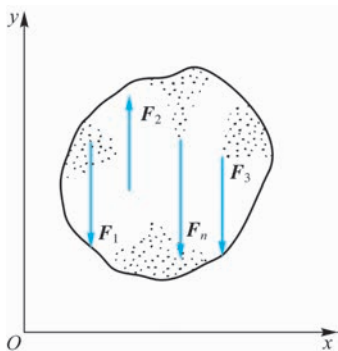


图 2-26 平面平行力系

设平面平行力系中各力都垂直于 x 轴, 则 $\sum F_x = 0$, 即式(2-18)中的 $\sum F_x = 0$ 不管物体是否平衡都自然满足, 因此 $\sum F_x = 0$ 不是平面平行力系的平衡方程。所以, 平面平行力系的平衡方程有以下两种形式。

第一种形式为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ \sum M_O &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

注意 式(2-20)中的投影轴应与各力平行。

第二种形式为二力矩式, 即

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

注意 式(2-21)中 A 、 B 两点的连线不与各力的作用线平行。

无论哪一种平面平行力系都只有两个独立的平衡方程, 只能求解出两个未知数。

【例 2-15】 如图 2-27(a)所示, 在水平双侧外伸梁上作用有集中荷载 F 和荷载集度为 q 的均布荷载。已知 $q = 20 \text{ kN/m}$, $F = 20 \text{ kN}$, $a = 0.8 \text{ m}$, 求支座 A 、 B 的约束力。

【解】 (1) 取外伸梁为研究对象。

(2) 对外伸梁 AB 进行受力分析, 画出受力图, 如图 2-27(b)所示。当梁只受竖向荷载作用时不会产生水平支座反力, 因此作用在梁上的力有均布荷载 q 、集中荷载 F 、约束反力 F_A 和 F_B 。这四个力组成一个平面平行力系。

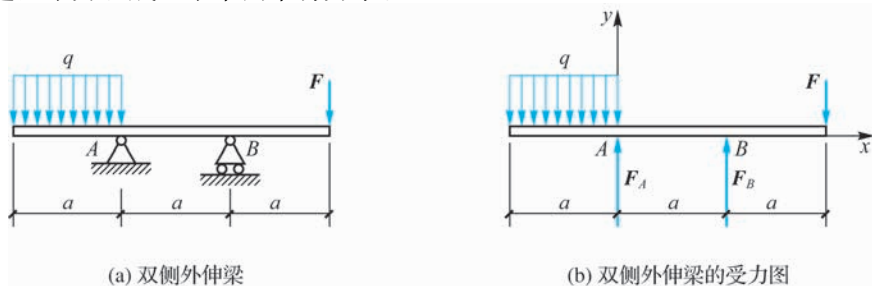


图 2-27 【例 2-15】图



(3) 建立直角坐标系, 列出平面平行力系的两个平衡方程并求解。

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, F_B a + qa \times \frac{a}{2} - 2aF = 0$$

$$\text{解得 } F_B = -\frac{qa}{2} + 2F = -\frac{20 \times 0.8}{2} + 2 \times 20 = 32 \text{ kN}。$$

$$\sum F_y = 0, F_B + F_A - qa - F = 0$$

$$\text{解得 } F_A = qa + F - F_B = 20 \times 0.8 + 20 - 32 = 4 \text{ kN}。$$

【例 2-16】 图 2-28(a) 为塔式起重机的结构简图。设机架重 $G = 500 \text{ kN}$, 重心在 C 点, 与右轨相距 $a = 1.5 \text{ m}$ 。最大起吊重量 $F_P = 250 \text{ kN}$, 与右轨 B 最远距离 $l = 10 \text{ m}$ 。平衡物重力为 G_1 , 与左轨 A 相距 $x = 6 \text{ m}$, A 、 B 两轨相距 $b = 3 \text{ m}$ 。试求起重机在满载与空载时都不至于翻倒的平衡物重力 G_1 的范围。

【解】 作用在起重机上的力有主动力 G 、 F_P 、 G_1 和约束反力 F_{NA} 、 F_{NB} , 这五个力组成一个平面平行力系, 如图 2-28(b) 所示。

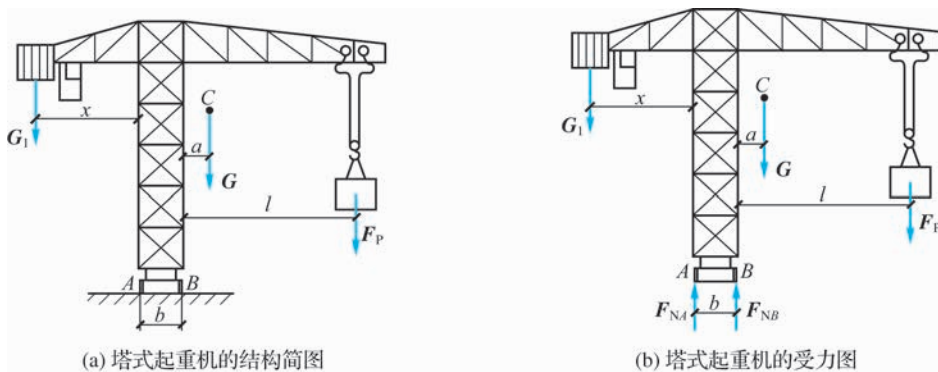


图 2-28 【例 2-16】图

(1) 要保证满载时机身平衡而不向右翻倒, 这些力必须满足平衡方程, 在此状态下, A 点将处于离地与不离地的临界状态, 即 $F_{NA} = 0$ 。这样求出的 G_1 值就是它应有的最小值。

列出平衡方程

$$\sum M_B(\mathbf{F}) = 0, G_{1,\min}(x+b) - Ga - F_P l = 0$$

解得

$$G_{1,\min} = \frac{Ga + F_P l}{x+b} = \frac{500 \times 1.5 + 250 \times 10}{6+3} = 361 (\text{kN})$$

(2) 要保证空载时机身平衡而不向左翻倒, 这些力必须满足平衡方程, 在此状态下, B 点将处于离地与不离地的临界状态, 即 $F_{NB} = 0$ 。这样求出的 G_1 值就是它应有的最大值。

列出平衡方程

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, G_{1,\max}x - G(a+b) = 0$$

解得

$$G_{1,\max} = \frac{G(a+b)}{x} = \frac{500 \times (1.5+3)}{6} = 375 (\text{kN})$$

因此, 平衡物重力 G_1 的范围为 $361 \text{ kN} \leq G_1 \leq 375 \text{ kN}$ 。

2.3.4 物体系统的平衡

前面讲解了单个物体的平衡问题,但在工程实际中,往往会遇到由几个物体通过一定的约束联系在一起的系统,这种系统称为物体系统。图 2-29(a)所示的组合梁就是一个物体系统,它是由梁 AB 和梁 BC 通过铰 B 连接,并支承在 A、C 支座上而组成的。物体系统的平衡是指系统整体及组成系统的每一个物体都处于平衡状态。

研究物体系统的平衡问题,不仅要知道外界对这个系统的作用力,如外荷载和支座反力,而且还要知道系统内各物体之间的相互作用力。把作用在系统上来自系统以外的力(荷载和支座反力)称为外力;把系统内各物体之间的相互作用力称为内力。如图 2-29(b)所示,组合梁所受的荷载 F_{P1} 、 F_{P2} 及 A、C 支座处的反力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_C 就是外力。而 B 铰处左右两段梁的相互作用力 F_{Bx} 、 F_{By} 、 F'_{Bx} 、 F'_{By} 就是组合梁的内力。要暴露内力,必须将物体系统拆开,画出它们的受力图,如将梁从铰 B 处拆开为 AB 和 BC 两段,分别画出 AB、BC 部分的受力图,如图 2-29(c)、(d)所示。

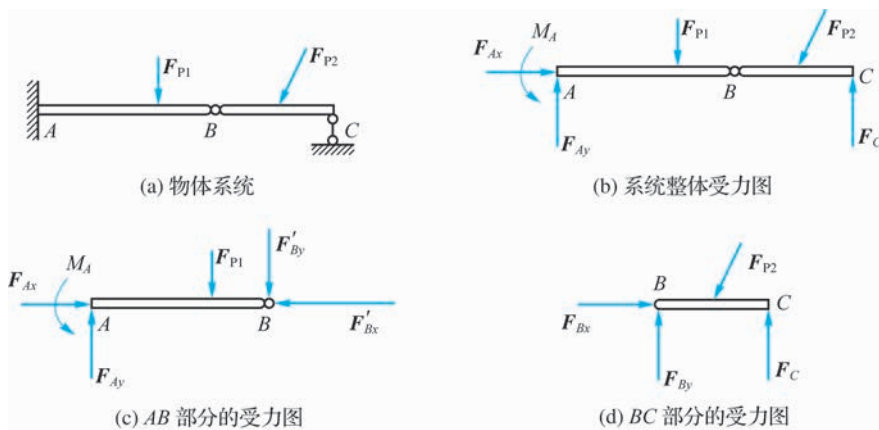


图 2-29 物体系统的平衡

需要注意的是,外力和内力的概念是相对的,取决于所选取的研究对象。如图 2-29(a)所示的组合梁在铰 B 处两段梁的相互作用力,对组合梁整体来说,是内力;而对于左段梁或右段梁来说就是外力。

在解答物体系统的平衡问题时,可以选取整个物体系统作为研究对象,也可以选取物体系统中的某部分物体(一个物体或几个物体的组合)作为研究对象,以建立平衡方程。由于物体系统的未知量较多,应尽量避免从总体的联立方程组中解出,通常可先选取整个系统为研究对象,看能否从中解出一或两个未知量,然后再分析每个物体的受力情况,判断选取哪个物体为研究对象,使之建立的平衡方程中包含的未知量较少,以简化计算。

下面举例说明求解物体系统平衡问题的方法。

【例 2-17】 组合梁所受荷载如图 2-30(a)所示。已知 $F_{P1} = 16 \text{ kN}$, $F_{P2} = 20 \text{ kN}$, $M = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 梁自重不计,求支座 A、C 的反力。

【解】 组合梁由 AB 和 BC 两段组成,作用于每一个物体的力系都是平面一般力系,共有六个独立的平衡方程;而约束反力为固定端支座处的三个未知量、铰 B 处的两个未知力和支座 C 处的一个未知力。由六个平衡方程可求解六个未知量。



(1)取整个梁为研究对象,其受力图如图 2-30(b)所示。

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - F_{P2} \cos 60^\circ = 0$$

解得 $F_{Ax} = F_{P2} \cos 60^\circ = 10 \text{ kN}(\rightarrow)$ 。

(2)其余三个未知量 F_{Ay} 、 M_A 和 F_C , 无论怎样选取投影轴和矩心, 都无法求出其中任何一个, 因此必须将 AB 梁和 BC 梁分开考虑。

现取 BC 梁为研究对象, 其受力图如图 2-30(c)所示。

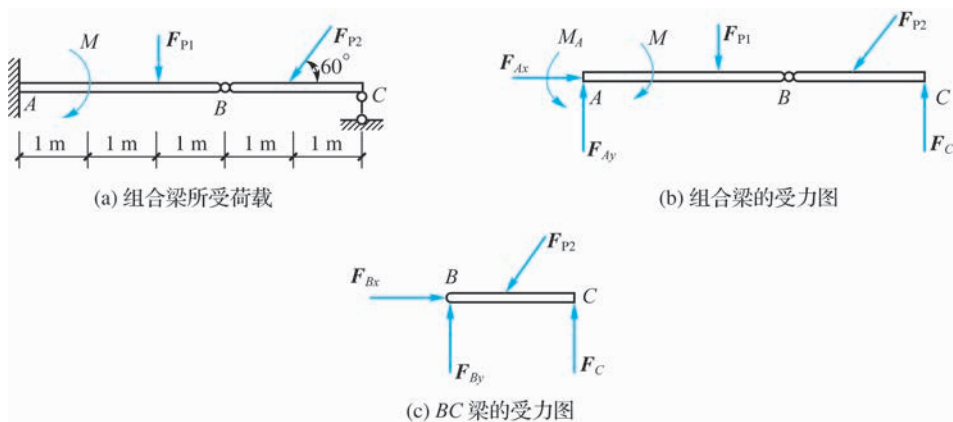


图 2-30 【例 2-17】图

$$\sum F_x = 0, F_{Bx} - F_{P2} \cos 60^\circ = 0$$

解得 $F_{Bx} = F_{P2} \cos 60^\circ = 10 \text{ kN}(\rightarrow)$ 。

$$\sum M_B = 0, 2F_C - F_{P2} \sin 60^\circ \times 1 = 0$$

解得 $F_C = \frac{F_{P2} \sin 60^\circ}{2} = 8.66 \text{ kN}(\uparrow)$ 。

$$\sum F_y = 0, F_C + F_{By} - F_{P2} \sin 60^\circ = 0$$

解得 $F_{By} = -F_C + F_{P2} \sin 60^\circ = 8.66 \text{ kN}(\uparrow)$ 。

再由图 2-30(b)得到

$$\sum M_A = 0, 5F_C - 4F_{P2} \sin 60^\circ - 2F_{P1} - M + M_A = 0$$

解得 $M_A = 4F_{P2} \sin 60^\circ + 2F_{P1} - 5F_C + M = 65.98 \text{ kN}(\quad)$ 。

$$\sum F_y = 0, F_C + F_{Ay} - F_{P1} - F_{P2} \sin 60^\circ = 0$$

解得 $F_{Ay} = -F_C + F_{P2} \sin 60^\circ + F_{P1} = 24.66 \text{ kN}(\uparrow)$ 。

(3)校核。对整个组合梁列出平衡方程

$$\begin{aligned} \sum M_B &= M_A - 3F_{Ay} + F_{P1} \times 1 - 1 \times F_{P2} \sin 60^\circ + 2F_C - M \\ &= 65.98 - 3 \times 24.66 + 16 \times 1 - 1 \times 20 \times 0.866 + 2 \times 8.66 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

可见计算结果正确。

【例 2-18】 图 2-31(a)所示的钢筋混凝土三铰刚架受荷载作用。已知 $q = 16 \text{ kN/m}$, $F_P = 24 \text{ kN}$, 求支座 A、B 和铰 C 处的约束反力。

【解】 三铰刚架由左、右两半刚架组成,受到平面一般力系的作用,可以列出六个独立的平衡方程。分析整个三铰刚架和左、右两半刚架的受力情况,画出受力图,如图 2-31(b)、(c)和(d)所示。可见,系统的未知量也为六个,可用六个平衡方程求解出六个未知量。

(1)取整个三铰刚架为研究对象,其受力图如图 2-31(b)所示。

$$\sum M_A = 0, -q \times 8 \times 4 - F_P \times 10 + F_{By} \times 16 = 0$$

$$\text{解得 } F_{By} = \frac{1}{16} \times (16 \times 32 + 24 \times 10) = 47 \text{ kN}(\uparrow)。$$

$$\sum M_B = 0, q \times 8 \times 12 + F_P \times 6 - F_{Ay} \times 16 = 0$$

$$\text{解得 } F_{Ay} = \frac{1}{16} \times (16 \times 8 \times 12 + 24 \times 6) = 105 \text{ kN}(\uparrow)。$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - F_{Bx} = 0$$

解得 $F_{Ax} = F_{Bx}$ 。

(2)取左半刚架为研究对象,其受力图如图 2-31(c)所示。

$$\sum M_C = 0, F_{Ax} \times 8 + q \times 8 \times 4 - F_{Ay} \times 8 = 0$$

$$\text{解得 } F_{Ax} = \frac{1}{8} \times (105 \times 8 - 16 \times 8 \times 4) = 41 \text{ kN}(\rightarrow)。$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{Cy} - q \times 8 = 0$$

$$\text{解得 } F_{Cy} = 16 \times 8 - 105 = 23 \text{ kN}(\uparrow)。$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - F_{Cx} = 0$$

解得 $F_{Cx} = F_{Ax} = 41 \text{ kN}(\leftarrow)。$

因为 $F_{Ax} = F_{Bx}$, 所以 $F_{Bx} = 41 \text{ kN}(\leftarrow)。$

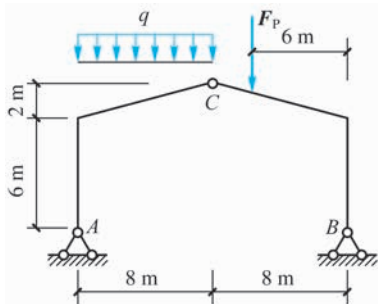
(3)校核。取右半刚架为研究对象,其受力图如图 2-31(d)所示。

$$\sum F_x = 41 - 41 = 0$$

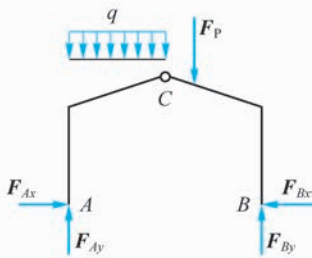
$$\sum F_y = -23 - 24 + 47 = 0$$

$$\sum M_C = 47 \times 8 - 41 \times 8 - 24 \times 2 = 0$$

可见计算结果正确。



(a) 钢筋混凝土三铰刚架



(b) 三铰刚架的受力图

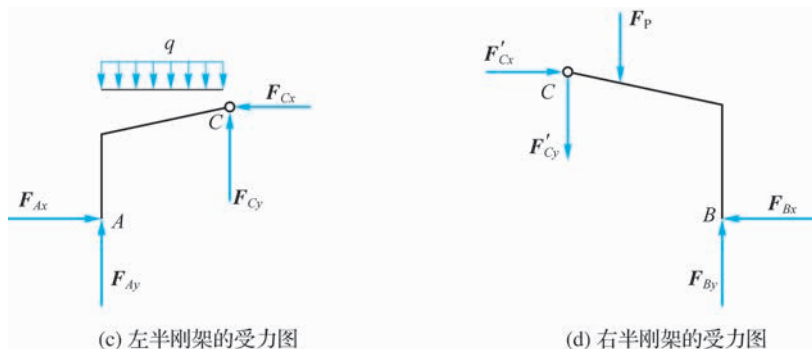


图 2-31 【例 2-18】图

由以上计算可知,物体系统中每个物体的受力分析方法和单个物体的受力分析方法相同,但应注意以下几点。

- (1)对物体系统进行受力分析时往往需要画出整体受力图。
- (2)画单个物体的受力图时,注意作用力与反作用力的关系。
- (3)注意判断二力构件。二力构件一般不作为单个物体画出其受力图。

2.3.5 静定与超静定

前面所讨论的单个物体或物体系统的平衡问题,由于未知量的数目与所能列出的独立的平衡方程的数目相等,因而应用平衡方程可以求出全部未知量,我们把这类的问题称为静定问题。如果未知量的数目多于独立的平衡方程的数目,则不能应用平衡方程求出全部未知量,这类问题称之为超静定问题。超静定次数为未知量的数目减去独立的平衡方程的数目。

在工程实际中,为了提高结构的刚度和坚固性,经常在结构上增加多余约束,这样原来的静定结构就变成了超静定结构。图 2-32(a)所示的简支梁 AB 有三个未知量 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 F_B ,可列出三个独立的平衡方程,是一个静定问题;如果在梁的中间增加一个支座 C[见图 2-32(b)],则有四个未知量 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_B 和 F_C ,而独立的平衡方程数仍为三个,未知量的数目比方程数多一个,故为一次超静定问题。又如图 2-33(a)所示,用两根钢丝吊起重物,未知量有两个,独立的平衡方程数也是两个(重物受平面汇交力系的作用),因此是静定的;如果用三根钢丝吊起重物[见图 2-33(b)],则未知量有三个,而平衡方程仍只有两个,故为一次超静定问题。

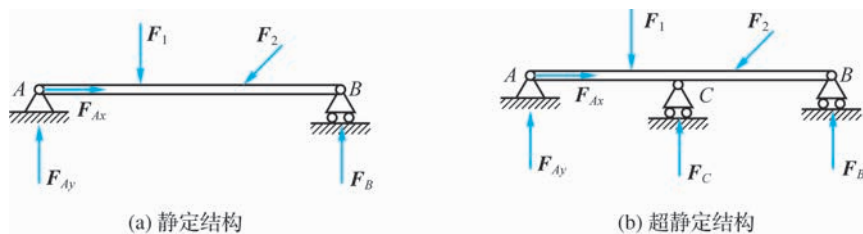


图 2-32 静定与超静定简支梁

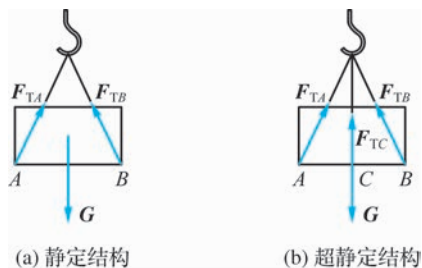


图 2-33 静定与超静定重物

求解超静定问题时,必须考虑物体在受力后产生的变形,根据物体的变形条件,列出足够的补充方程后,才能求出全部未知量。这类问题已超出静力学的范畴,将在结构力学中讨论,在静力学中只研究静定问题。



思考与练习

2-1 平面一般力系向作用面内任意一点简化的结果是什么?若主矩恒为零,则力系一定为零,为什么?

2-2 平面一般力系的平衡方程有几种形式?应用时有什么限制?

2-3 平面一般力系的解题步骤是什么?

2-4 什么是物体系统?求解物体系统的平衡问题时应注意什么?

2-5 什么是静定问题和超静定问题?

2-6 对于由 n 个物体组成的物体系统,是否可列出 $3n$ 个独立的平衡方程?

2-7 已知 $F_1 = F_2 = 200 \text{ N}$, $F_3 = 100 \text{ N}$, $F_4 = 120 \text{ N}$,各力方向如图 2-34 所示,求:

(1)各力在坐标轴上的投影;

(2)该力系的合力。

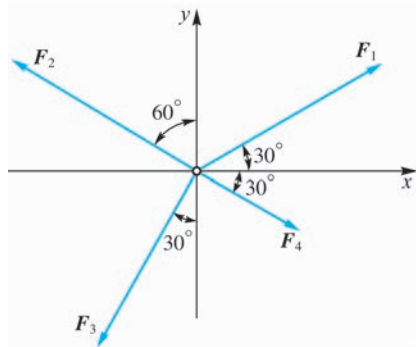


图 2-34 题 2-7 图

2-8 如图 2-35 所示,已知 $F_P = 20 \text{ kN}$, A 、 B 、 C 三处铰接,不计自重,求杆件 AB 、 BC 所受的力。

2-9 求如图 2-36 所示梁的支座反力。



2-10 求如图 2-37 所示刚架的支座的约束反力,其中 $F_P=20\text{ kN}$ 。

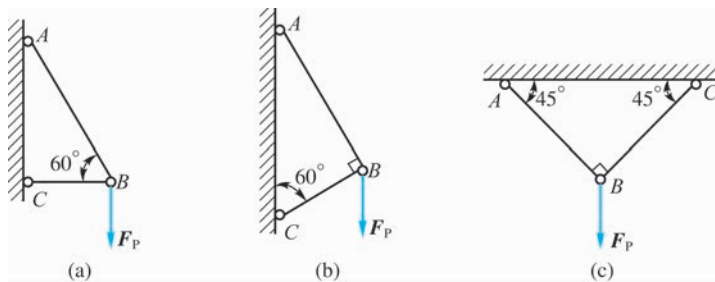


图 2-35 题 2-8 图

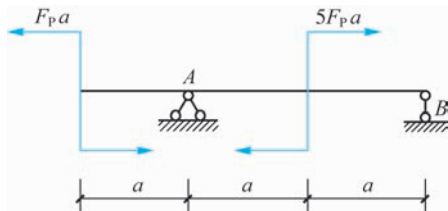


图 2-36 题 2-9 图

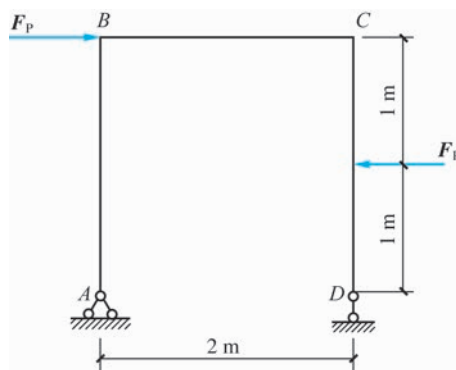


图 2-37 题 2-10 图

2-11 在如图 2-38 所示的平面力系中, $F_1=56.57\text{ N}$, $F_2=80\text{ N}$, $F_3=40\text{ N}$, $F_4=110\text{ N}$, $M=2\ 000\text{ N}\cdot\text{m}$ 。 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 、 M 这五个力构成一个平面力系。各力作用线已在图中标出,图中距离单位为 mm。试求:

- (1) 此力系向 O 点简化的结果;
- (2) 此力系合力的大小、方向及合力作用线的位置。

2-12 如图 2-39 所示,挡土墙自重 $G=400\text{ kN}$,土压力 $F=320\text{ kN}$,水压力 $F_1=176\text{ kN}$ 。试求这些力向底边中心 O 简化的结果,并求合力作用线的位置。

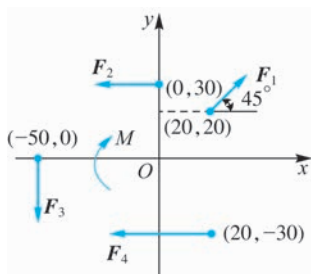


图 2-38 题 2-11 图

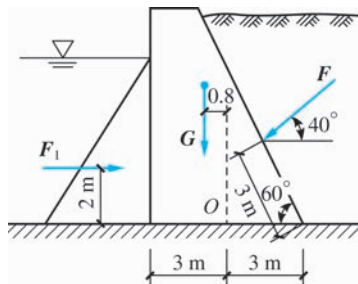


图 2-39 题 2-12 图

2-13 试分别求出图 2-40 所示三个刚架结构的支座反力。

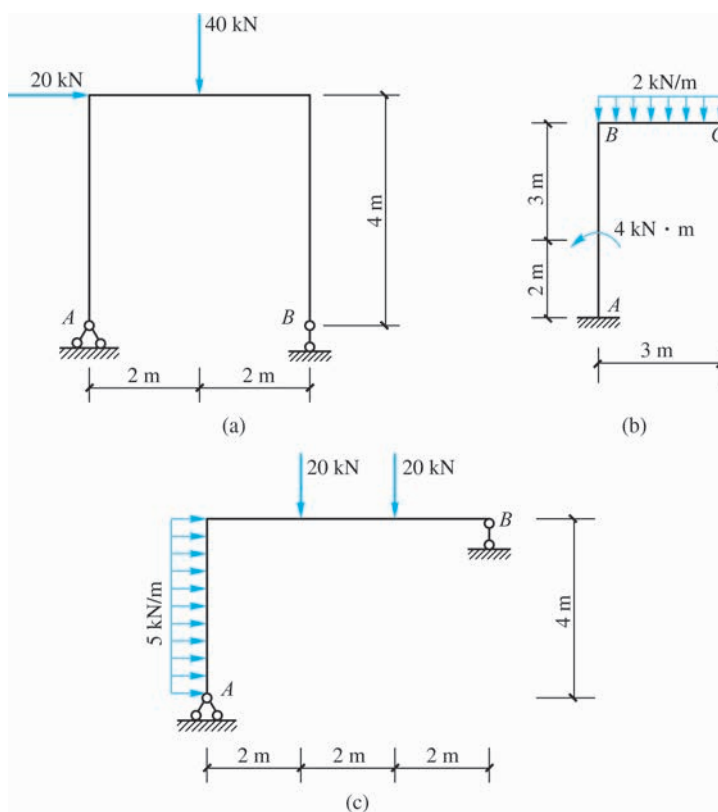
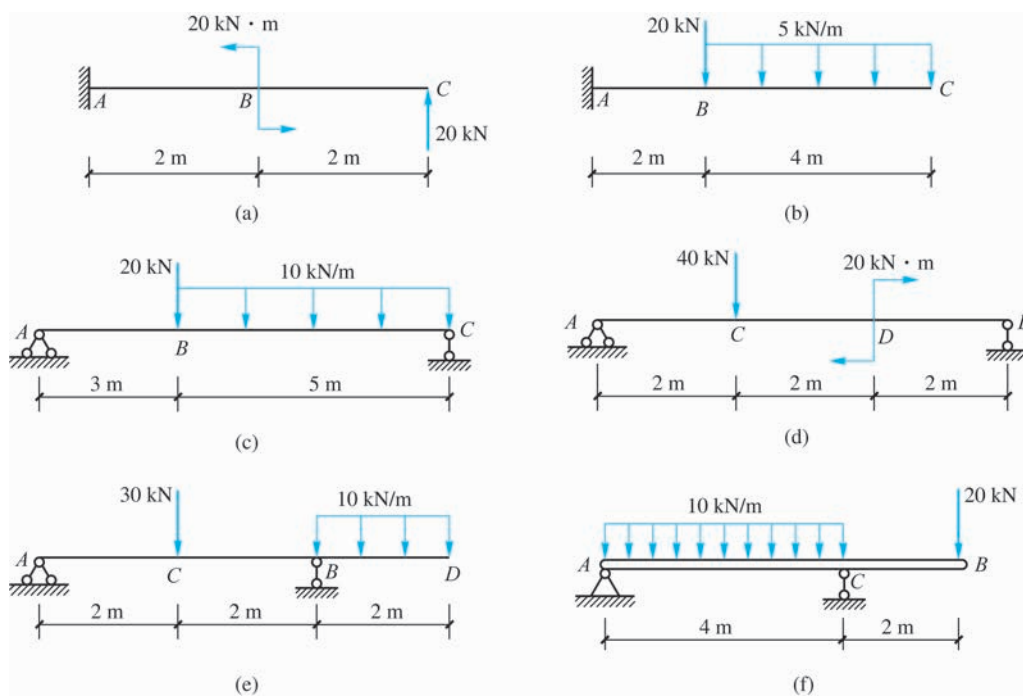


图 2-40 题 2-13 图

2-14 求如图 2-41 所示各梁的约束反力。



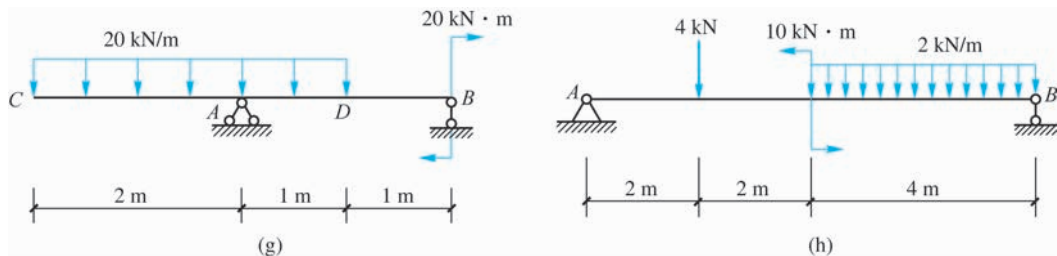


图 2-41 题 2-14 图

2-15 如图 2-42 所示的水平梁 AB 受到一个均布荷载和一个力偶的作用。已知均布荷载的集度 $q=0.2 \text{ kN/m}$, 力偶矩的大小 $M=1 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 梁的长度 $l=5 \text{ m}$, 不计梁自重, 求支座 A 、 B 处的约束反力。

2-16 梁 AB 的一端为固定端支座, 另一端为自由端, 这样的梁称为悬臂梁。如图 2-43 所示, 梁承受均布荷载 q 和一个集中力 F_P 的作用。已知 $F_P=10 \text{ kN}$, $q=2 \text{ kN/m}$, $l=4 \text{ m}$, $\alpha=45^\circ$, 梁的自重不计, 求支座 A 处的反力。

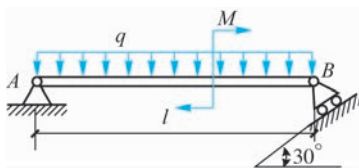


图 2-42 题 2-15 图

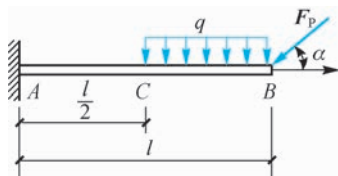


图 2-43 题 2-16 图

2-17 如图 2-44 所示, 梁 AB 的 A 端为固定铰支座, B 端为可动铰支座, 梁上受集中力 F 与力偶 M 的作用。已知 $F=10 \text{ kN}$, $M=2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $a=1 \text{ m}$, 试求支座 A 、 B 处的反力。

2-18 如图 2-45 所示, 一水平托架承受重 $G=20 \text{ kN}$ 的重物, A 、 B 、 C 各处均为铰链连接。各杆的自重不计, 试求托架 A 、 B 处的约束反力。

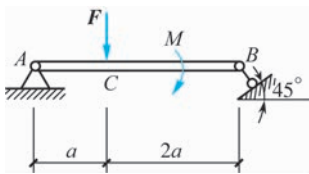


图 2-44 题 2-17 图

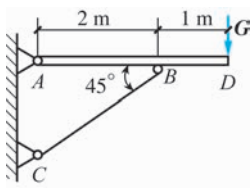


图 2-45 题 2-18 图

2-19 求如图 2-46 所示桁架支座处的约束反力。

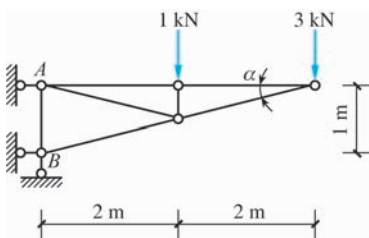


图 2-46 题 2-19 图

2-20 求如图 2-47 所示各梁的支座反力。

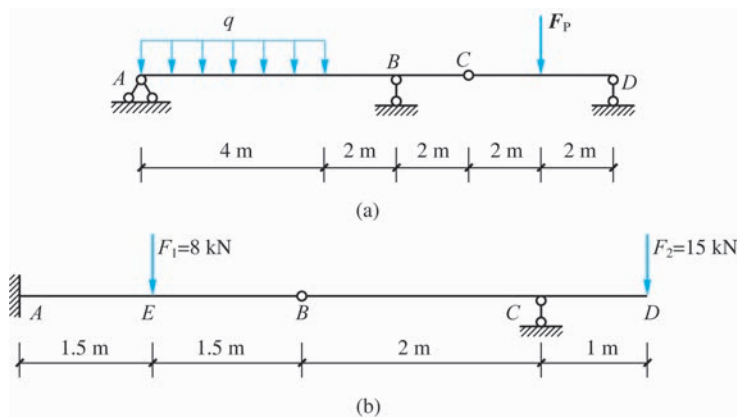


图 2-47 题 2-20 图

2-21 求如图 2-48 所示组合刚架 A、B、C 处的支座反力。

2-22 求如图 2-49 所示三铰拱支座处的约束反力。

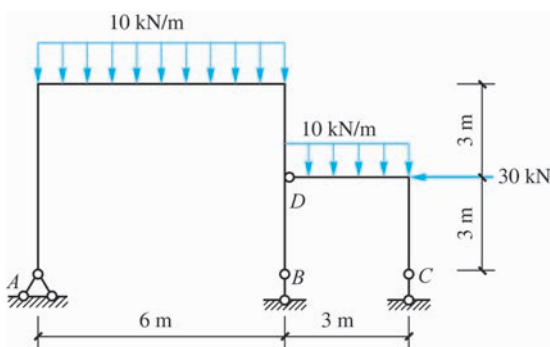


图 2-48 题 2-21 图

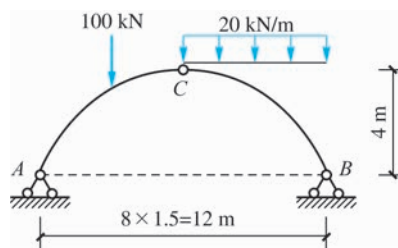


图 2-49 题 2-22 图

模块 3

空间力系



学习描述

知识目标

- (1) 熟悉力在空间直角坐标轴上的投影。
- (2) 掌握力对轴之矩的计算方法。
- (3) 掌握空间力系的平衡方程。
- (4) 掌握重心的坐标公式。

技能目标

- (1) 能运用空间任意力系的平衡方程解决较简单的空间力系的平衡问题。
- (2) 能将空间力系的平衡问题转化为平面力系的平衡问题进行解决。
- (3) 会计算组合图形的重心位置。

空间力系是工程实际中经常遇到的力系。通过学习本模块,可以帮助学生建立空间概念,学会处理和求解简单的空间力系的平衡问题,提升解决工程实际问题的能力。特别是学习将空间力系平衡问题转换为平面力系平衡问题的解法更有实际意义,它将为学习后续课程打下基础。另外,重心问题也是工程中常见的问题,作为一名工程技术人员,掌握重心(形心)的计算方法也是必需的。

3.1 力在空间直角坐标轴上的投影

1. 空间力系的种类

凡各力的作用线不在同一平面内的力系,称为空间力系。按力系中各力作用线的分布情况,空间力系可分为以下三类。

(1) 空间汇交力系。各力的作用线都汇交于一点的力系,称为空间汇交力系,如图 3-1(a)、(b)所示。

(2) 空间平行力系。各力的作用线都相互平行的力系,称为空间平行力系,如图 3-1(c)、(d)所示。

(3) 空间任意力系。各力的作用线在空间任意分布的力系,称为空间任意力系,如图 3-1(e)、(f)所示。

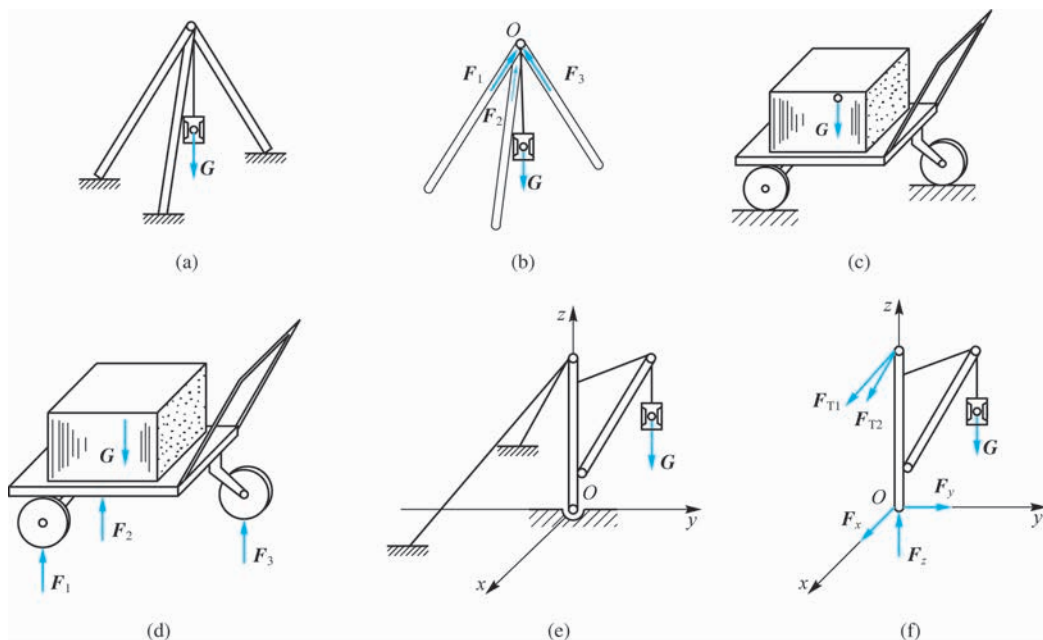


图 3-1 空间力系

2. 投影的运算

在工程实际中,虽然物体所受的力系都是空间力系,但是在很多情况下,实际的空间力系都是可以简化为平面力系来进行分析和计算的。

力在空间直角坐标轴上投影的概念与力在平面直角坐标轴上投影的概念相同,但由于力所对应的参考系不同,所以计算方法有所不同。力在空间直角坐标轴上的投影有两种运算方法,即直接投影法和二次投影法。

1) 直接投影法

已知空间力 $\boldsymbol{F}$ 及空间直角坐标系 $Oxyz$ 如图 3-2(a) 所示,力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 、 y 、 z 轴的夹角分别为 α 、 β 、 γ ,力 $\boldsymbol{F}$ 在空间直角坐标轴上的投影 F_x 、 F_y 、 F_z 分别为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

2) 二次投影法

如图 3-2(b) 所示,若已知空间力 $\boldsymbol{F}$ 与 z 轴的夹角为 γ ,则可以采用二次投影法,即先将力 $\boldsymbol{F}$ 投影到 z 轴和坐标面 xOy 上,力 $\boldsymbol{F}$ 在 xOy 面上的投影为

$$F_{xy} = F \sin \gamma$$

然后将 F_{xy} 投影到 x 、 y 轴上,设 F_{xy} 与 x 轴的夹角为 φ ,则力 $\boldsymbol{F}$ 在三个轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \sin \gamma \cos \varphi \\ F_y &= F \sin \gamma \sin \varphi \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

空间力 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上投影的正负规定与平面力系相同。

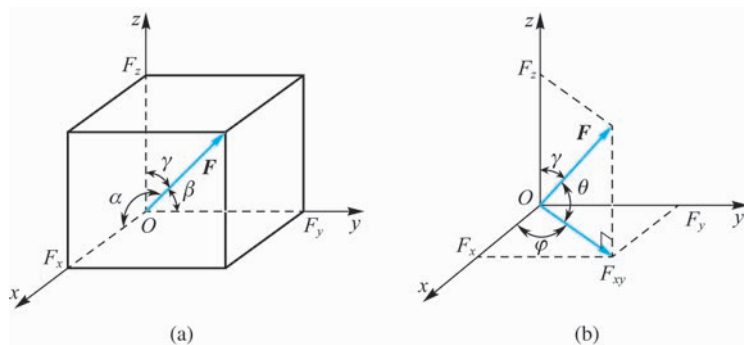


图 3-2 已知力系

如果已知一个力 F 在三个坐标轴上的投影为 F_x 、 F_y 和 F_z , 则由图 3-2(a) 可求得力 F 的大小和方向为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \cos \alpha &= \frac{F_x}{F} \\ \cos \beta &= \frac{F_y}{F} \\ \cos \gamma &= \frac{F_z}{F} \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

式中, $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 称为力 F 的方向余弦。

应当指出: 力在轴上的投影是代数量, 而力在平面上的投影为矢量。这是因为力在平面上投影的方向不能像在轴上的投影那样简单地用正负号来表明, 而必须用矢量来表示。

【例 3-1】 在一立方体上作用有 3 个力 F_1 、 F_2 、 F_3 , 如图 3-3 所示。已知 $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 1 \text{ kN}$, $F_3 = 5 \text{ kN}$, 试分别计算三个力在直角坐标轴上的投影。

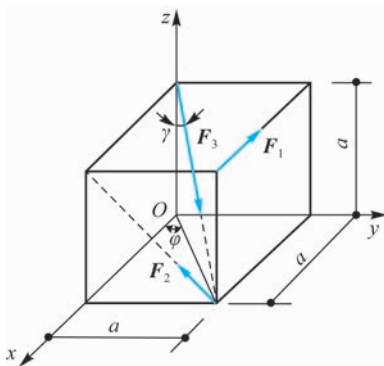


图 3-3 【例 3-1】图

【解】 力 F_1 的作用线与 x 轴平行, 与坐标面 yOz 垂直, 与 y 、 z 轴也垂直, 于是可得 $F_{x1} = -F_1 = -2 \text{ kN}$, $F_{y1} = 0$, $F_{z1} = 0$ 。

力 F_2 的作用线与 x 轴垂直, 与坐标面 yOz 平行。先将 F_2 投影在 x 轴和平面 yOz 上, 在 x 轴上的投影为零, 在平面 yOz 上的投影 F_{2yz} 为 F_2 本身, 于是可得

$$F_{x2}=0$$

$$F_{y2}=-F_{2yz}\cos 45^{\circ}=-F_2\cos 45^{\circ}=-1\times 0.707=-0.707(\text{kN})$$

$$F_{z2}=F_{2yz}\sin 45^{\circ}=F_2\sin 45^{\circ}=1\times 0.707=0.707(\text{kN})$$

设力 F_3 与 z 轴的夹角为 γ , 它在 xOy 面上的投影与 x 轴的夹角为 φ , 则由二次投影法可得

$$F_{x3}=F_3\sin\gamma\cos\varphi=5\times\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}\times\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{5}{\sqrt{3}}=2.89(\text{kN})$$

$$F_{y3}=F_3\sin\gamma\sin\varphi=5\times\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}\times\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{5}{\sqrt{3}}=2.89(\text{kN})$$

$$F_{z3}=-F_3\cos\gamma=-5\times\frac{a}{\sqrt{3}a}=-2.89(\text{kN})$$

3.2 力对轴之矩与合力矩定理

3.2.1 力对轴之矩

力作用在物体上可以使物体绕某点转动,也可以使物体绕某轴转动。例如,关门时,人手作用于门把手上 A 点的力 F 对门的作用效应如图 3-4 所示,将作用点 A 处的力 F 分解为平行于 z 轴的力 F_z 和垂直于 z 轴的平面内的分力 F_{xy} 。

由经验可知, F_z 不能使门转动,只有分力 F_{xy} 可使门绕 z 轴转动。若分力 F_{xy} 所在的平面与 z 轴的交点为 O , 则力 F_{xy} 对门轴之矩可用力 F_{xy} 对 O 点之矩来代替。设 O 点到力 F_{xy} 的作用线的距离为 d , 则

$$M_z(F)=M_z(F_{xy})=M_O(F_{xy})=\pm F_{xy}d \quad (3-4)$$

由此可见,力使刚体绕一轴转动效应的度量称为力对该轴之矩,简称力对轴之矩。它等于力在与轴垂直的平面上的分力对轴与平面交点之矩,记作 $M_z(F)$, 如图 3-5 所示。

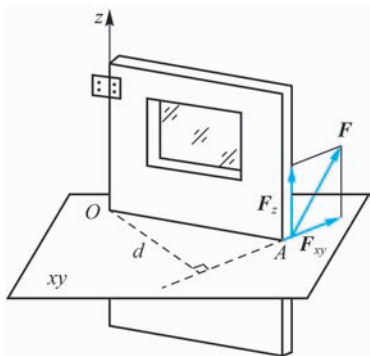


图 3-4 力 F 对门的作用效应

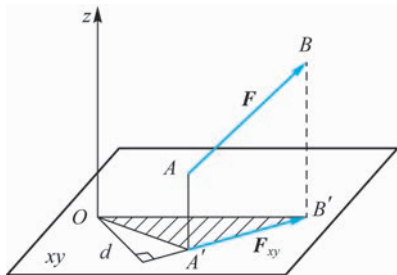


图 3-5 力对轴之矩

力对轴之矩为代数量,正负号表示力使物体绕轴转动的转向,并规定:从轴的正向看去,逆时针转动的力矩为正,顺时针转动的力矩为负。力矩的单位为 $\text{N}\cdot\text{m}$ 或 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。

由上述结论可知,力的作用线与轴相交或平行时,力对轴之矩等于零。



3.2.2 合力矩定理

在平面力系中推导出来的合力矩定理对空间力系也同样适用,即空间力系中的合力对某轴之矩等于力系中各分力对同一轴之矩的代数和,其表达式为

$$M_z(\mathbf{F}_R) = M_z(\mathbf{F}_1) + M_z(\mathbf{F}_2) + \cdots + M_z(\mathbf{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_z(\mathbf{F}_i) \quad (3-5)$$

在计算力对轴之矩时,有时应用合力矩定理会使计算变得简单:先将力 $\mathbf{F}$ 沿空间直角坐标轴分解为三个分力 $\mathbf{F}_x$ 、 $\mathbf{F}_y$ 、 $\mathbf{F}_z$,然后计算每个分力对轴之矩,最后求出这些力矩的代数和,即

$$\left. \begin{aligned} M_x(\mathbf{F}) &= M_x(\mathbf{F}_x) + M_x(\mathbf{F}_y) + M_x(\mathbf{F}_z) \\ M_y(\mathbf{F}) &= M_y(\mathbf{F}_x) + M_y(\mathbf{F}_y) + M_y(\mathbf{F}_z) \\ M_z(\mathbf{F}) &= M_z(\mathbf{F}_x) + M_z(\mathbf{F}_y) + M_z(\mathbf{F}_z) \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

【例 3-2】 曲拐轴受力如图 3-6(a)所示,已知 $F=600 \text{ N}$,求:

(1) 力 $\mathbf{F}$ 在 x 、 y 、 z 轴上的投影。

(2) 力 $\mathbf{F}$ 对 x 、 y 、 z 轴之矩。

【解】 (1) 计算投影。根据已知条件,应用二次投影法求解,如图 3-6(b)所示。

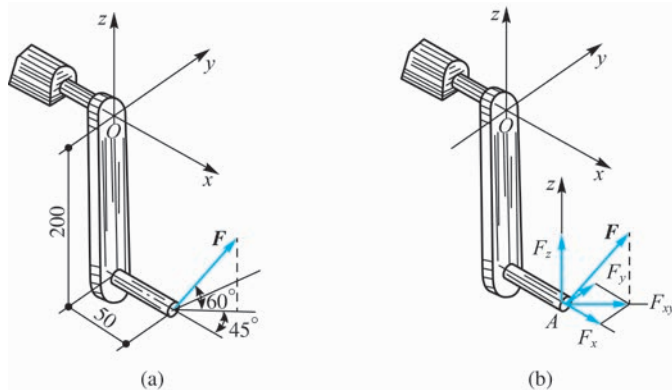


图 3-6 【例 3-2】图

先将力 $\mathbf{F}$ 向 Axy 平面和 Az 轴投影,得到 F_{xy} 和 F_z ;再将 F_{xy} 向 x 、 y 轴投影,得到 F_x 和 F_y 。于是,有

$$F_x = F_{xy} \cos 45^\circ = F \cos 60^\circ \cos 45^\circ = 600 \times 0.5 \times 0.707 = 212 (\text{N})$$

$$F_y = F_{xy} \sin 45^\circ = F \cos 60^\circ \sin 45^\circ = 600 \times 0.5 \times 0.707 = 212 (\text{N})$$

$$F_z = F \sin 60^\circ = 600 \times 0.866 = 520 (\text{N})$$

(2) 计算力对轴之矩。先将力 $\mathbf{F}$ 在作用点处沿 x 、 y 、 z 方向分解,得到三个分量 $\mathbf{F}_x$ 、 $\mathbf{F}_y$ 、 $\mathbf{F}_z$,它们的大小分别等于投影 F_x 、 F_y 、 F_z 的大小。

根据合力矩定理,可求得力 $\mathbf{F}$ 对指定的 x 、 y 、 z 轴之矩。

$$M_x(\mathbf{F}) = M_x(\mathbf{F}_x) + M_x(\mathbf{F}_y) + M_x(\mathbf{F}_z) = 0 + F_y \times 0.2 + 0 = 212 \times 0.2 = 42.4 (\text{N} \cdot \text{m})$$

$$\begin{aligned} M_y(\mathbf{F}) &= M_y(\mathbf{F}_x) + M_y(\mathbf{F}_y) + M_y(\mathbf{F}_z) = -F_x \times 0.2 - 0 - F_z \times 0.05 \\ &= -212 \times 0.2 - 520 \times 0.05 = -68.4 (\text{N} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

$$M_z(\mathbf{F}) = M_z(\mathbf{F}_x) + M_z(\mathbf{F}_y) + M_z(\mathbf{F}_z) = 0 + F_y \times 0.05 + 0 = 212 \times 0.05 = 10.6 (\text{N} \cdot \text{m})$$

3.3 空间力系的平衡方程

对空间力系平衡条件的建立与平面力系相似,可由空间力系向空间内一点进行简化得到。经过对简化结果分析后可得空间力系平衡的充分与必要条件为:力系中各力在三个坐标轴上投影的代数和及各力对三个坐标轴之矩的代数和分别等于零,即

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_y(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_z(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

此方程称为空间任意力系的平衡方程,由此可解出六个未知量。

由式(3-7)可得出空间任意力系在特殊情况下的平衡方程式。

空间汇交力系的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

空间平行力系的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_y(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

求解空间力系平衡问题的基本方法和步骤与平面力系平衡问题相同,具体如下。

- (1) 确定研究对象,取分离体,画出受力图。
- (2) 确定力系类型,列出平衡方程。
- (3) 解平衡方程,求出未知量。

【例 3-3】 三角吊架由球铰结构连接而成,如图 3-7(a)所示。悬挂物体重 $G=100 \text{ kN}$,吊架的三根杆与吊索的夹角均为 30° ,与地面的夹角均为 60° ,不计杆自重, $\triangle ADC$ 为正三角形。试求三杆受力情况。

【解】 取顶点球铰 B 及重物为研究对象,三杆均为二力杆,画出受力图(为方便分析力的空间关系,将受力图画在原结构图上),如图 3-7(a)所示。球铰 B 处的 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{F}_{NAB}$ 、 $\mathbf{F}_{NCB}$ 和 $\mathbf{F}_{NDB}$ 组成空间汇交力系。

选取坐标系 $Oxyz$,将各力向 Oxy 平面内投影[见图 3-7(b)],列平衡方程,由式(3-8)得



$$\sum F_x = 0, -F_{NAB} \cos 60^\circ \sin 30^\circ - F_{NCB} \cos 60^\circ \sin 30^\circ + F_{NDB} \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{NAB} \cos 60^\circ \cos 30^\circ - F_{NCB} \cos 60^\circ \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0, F_{NAB} \cos 30^\circ + F_{NCB} \cos 30^\circ + F_{NDB} \cos 30^\circ - G = 0$$

解得 $F_{NAB} = F_{NCB} = F_{NDB} = \frac{G}{3 \cos 30^\circ} = 38.5 \text{ kN}$ 。

三杆受到的力均为压力,可称为压杆。

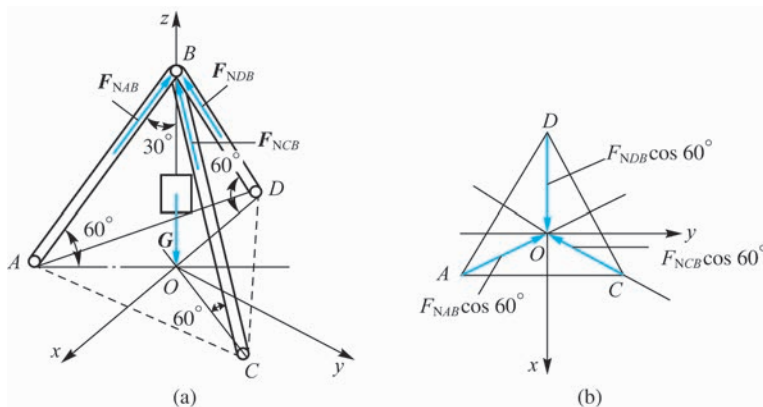


图 3-7 【例 3-3】图

【例 3-4】 若已知三轮推车[见图 3-8(a)]上物体重量 $G = 1.5 \text{ kN}$, $\overline{AH} = \overline{BH} = 0.5 \text{ m}$, $\overline{CH} = 1.5 \text{ m}$, $\overline{EH} = 0.3 \text{ m}$, $\overline{ED} = 0.5 \text{ m}$, 试求 A、B、C 三个轮所受到的压力。

【解】 (1) 以推车整体为研究对象, 取分离体, 画出受力图, 如图 3-8(b) 所示。

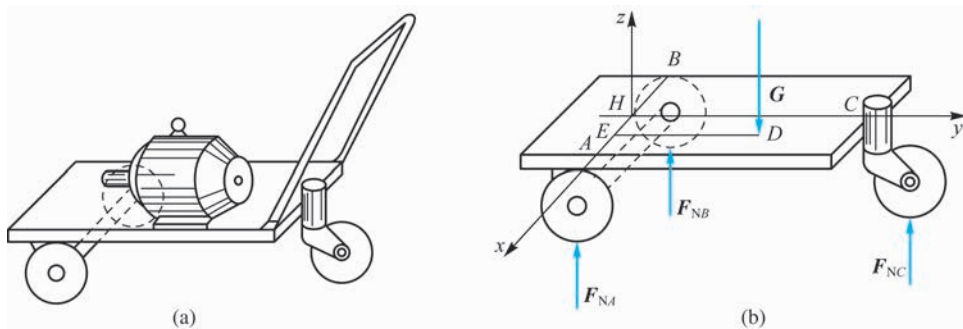


图 3-8 【例 3-4】图

推车在已知荷载 G 及地面对推车三个轮的未知压力 F_{NA} 、 F_{NB} 、 F_{NC} 的作用下保持平衡, 各力的作用线相互平行, 构成空间平行力系。

(2) 根据各力的作用线方向与几何位置, 建立空间直角坐标系 $Hxyz$ (点 H 为坐标原点)。

(3) 列平衡方程并求解。

$$\sum F_z = 0, F_{NA} + F_{NB} + F_{NC} - G = 0$$

$$\sum M_x(\mathbf{F}) = 0, F_{NC} \overline{CH} - G \overline{DE} = 0$$

$$\sum M_y(\mathbf{F})=0, -F_{\text{NA}}\overline{AH}+F_{\text{NB}}\overline{BH}+G\overline{EH}=0$$

解得 $F_{\text{NA}}=0.95\text{ kN}$, $F_{\text{NB}}=0.05\text{ kN}$, $F_{\text{NC}}=0.5\text{ kN}$ 。

若选择点 A 或点 B 为坐标原点, 可使方程简化, 便于计算。

3.4 物体的重心

在工程实际和日常生活中, 物体重心位置的确定具有重要意义。例如, 挡土墙、重力坝等的稳定性问题就与这些结构的重心位置有直接关系。骑自行车时需要不断地调整重心的位置, 才不致翻倒; 体操运动员和杂技演员在表演时, 需要保持重心的平稳, 才能做出高难度动作; 对塔式起重机来说, 重心位置也很重要, 只有选择合适的配重, 才能在满载和空载时不致翻倒; 对于高速旋转的飞轮或轴类工件, 若其重心位置偏离轴线, 则会引起强烈振动, 甚至造成破坏; 在起重机起吊重物时, 吊钩必须与物体重心在一条垂线上, 才能保证运行安全、平稳。总之, 掌握重心的概念及计算方法在工程实践中是很有用处的。

3.4.1 重心的概念

地球表面附近的物体, 它的每一微小部分都会受到重力的作用。重力就是地球对物体的吸引力。若将物体想象成是由无数微小的部分组合而成的, 这些微小的部分就可视为质量微元, 则每个微元都受到重力的作用, 这些重力对物体而言近似地组成了空间平行力系。该力系的合力即物体的重力, 合力的作用点即物体的重心。无论物体怎样放置, 重心总是通过同一个确定点。

将一重力为 $\mathbf{G}$ 的均质物体放在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 设物体的重心 C 点的坐标为 (x_C, y_C, z_C) , 如图 3-9 所示。

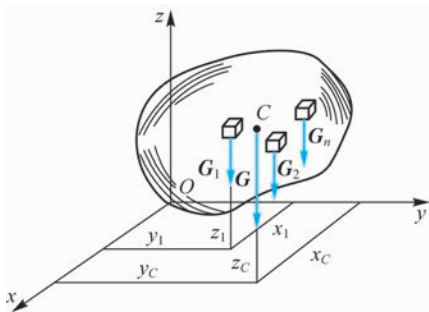


图 3-9 物体的重心

将物体分割成 n 个微元, 每个微元所受重力分别为 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_n$, 它们组成空间平行力系, 各微元重心的坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ 。物体重力 $\mathbf{G}$ 是各微元重力 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_n$ 的合力, 即 $\mathbf{G} = \sum \mathbf{G}_i$ 。根据合力矩定理, 对 y 轴的力矩为

$$M_y(\mathbf{G}) = \sum M_y(\mathbf{G}_i)$$

即

$$Gx_C = \sum G_i x_i$$



则有物体的重心坐标公式为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum G_i x_i}{G} \\ y_C &= \frac{\sum G_i y_i}{G} \\ z_C &= \frac{\sum G_i z_i}{G} \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

若将 $G=mg, G_i=m_i g$ 代入式(3-10), 可得质心(物体的质量中心)坐标公式为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m_i x_i}{m} \\ y_C &= \frac{\sum m_i y_i}{m} \\ z_C &= \frac{\sum m_i z_i}{m} \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

若物体为均质的, 设其密度为 ρ , 总体积为 V , 微元的体积为 V_i , 则 $G=\rho g V, G_i=\rho g V_i$, 代入式(3-10), 得到

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum V_i x_i}{V} \\ y_C &= \frac{\sum V_i y_i}{V} \\ z_C &= \frac{\sum V_i z_i}{V} \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

可见, 均质物体的重心只与物体的形状有关, 而与物体的重力无关。因此, 均质物体的重心也称为形心。均质物体的重心、质心、形心的位置重合。

如果物体是均质等厚平板, 则有

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum A_i x_i}{A} \\ y_C &= \frac{\sum A_i y_i}{A} \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

式(3-13)称为平面图形的形心坐标公式, A, A_i 分别为物体平面图形总面积和各微元的面积。

3.4.2 求重心及形心位置的方法

1. 对称法

凡是具有对称面、对称轴或对称中心的形状简单的均质物体, 其重心均在它的对称面、对称轴或对称中心上。

若物体有两个对称面, 则重心必在两面的交线上; 若物体有两根对称轴, 则重心必在两轴的交点上。例如, 圆球的中心是对称点, 也就是其重心或形心; 矩形截面、圆形截面、工字钢截面、空心砖截面等都有两根对称轴, 其交点即重心, 如图 3-10(a)所示; T 形钢截面、槽形

钢截面都有对称轴, 它们的重心一定在对称轴上, 如图 3-10(b) 所示。

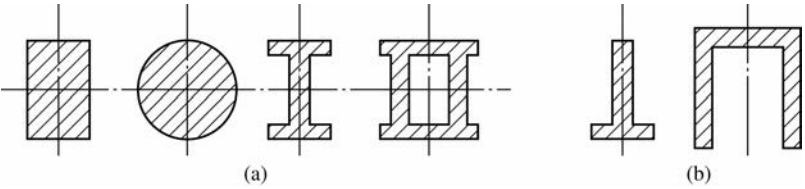


图 3-10 对称法画图

2. 分割法

工程中常见的物体是简单形体的组合, 而各简单形体的重心位置是已知的或容易求得的。此时可将组合体分割成若干个简单物体, 利用式(3-10)或式(3-12)即可求出整个物体的重心坐标。表 3-1 中列出了常用图形重心(形心)的位置, 以方便计算。

表 3-1 常用图形重心(形心)的位置

图 形	重心(形心)	图 形	重心(形心)
长方形 	$x_C = \frac{1}{2}b$ $y_C = \frac{1}{2}h$	长方体 	$x_C = \frac{1}{2}a$ $y_C = \frac{1}{2}b$ $z_C = \frac{1}{2}h$
三角形 	$x_C = \frac{1}{3}(a+b)$ $y_C = \frac{1}{3}h$	半圆球体 	$x_C = 0$ $y_C = 0$ $z_C = \frac{3}{8}r$
半圆 	$x_C = 0$ $y_C = \frac{4r}{3\pi}$	正圆锥体 	$x_C = 0$ $y_C = 0$ $z_C = \frac{1}{4}h$

【例 3-5】 某截面图形如图 3-11(a) 所示, 求该截面重心(截面形心)的位置。

【解】 根据图形的组合情况, 可将该截面分割成两个矩形 I、II, C_1 和 C_2 分别为两个矩形的形心, 如图 3-11(b) 所示。

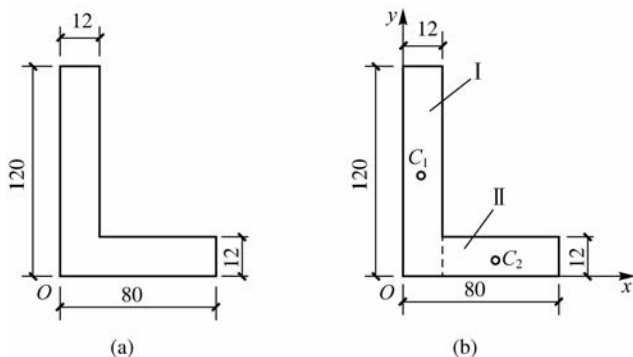


图 3-11 【例 3-5】

取坐标系 Oxy , 则矩形 I、II 的面积和形心坐标分别为

$$A_1 = 120 \times 12 = 1\,440 \text{ mm}^2, x_1 = 6 \text{ mm}, y_1 = 60 \text{ mm}$$

$$A_2 = (80 - 12) \times 12 = 816 \text{ mm}^2, x_2 = 12 + \frac{80 - 12}{2} = 46 \text{ mm}, y_2 = 6 \text{ mm}$$

由式(3-13)可求得

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{1\,440 \times 6 + 816 \times 46}{1\,440 + 816} = 20.5 (\text{mm})$$

$$y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{1\,440 \times 60 + 816 \times 6}{1\,440 + 816} = 40.5 (\text{mm})$$

即所求截面形心 C 点的坐标为 $(20.5, 40.5)$ 。

3. 负面积法

【例 3-6】 试求如图 3-12 所示图形的形心。已知 $R = 100 \text{ mm}$, $r_2 = 30 \text{ mm}$, $r_3 = 17 \text{ mm}$ 。

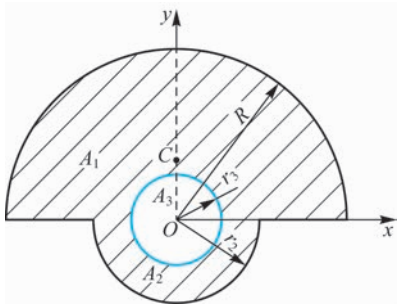


图 3-12 【例 3-6】图

【解】 由于图形有对称轴, 形心必在对称轴上, 建立坐标系 Oxy (见图 3-12), 只需求出 y_C 即可。将图形看成由三部分组成, 各自的面积及形心坐标分别如下。

(1) 半径为 R 的半圆面的面积及形心坐标为

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \times 100^2}{2} = 15\,700 (\text{mm}^2)$$

$$y_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \times 100}{3\pi} = 42.5 (\text{mm})$$

(2) 半径为 r_2 的半圆面的面积及形心坐标为

$$A_2 = \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi \times 30^2}{2} = 1\,413(\text{mm}^2)$$

$$y_2 = -\frac{4r_2}{3\pi} = -\frac{4 \times 30}{3\pi} = -12.7(\text{mm})$$

(3) 被挖掉的半径为 r_3 的圆面的面积及形心坐标为

$$A_3 = -\pi r_3^2 = -\pi \times 17^2 = -907(\text{mm}^2)$$

$$y_3 = 0$$

应用式(3-13)可得

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} \\ &= \frac{15\,700 \times 42.5 + 1\,413 \times (-12.7) - 907 \times 0}{15\,700 + 1\,413 - 907} = 40(\text{mm}) \end{aligned}$$

4. 实验法求重心

对于形状复杂, 不便利用公式计算的物体, 常用实验法确定其重心位置。常用的实验法有悬挂法和称重法。

1) 悬挂法

对于平板形物体或具有对称面的薄零件, 可将其悬挂于点 A [见图 3-13(a)], 根据二力平衡条件, 重心必在过悬挂点 A 的铅垂线上, 固定此线位置。再选一悬挂点 D , 重复以上过程, 得到两条铅垂线的交点 C , C 即物体重心, 如图 3-13(b) 所示。为精确起见, 可再选一两个悬挂点进行实验。



动画

悬挂法确定重心

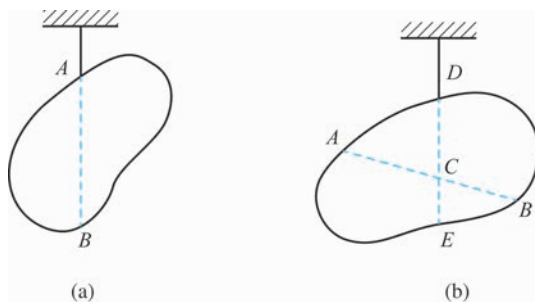


图 3-13 悬挂法

2) 称重法

对于体积庞大或形状复杂的零件及由许多构件组成的机械, 常用称重法测定其重心的位置。例如, 用称重法测定连杆的重心位置。如图 3-14 所示, 连杆本身具有两个互相垂直的纵向对称面, 其重心必在这两个对称面的交线 AB 上。将连杆的一端支在固定点 A 处, 另一端支承于磅秤 B 上, 并使中心线 AB 处于水平。设连杆的重力为 G , 重心 C 点与左端点 A 相距 x_C , 量出两支点间的距离 l , 由磅秤读出 B 端的约束力 F_B , 则由

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, F_B l - G x_C = 0$$

解得

$$x_C = \frac{F_B}{G} l$$

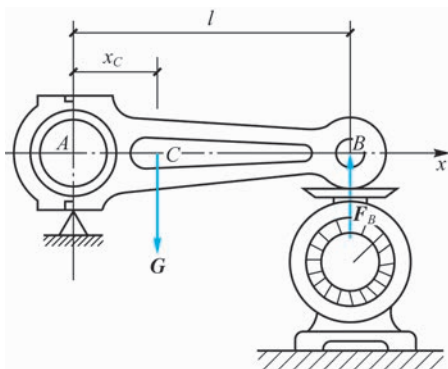


图 3-14 称重法



思考与练习

- 3-1 在什么情况下,力对轴之矩为零?
- 3-2 物体的重心是否一定在物体上?
- 3-3 用悬挂法求物体重心的依据是什么?
- 3-4 计算力在直角坐标系三轴上的投影有两种方法,即一次投影法和二次投影法,解决问题究竟用哪一种?
- 3-5 物体的形心和重心有什么区别?又有什么联系?
- 3-6 如图 3-15 所示的力系中, $F_1=20\text{ kN}$, $F_2=40\text{ kN}$, 求各力在 x 、 y 、 z 轴上的投影。

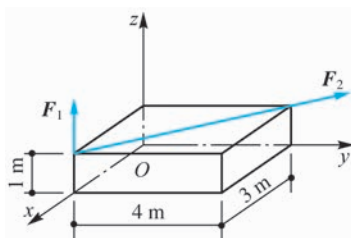


图 3-15 题 3-6 图

- 3-7 如图 3-16 所示,一立柱在 A 点受力 F 的作用。已知 $F=20\text{ kN}$, 求该力对 x 、 y 、 z 轴之矩。

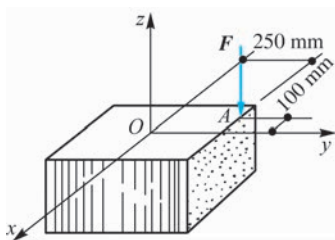


图 3-16 题 3-7 图

- 3-8 如图 3-17 所示,已知 $\angle CBA = \angle BCA = 60^\circ$, $\angle EAD = 30^\circ$, 物体重 $G=6\text{ kN}$, 平面

ABC 是水平的, A, B, C 三点都是铰接的, 求水平撑杆 AB, AC 所受的力及绳子 AD 的拉力。

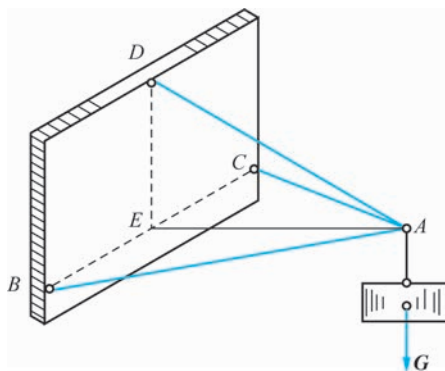


图 3-17 题 3-8 图

3-9 求如图 3-18 所示各平面图形的形心位置。

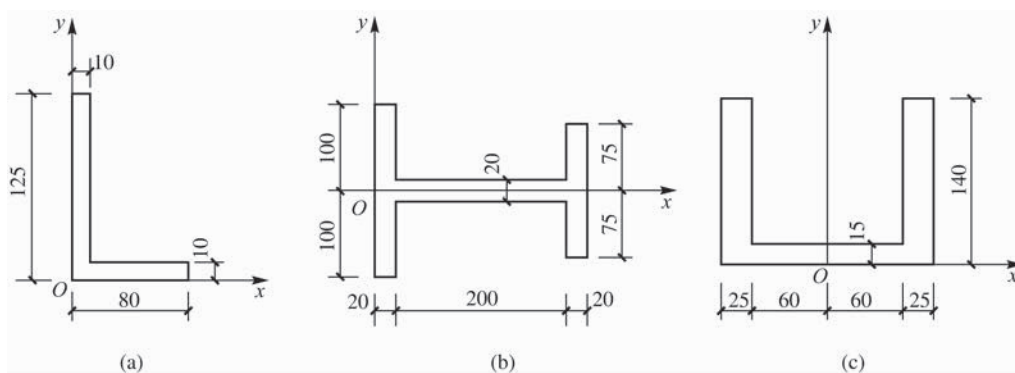


图 3-18 题 3-9 图