高等职业教育精品教材

- 高等数学简明教程
- 高等数学简明教程学习指导与练习
- 经济数学
- 经济数学学习指导与练习
- ● 高等应用数学
- 高等应用数学学习指导与练习
- 高等数学
- 高等数学学习指导与练习
- 工程数学

策划编辑：时虎平
责任编辑：边丽新

ISBN 978-7-5635-2865-3

定价：45.00元

高等职业教育精品教材
高等应用数学
北京邮电大学出版社
X-A

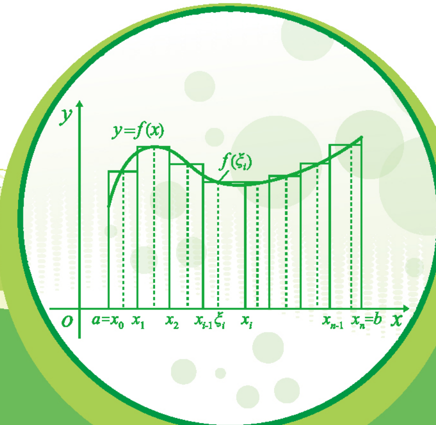
高等职业教育精品教材

“互联网＋”创新型教材

高等应用数学

GAODENG YINGYONG SHUXUE

汪子莲◎主 编



- 将“互联网+”思维融入教材
- 纸质教材与数字资源有机整合
- 通过扫描书中二维码呈现
- 移动微课程，随时随地学

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等职业教育精品教材

"互联网+"创新型教材

高等应用数学

主　编　汪子莲

副主编　李彦刚　王晓燕

北京邮电大学出版社

www. buptpress. com

内容简介

本书共八章，具体内容包括：函数的极限与连续性，函数的微分及其应用，函数的积分及其应用，常微分方程，无穷级数，行列式，矩阵，线性方程组，随机事件及其概率，随机变量的分布及数字特征，数理统计初步，数学建模初步及 Mathematica 软件等，其中带“*”的内容可根据具体教学情况节选学习。

本书可作为普通高等院校各专业（非数学类）的数学教材，也可作为相关人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/汪子莲主编．--北京：北京邮电大学出版社，2012.1(2025.7 重印)
ISBN 978-7-5635-2865-3

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①汪…　Ⅲ.①应用数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 272043 号

策划编辑：时虎平　　**责任编辑**：边丽新

出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：三河市骏杰印刷有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：20
字　　数：381 千字
版　　次：2012 年 1 月第 1 版
印　　次：2025 年 7 月第 9 次印刷

ISBN 978-7-5635-2865-3　　　　定　价：45.00 元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·
服务电话：400-615-1233

出版说明

高职高专教育作为我国高等教育的重要组成部分,承担着培养高素质技术、技能型人才的重任。近年来,在国家和社会的支持下,我国的高职高专教育取得了不小的成就,但随着我国经济的腾飞,高技能人才的缺乏越来越成为影响我国经济进一步快速健康发展的瓶颈。这一现状对于我国高职高专教育的改革和发展而言,既是挑战,更是机遇。

要加快高职高专教育改革和发展的步伐,就必须对课程体系和教学模式等问题进行探索。在这个过程中,教材的建设与改革无疑起着至关重要的基础性作用,高质量的教材是培养高素质人才的保证。高职高专教材作为体现高职高专教育特色的知识载体和教学的基本工具,直接关系到高职高专教育能否为社会培养并输送符合要求的高技能人才。

为促进高职高专教育的发展,加强教材建设,教育部在《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》中,提出了“重点建设好 3 000 种左右国家规划教材”的建议和要求,并对高职高专教材的修订提出了一定的标准。为了顺应当前我国高职高专教育的发展潮流,推动高职高专教材的建设,我们精心组织了一批具有丰富教学和科研经验的人员成立了编审委员会。

编审委员会依据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》,调研了百余所具有代表性的高等职业技术学院和高等专科学校,广泛而深入地了解了高职高专的专业和课程设置,系统地研究了课程的体系结构,同时充分汲取各院校在探索培养应用型人才方面取得的成功经验,并在教材出版的各个环节设置专业的审定人员进行严格审查,从而确保了整套教材“突出行业需求,突出职业的核心能力”的特色。

本套教材的编写遵循以下原则:

(1) 成立教材编审委员会,由编审委员会进行教材的规划与评审。

(2) 按照人才培养方案以及教学大纲的需要,严格遵循高职高专院校各学科的专业规范,同时最大程度地体现高职高专教育的特点及时代发展的要求。因此,本套教材非常注重培养学生的实践技能,力避传统教材“全而深”的教学模式,将“教、学、做”有机地融为一体,在教给学生知识的同时,强化了对学生实际

操作能力的培养。

(3) 教材的定位更加强调"以就业为导向",因此也更为科学。教育部对我国的高职高专教育提出了"以应用为目的,以必需、够用为度"的原则。根据这一原则,本套教材在编写过程中,力求从实际应用的需要出发,尽量减少枯燥、实用性不强的理论灌输,充分体现出"以行业为向导,以能力为本,以学生为中心"的风格,从而使本套教材更具实用性和前瞻性,与就业市场结合也更为紧密。

(4) 采用"以案例导入教学"的编写模式。本套教材力图突破陈旧的教育理念,在讲解的过程中,援引大量鲜明实用的案例进行分析,紧密结合实际,以达到编写实训教材的目标。这些精心设计的案例不但可以方便教师授课,同时又可以启发学生思考,加快对学生实践能力的培养,改革人才的培养模式。

本套教材涵盖了公共基础课系列、财经管理系列、物流管理系列、电子商务系列、计算机系列、电子信息系列、机械系列、汽车系列和化学化工系列的主要课程。

对于教材出版及使用过程中遇到的各种问题,欢迎您通过电子邮件及时与我们取得联系。同时,我们希望有更多经验丰富的教师加入到我们的行列当中,编写出更多符合高职高专教学需要的高质量教材,为我国的高职高专教育做出积极的贡献。

编审委员会

前　　言

高等数学的思想和方法越来越多地应用于各个学科和领域。作为高职高专院校各类专业的基础课程和工具课程，如何快速掌握其基本内涵和蕴含的思想、方法是相关教育部门和各个教学单位应认真思考、仔细研究、积极应对的课题。本书应我国培养高等职业技能人才的需要，在总结高职高专院校各专业高等数学课程教学改革的经验，分析、研究借鉴国内外同类优秀教材编写特色的基础上，依据教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，由长期从事高职高专院校数学教学的一线教师执笔编写而成。

为满足高职高专学生系统学习的需要，本教材在内容编排上涵盖了高等数学、线性代数、数学建模初步、Mathematica 数学软件及概率论与数理统计的相关内容，强化了教材的实用性、科学性、针对性，实现了知识结构的整体优化。与同类教材相比较，本书在编写中重点突出了以下特色。

1. 遵循“教学内容科学性，教学过程序进性”的教学原则，对教材内容及有关知识的顺序作了适当调整。在高等数学部分中，将一元函数的极限、连续、导数、微分及积分与多元函数的相关内容相揉合，从思想和方法上体现了知识间的内在关联与区别，适于学生整体把握知识；同时，对概率论部分中多元随机变量的相关知识作了删减；为了培养学生的数学应用意识及应用数学知识解决实际问题的能力，编入了高等数学在经济学中的应用与数学建模初步等内容。

2. 落实“以必需、够用为度”的教学原则，对定理的证明及理论性过强的内容作了适当的淡化处理，通过几何图形、物理意义及实例加以直观说明，降低知识的难度，有利于学生对理论知识的掌握。

3. 注重基础知识、基本方法和基本技能的训练，每节配有适量的习题，安排上由易到难、由浅入深，以便巩固和灵活掌握相应知识点，同时培养学生的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力；章末配有复习题，方便学生复习巩固本章知识的学习效果，并在本书后附有参考答案。

4. 为培养学生应用计算机及相关数学软件求解数学问题的能力，结合具

体教学内容，每章（除第六章）安排了利用数学软件 Mathematica 解决相应问题的软件实验，方便检验习题结果的正确性，通过图形绘制，直观地了解某些函数及其性质，结合软件也可对某些问题作进一步更深入的讨论和研究。

本教材由汪子莲副教授任主编，李彦刚、王晓燕任副主编。其中一、二、四章由汪子莲编写；三、六、八章由李彦刚编写；五、七章由王晓燕编写。习题答案及插图绘制由丁珂完成。全书框架结构、统稿、定稿、教学大纲及配套的多媒体课件由汪子莲完成。祁忠斌教授担任主审。

限于编者水平有限及时间仓促，书中难免存在纰漏、错误和不足之处，请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　函数的极限与连续性

函数是现代数学每一分支的主要研究对象. 微积分的一些基本概念、性质及运算都要用极限理论来表述,因而极限概念是高等数学中最重要、最基本的概念之一. 本章首先复习已学习过的一元函数及其性质,进而给出基本初等函数、复合函数、初等函数及多元函数的定义,然后主要研究极限的概念、性质及函数的连续性.

第一节　函　　数

一、函数及其性质

(一) 函数的概念

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是给定的非空数集,如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时,变量 y 按照一定的法则 f 都有确定的数值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**,记做

$$y = f(x), x \in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**,变量 y 称为**因变量**(或**函数**),数集 D 称为函数的**定义域**,f 称为函数的**对应法则**.

如果自变量 x 在定义域 D 内任取一个确定的数值时,只有唯一的函数值与之对应,则称该函数为**单值函数**;否则,如果有多个函数值与之对应,则称该函数为**多值函数**. 如 $y = x^2 + 1$ 是单值函数;而 $x^2 + y^2 = 4$ 是多值函数. 如果没有特别说明,本书所讨论的函数都是单值函数.

当 x 取确定数值 $x_0 \in D$ 时,通过法则 f,函数有唯一确定的值 y_0 与之相对应,称 y_0 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**,记做

$$y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0).$$

由全体函数值构成的集合称为函数的**值域**,记做 M,即 $M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

由函数的定义知,函数是由定义域和对应法则确定的,因此把函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素. 若两个函数具有相同的定义域和对应法则,则称它们是相等的. 函数的表示方法常用的有三种:**表格法**、**图像法**、**公式法**(或**解析法**).

例 1 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f(2)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f[f(x)]$.

解 分别用 2，$\frac{1}{x}$，$f(x)$ 代替 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 中的 x，得

$$f(2)=\frac{1}{1-2}=-1,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}(x\neq 1,x\neq 0),$$

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}(x\neq 0,x\neq 1).$$

例 2 下列各组函数是否相等，为什么？

(1) $y=|x|$ 与 $u=\sqrt{v^2}$；

(2) $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$；

(3) $y=x+1$ 与 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$；

(4) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(5) $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2x}$；

(6) $y=\ln 5x$ 与 $y=\ln 5\cdot\ln x$.

解 因为(1)与(2)中两函数的两要素分别相同，所以是相同的函数；(3)与(4)中两函数的定义域不同，所以是不同的函数；(5)与(6)中两函数的对应法则不同，所以是不同的函数.

(二) 函数的定义域

函数的定义域通常分为以下两种情况：

(1) 对于实际问题，根据问题的实际意义确定.

例如，自由落体运动过程中位移随时间变化的函数关系为 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$，定义域为 $[0,T]$，其中 T 为落地时间；圆面积 S 是圆半径 x 的函数 $S=\pi x^2$，定义域为 $(0,+\infty)$.

(2) 由解析式表示的函数，其定义域就是使表达式有意义的一切实数组成的集合.

例 3 求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$ 的定义域.

解 由所给函数可知，要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases}3-x^2>0,\\ \left|\frac{x}{2}-1\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3},\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$$

即 $0\leqslant x<\sqrt{3}$. 因此，所给函数的定义域为 $[0,\sqrt{3})$.

(三) 函数的几种特性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义(区间 I 为函数 $f(x)$ 的整个定义域或其定义域的一部分),则函数一般具有下列几种特性.

1. 有界性

如果存在正数 M,使对任意的 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**,否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

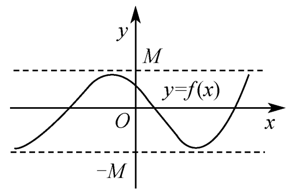


图 1-1

从图形上看,有界函数的图像介于两条直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间(见图 1-1). 例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$,而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,但在区间 $(1,2)$ 内有界.

注意　讨论函数有界或无界,必须先指明自变量 x 所在的区间.

2. 单调性

若对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(或**单调减少**). 区间 I 称为**单调增区间**(或**单调减区间**);单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**;单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

一般地,单调增加函数的图像为沿 x 轴正向单调上升的曲线,如图 1-2 所示;单调减少函数的图像为沿 x 轴正向单调下降的曲线,如图 1-3 所示.

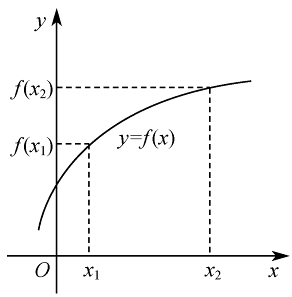


图 1-2

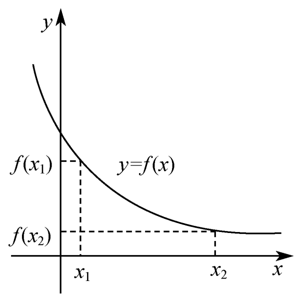


图 1-3

例如,$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加函数;$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 内单调减少,在 $[0,+\infty)$ 内单调增加,在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调函数.

注意　讨论函数的单调性,必须先指明自变量 x 所在的区间.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义区间 I 关于原点对称，若对任意的 $x \in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**偶函数**；若对任意的 $x \in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**奇函数**；若函数既不是奇函数也不是偶函数，则称为**非奇非偶函数**.

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称（见图 1-4）；奇函数的图像关于原点对称（见图 1-5）.

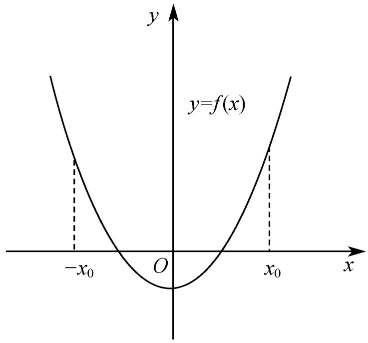


图 1-4

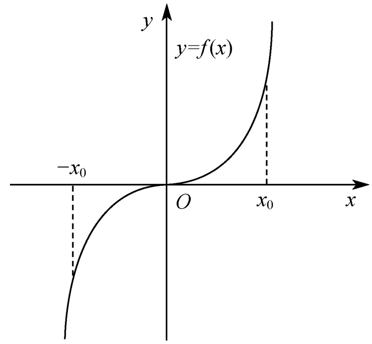


图 1-5

例如，$y=x^3+\sin x$ 为奇函数；$y=\cos x$ 为偶函数；而 $y=x^2+x$ 为非奇非偶函数.

4. 周期性

如果存在不为零的实数 T，使得对于任意的 $x \in I$，$x+T \in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是**周期函数**，T 是 $y=f(x)$ 的一个**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

(四) 分段函数

在定义域的不同范围具有不同的表达式的函数称为**分段函数**，其定义域为各部分定义域的并集. 分段函数是整个定义域上的一个函数，不能理解为多个函数. 一般来说，分段函数需要分段求值，分段作图，分段表示.

例 4 王先生到郊外去观景，以 2 km/h 的速度匀速步行 1 h 后，他发现一骑车人的自行车坏了，便花了 1 h 帮人把车修好，随后加快速度，以 3 km/h 的速度匀速步行 1 h 后到达终点，然后立即以匀速折返，耗时 2 h 返回到出发点. 请把王先生离家的距离关于时间的函数用图像法描绘出来.

解 王先生离家的距离 y 是时间 x 的函数，图形如图 1-6 所示. 用解析法表示为

$$y=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, & 1<x\leqslant 2,\\ 3x-4, & 2<x\leqslant 3,\\ -\dfrac{5}{2}x+\dfrac{25}{2}, & 3<x\leqslant 5.\end{cases}$$

该函数为分段函数，其函数定义域为$[0,5]$.

(五) 反函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每个数 y，在 D 中都有唯一确定的数 x 与之对应，且使 $y=f(x)$ 成立，则确定了一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记做 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数中 x 与 y 互换位置，即记做$y=f^{-1}(x)$，$x\in M$，并称函数 $y=f^{-1}(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(见图 1-7).

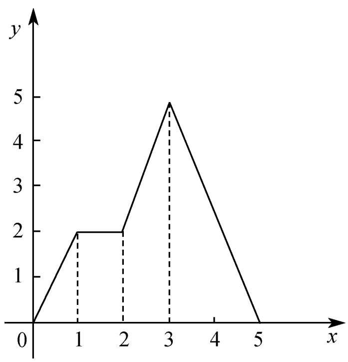


图 1-6

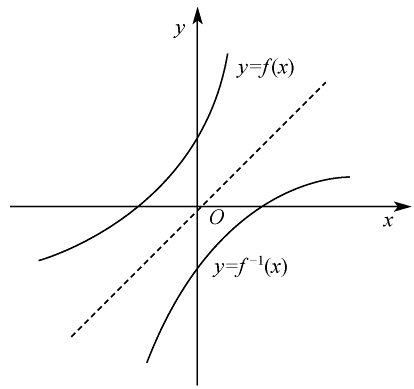


图 1-7

注意　只有单调函数才有反函数，且其反函数也单调.

二、初等函数

1. 基本初等函数

常值函数　　$y=C$(C 为常数)；

幂函数　　$y=x^{\mu}$(μ 为实数)；

指数函数　　$y=a^{x}$($a>0$，且 $a\neq 1$，a 为常数)；

对数函数　　$y=\log_a x$($a>0$，且 $a\neq 1$，a 为常数)；

三角函数　　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

以上六类函数统称为**基本初等函数**. 它们的性质、图像在中学已经学过,这里不再赘述.

2. 复合函数

定义 1.3 设 $y=f(u)$,其中 $u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,其中 u 叫做中间变量.

关于复合函数有如下几点说明:

(1) 复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形.

(2) 将一个较复杂的函数分解为若干个简单函数时,一定要分清层次,由外到内,逐层分解.

(3) 并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如,$y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+5$ 就不能构成复合函数. 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,$u=x^2+5\geqslant 5$,此时 $y=\arcsin u$ 无定义.

例 5 指出下列函数由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$; (2) $y=3^{\tan^2 x}$.

解 (1) $y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$ 可以看做由 $y=u^{\frac{2}{3}}, u=1+2x$ 复合而成.

(2) $y=3^{\tan^2 x}$ 可以看做由 $y=3^u, u=v^2, v=\tan x$ 复合而成.

注意 能否正确分析复合函数的构成直接决定了是否能熟练掌握微积分的方法和技巧.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的,并且可以用一个解析式表示的函数,称为**初等函数**. 例如 $f(x)=x\sin x, f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $f(x)=e^{5x+1}\sin x$ 等都是初等函数;但分段函数一般不是初等函数,如函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 不能用一个解析式表示,故不是初等函数.

三、多元函数的定义

前面讨论的都是只有一个自变量的函数,称为一元函数. 而在自然科学和工程技术中所涉及的函数,往往依赖于两个或更多个自变量,这就是多元函数. 由于多元函数是一元函数的推广和发展,它们有着许多类似之处,但有些地方存在较大差异. 从一元推广到二元时会产生许多新问题,但二元以上的函数有着相似的性质. 因此本书重点讨论二元函数及其有关的知识.

定义 1.4 设有三个变量 x, y 和 z,如果当变量 x, y 在它们的变化范围 D 中任

意取定一对值时，按照一定的对应规则 f，变量 z 都有唯一确定的值与它们对应，则称变量 z 为变量 x，y 的**二元函数**，记做 $z=f(x,y)$，其中 x 和 y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 自变量 x 与 y 的变化范围 D 称为该函数的**定义域**，数集 $\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为该函数的**值域**.

一元函数的定义域一般来说是一个或几个区间，而二元函数的定义域通常是由平面上一条或几条光滑曲线所围成的平面区域. 围成区域的曲线称为区域的**边界**，边界上的点称为**边界点**，包括边界在内的区域称为**闭区域**，不包括边界在内的区域称为**开区域**.

如果一个区域 D 内任意两点之间的距离都不超过某一常数 M，则称区域 D 为**有界区域**，否则称区域 D 为**无界区域**.

圆域 $\{(x,y) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2,\delta>0\}$ 称为平面上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ **邻域**，记做 $U(P_0,\delta)$. 而称不包含点 P_0 的邻域为**去心邻域**，记做 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

二元函数定义域的求法与一元函数类似，就是找出使函数表达式有意义的自变量的范围，不过画出定义域的图形要复杂一些.

例 6　求二元函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(a>0)$ 的定义域.

解　该函数的定义域为满足 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 的 x，y，即定义域为

$$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant a^2\}.$$

D 表示 xOy 面上以原点为圆心，a 为半径的圆域，它为有界闭区域(见图 1-8).

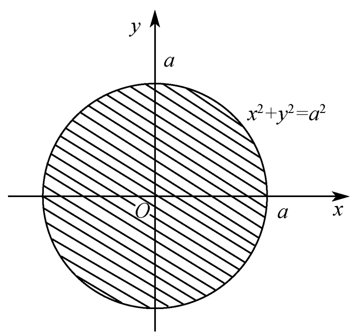


图 1-8

二元函数的概念及平面区域的概念可以类似地推广到三元函数及空间区域上去. 有三个自变量的函数称为三元函数. 如 $u=f(x,y,z)$，三元函数的定义域通常是一个空间区域. 一般地，还可定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，它的定义域是 n 维空间的区域. 自变量多元的函数称为**多元函数**.

习题 1-1

1. 下列各组函数是否是相同的函数？

(1) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 与 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$；

(3) $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 与 $y=x^2+x+1$；

(4) $y=\dfrac{\pi}{2}$ 与 $y=\arcsin x+\arccos x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$；　　(2) $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\lg(4-x)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2.\end{cases}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 求 $f(-\dfrac{\pi}{4})$，$f(\dfrac{\pi}{2})$.

4. 试作出函数 $f(x)=\begin{cases}3x, & |x|>1,\\ x^2, & |x|<1,\\ 3, & |x|=1\end{cases}$ 的图像.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$；　　(2) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=x^2-x^3$；　　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

6. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-3$；　　(2) $y=\ln(x-1)+1$；　　(3) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

7. 下列函数中，哪些是周期函数？对于周期函数，求出它的最小正周期.

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=x\cos x$；　　(3) $y=\sin x+\cos\dfrac{x}{2}$.

8. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$；　　(2) $y=\ln(1+\sqrt{x^2+1})$；

(3) $y=\cos^2(\sqrt{x}+1)$；　　(4) $y=\arctan(\ln x)$.

9. 求下列函数的定义域，并画出定义域的图形.

(1) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}\ln(x^2+y^2-1)$；

(2) $f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

(4) $f(x,y)=\ln(y-x)+\arcsin\dfrac{y}{x}$.

第二节　极　　限

图文

极限发展史

极限是深入研究函数变化性态最基本的一个概念，极限方法是数学中最重要的一种思想方法. 它是由求某些实际问题的精确解而产生的，是微积分学的基础. 为了了解极限是怎样的理论，又是怎样从实践中产生的，先看一个具体的实例.

为了求出圆的面积和圆周率，我国著名的数学家刘徽创造了割圆术，成功地推算出了圆周率和圆的面积. 其基本思想为：

对于一个单位圆，先作圆内接正六边形，其面积记为 A_1；再作圆内接正十二边

形,其面积记为 A_2;循此下去,每次边数加倍,把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形面积记为 $A_n(n=1,2,\cdots)$. 这样,就得到一系列单位圆的内接正多边形的面积 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$. 显然,$n$ 越大对应的圆内接正多边形的面积就越接近于圆的面积,但无论 n 多大,A_n 始终只是圆面积的近似值. 因此设想,如果 n 无限增大时(记做 $n\to\infty$,读做 n 趋于无穷大),A_n 无限接近某个确定的数 A,则该确定的数 A 称为数列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限,该极限就是圆面积的精确值.

一、数列的极限

1. 数列极限的概念

定义 1.5　对于数列 $\{u_n\}$,若当 n 无限增大时,通项 u_n 无限接近于某个确定的常数 a,则常数 a 称为数列 $\{u_n\}$ 的**极限**,此时也称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 a,记做 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 或 $u_n\to a(n\to\infty)$. 若数列 $\{u_n\}$ 的极限不存在,则称数列 $\{u_n\}$ **发散**.

例 1　观察下列数列的极限.

(1) $\{u_n\}=\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}:2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{4},\dfrac{6}{5},\cdots,\dfrac{n+1}{n},\cdots$;

(2) $\{u_n\}=\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}:\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{27},\dfrac{1}{81},\cdots,\dfrac{1}{3^n},\cdots$;

(3) $\{u_n\}=\{2n+1\}:3,5,7,\cdots,2n+1,\cdots$;

(4) $\{u_n\}=\{(-1)^n\}:-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$.

解　当 $n\to\infty$ 时,数列(1)的通项 $u_n=\dfrac{n+1}{n}$ 越来越接近于常数 1;而数列(2)的通项 $u_n=\dfrac{1}{3^n}$ 越来越接近于常数 0;数列(3)的通项 $u_n=2n+1$ 趋于无穷大;数列(4)的通项 $u_n=\{(-1)^n\}$ 在 -1 与 1 之间交替出现而不趋于任何确定的常数,所以得

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)=\infty$(极限不存在);　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

2. 数列收敛的判断准则

为了进一步考察数列是否有极限,先介绍两个概念:数列的单调性和有界性.

定义 1.6　对于数列 $\{u_n\}$,若对任何正整数 n,都有 $u_n\leqslant u_{n+1}$(或 $u_n\geqslant u_{n+1}$)成立,则称数列 $\{u_n\}$ 为**单调递增数列**(或**单调递减数列**),单调递增数列和单调递减数列统称为**单调数列**.

例如,数列 $\{3^n\}$ 为单调递增数列;数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 为单调递减数列.

定义 1.7　对于数列 $\{u_n\}$,如果存在正数 M,使得对于任何正整数 n,都有

$|u_n| \leqslant M$ 成立，则称数列$\{u_n\}$为**有界数列**；否则称该数列为**无界数列**.

例如，数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$为有界数列，因为对任何正整数 n，都有$|u_n| \leqslant \frac{1}{2}$；数列$\{3^n\}$为无界数列.

定理 1.1(数列收敛判断定理)　单调有界数列必有极限.

二、函数的极限

若在自变量的某个变化过程中，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在该变化过程中的极限. 下面就自变量的不同变化趋势，分别介绍函数的极限.

1. $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.8　设函数 $y = f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$内有定义，若当$|x|$无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，则 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的**极限**，记做

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to \infty).$$

其中，“$x \to \infty$”表示 x 既可取正值且无限增大，也可取负值且绝对值无限增大. 但有时 x 只能或只需取这两种变化中的一种情形，同理可得 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义.

定义 1.9　设函数 $y = f(x)$ 在$[a, +\infty)$(a 为某个实数)内有定义. 如果当自变量 x 取正值且无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$(读做“x 趋于正无穷大”)时的极限，记做

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to +\infty).$$

定义 1.10　设函数 $y = f(x)$ 在$(-\infty, a]$(a 为某个实数)内有定义. 如果当自变量 x 取负值且无限减小(或 $-x$ 无限增大)时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$(读做“x 趋于负无穷大”)时的极限，记做

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to -\infty).$$

上述定义从直观上描述了函数当自变量 $x \to \infty$，$x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 时的变化趋势，通常借助函数的图像去理解是比较容易的. 因此，在求函数的极限时，做出函数的图像是必要的.

不难证明，函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限与在 $x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 时的极限有如下关系.

定理 1.2　极限$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

例 2　讨论下列极限是否存在.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) 由图 1-9 知,

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

由定理 1.2 知,$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

(2) 由图 1-10 知,$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$,$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$.

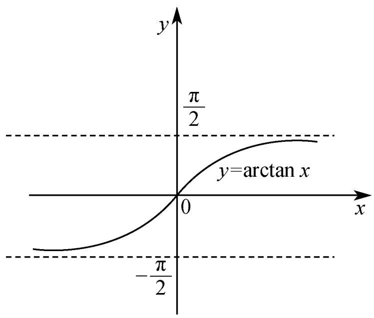


图 1-9

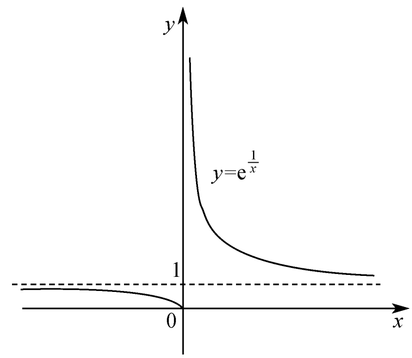


图 1-10

2. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

首先介绍邻域的概念.

设 $x_0,\delta\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$,实数集合$\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,记做$U(x_0,\delta)$. 由于不等式$|x-x_0|<\delta\Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta\Leftrightarrow x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$,所以邻域 $U(x_0,\delta)$ 实质上表示以点 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间(见图 1-11),即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

其中 x_0 称为**邻域中心**,δ 称为**邻域半径**. 有时还要用到去掉中心的邻域,叫做**去心邻域**. 点 x_0 的去心 δ 邻域记做$\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

微课
$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

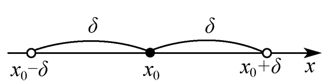


图 1-11

定义 1.11　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义. 若当自变量 x 在该邻域内无限接近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(读做"x 趋近于 x_0")时的**极限**,记做

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0).$$

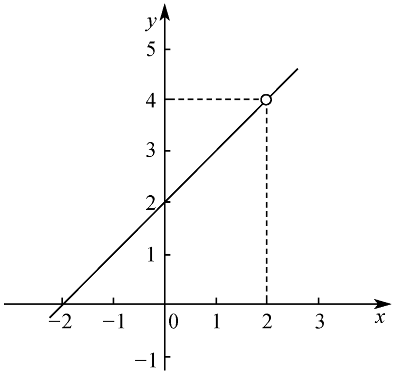


图 1-12

例 3　设函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. 当 $x \neq 2$ 时，$f(x) = x + 2$. 当自变量 $x \neq 2$ 且无限接近于 2 时，对应的函数值无限接近于常数 4(见图 1-12).

注意　(1) 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是否存在与函数在 $x = x_0$ 处是否有定义无关.

(2) 在函数极限的定义中，$x \to x_0$ 的方式是任意的，即同时从 x_0 的左右两侧无限接近 x_0.

但有时只需或只能考虑自变量 x 从 x_0 的某一侧无限接近于 x_0 的情况，就有下列单侧极限的定义.

定义 1.12　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某左半邻域$(x_0 - \delta, x_0)$内有定义，当 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时(记做 $x \to x_0^-$)，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左极限**，记做

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A, f(x) \to A(x \to x_0^-) \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A.$$

类似地可以给出函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限定义，右极限记做

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A, f(x) \to A(x \to x_0^+) \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A.$$

函数的右极限和左极限统称为**单侧极限**. 而相应地将 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 称为**双侧极限**，简称**极限**.

由上述定义可知，单侧极限与双侧极限之间存在如下关系.

定理 1.3　极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

例 4　设 $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$ 讨论 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 是否存在.

解　由图 1-13 知，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

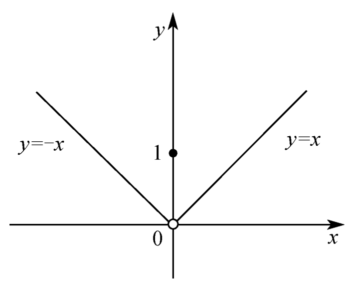


图 1-13

三、极限的性质

数列极限是函数极限的特殊情形，都可归结为在自变量的某一变化过程中，函数值无限接近于某一确定的常数，因而它们具有共同的性质. 下面以 $x \to x_0$ 的情形

为例来叙述.

性质1(唯一性)　若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,则极限值唯一.

性质2(有界性)　若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,则在$x_0$的某一去心邻域内函数$f(x)$有界.

性质3(保号性)　若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,且$A > 0$(或$A < 0$),则必存在$x_0$的某一去心邻域,使得在该邻域内,函数$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$).

推论　若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$且在$x_0$的某一去心邻域内,函数$f(x) \geqslant 0$(或$f(x) \leqslant 0$),则$A \geqslant 0$(或$A \leqslant 0$).

四、无穷小

1. 无穷小的定义

定义1.13　若在自变量x的某一变化趋势下,函数$f(x)$的极限为零,则称函数$f(x)$为自变量x在该变化趋势下的**无穷小量**,简称**无穷小**.

例如,函数$f(x) = 2x - 4$是$x \to 2$时的无穷小;函数$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$是$x \to \infty$时的无穷小.

注意　(1) 无穷小是一个以零为极限的变量. 它表达的是量的变化状态,而不是量的大小,一个量无论多么小都不是无穷小,0是唯一可看成无穷小的常数.

随堂测试

(2) 无穷小与自变量的变化趋势有关. 称一个函数是无穷小,必须明确指出自变量的变化趋势,因为对于同一个函数,在自变量的不同变化趋势下,其极限值不同. 例如,当$x \to 0$时,函数$\sin x$是无穷小;但当$x \to 1$时,函数$\sin x$不是无穷小.

2. 函数、极限与无穷小的关系

设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,即$x \to x_0$时,$f(x) - A \to 0$. 若记$\alpha = f(x) - A$,则当$x \to x_0$时,$\alpha$为无穷小,且$f(x) = A + \alpha$,于是得到有极限的函数与无穷小的关系.

定理1.4　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$的充分必要条件是$f(x) = A + \alpha$(其中$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$).

定理1.4中自变量x的变化过程换成其他任何一种情形($x \to x_0^-$,$x \to x_0^+$,$x \to \infty$,$x \to -\infty$,$x \to +\infty$)后结论仍然成立.

3. 无穷小的运算性质

性质1　有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

性质2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1　常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

例 5 求$\lim\limits_{x\to 0} x^3 \cdot \sin\dfrac{1}{x}$.

解 因为$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$,又$\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$,所以$\lim\limits_{x\to 0} x^3 \cdot \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

例 6 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解 由于
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

此例说明无穷多个无穷小之和不一定是无穷小.

五、无穷大

1. 无穷大的定义

定义 1.14 在自变量x的某一变化趋势下,若函数的绝对值$|f(x)|$无限增大,则称函数$f(x)$为自变量x在该变化趋势下的**无穷大量**,简称**无穷大**. $f(x)$为$x\to x_0$的无穷大,记做$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

例如,当$x\to 1$时,$\dfrac{1}{x-1}$的绝对值无限增大,故$\dfrac{1}{x-1}$是当$x\to 1$时的无穷大,即$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$;当$x\to 0^+$时,$\ln x$取负值但其绝对值无限增大,故$\ln x$为$x\to 0^+$时的负无穷大,即$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

注意 (1) 无穷大是一个绝对值无限增大的变量,而不是绝对值很大的常量.

(2) 无穷大不趋向于任何确定的常数,所以无穷大的极限不存在. $\lim\limits_{x\to()} f(x)=\infty$只是一种记号,表示当$x\to(\quad)$时,$|f(x)|$无限增大($x\to(\quad)$指自变量的任何一种变化趋势).

2. 无穷大与无穷小的关系

定理 1.5 在自变量的同一变化过程中,

(1) 如果函数$f(x)$是无穷小,且$f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大;

(2) 如果函数$f(x)$是无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小.

六、二元函数的极限

函数的极限是研究当自变量变化时,函数的变化趋势. 由于二元函数$z=f(x,y)$

的自变量有两个，所以自变量的变化过程要比一元函数复杂得多. 因为在 xOy 面上，点 (x,y) 趋向于点 (x_0,y_0) 的方式可以是多种多样的.

定义 1.15　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某去心邻域内有定义，点 (x,y) 为该去心邻域内异于 (x_0,y_0) 的任意一点，若当点 (x,y) 以任意方式趋向点 (x_0,y_0) 时，对应的函数值 $f(x,y)$ 总趋向于一个确定的常数 A，则称 A 是二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**极限**，记做

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

由二元函数极限的定义知，只有当动点 (x,y) 以任意方式趋向点 (x_0,y_0) 时，对应的函数值 $f(x,y)$ 总趋向于一个确定的常数 A，才能说二元函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限是 A. 如果当动点 (x,y) 以几种特殊的方式和路径趋向点 (x_0,y_0) 时，对应的函数值 $f(x,y)$ 都趋向于同一个常数 A 还不能断定函数 $f(x,y)$ 有极限. 但是，如果当动点 (x,y) 以几种不同的方式和路径趋向于点 (x_0,y_0) 时，对应的函数值 $f(x,y)$ 趋向于不同的常数，则可断定函数 $f(x,y)$ 的极限不存在.

例 7　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 是否存在.

解　当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋向于 $(0,0)$ 点时，极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

显然，此极限值随 k 值的不同而不同，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

习题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$；　(2) $u_n=\dfrac{3n-1}{2n+1}$；

(3) $u_n=2+\dfrac{1}{2^n}$；　(4) $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$.

2. 利用函数的图形，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$；　(3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{arccot} x$；　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arccot} x$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ 画出其图像，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，并判定极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在.

4. 证明：极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 不存在.

5. 指出下列各题中，哪些是无穷小?哪些是无穷大?

(1) $y=\cot x$，当 $x\to 0$ 时；　　(2) $y=e^{-x}$，当 $x\to+\infty$ 时；

(3) $y=\ln|x|$，当 $x\to 0$ 时；　　(4) $y=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$，当 $x\to\infty$ 时.

6. 指出下列函数在什么情况下是无穷小?在什么情况下是无穷大?

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$；　　(2) $y=\lg x$；　　(3) $y=\dfrac{x+3}{x^2-1}$.

7. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{1}{x}\cdot\arctan x\right)$.

第三节　极限的运算

极限的求法是本课程的基本运算之一，本节重点介绍极限的四则运算和两个重要极限，同时给出无穷小的比较.

一、极限的四则运算

定理 1.6（极限四则运算法则）　设在自变量 x 的同一变化过程中，极限 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

法则(1)和法则(2)均可推广到有限个函数的情形，并有如下推论.

推论 1　$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$　（C 为常数）.

推论 2　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$　（n 为正整数）.

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-2)$.

解
$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-2)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}3x-\lim_{x\to 2}2=(\lim_{x\to 2}x)^2+3\lim_{x\to 2}x-2$$
$$=2^2+3\times 2-2=8.$$

一般地，若 $f(x)$ 为多项式函数，则对任意 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，都有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 2　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2}{x^2-9}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+1}{x^2-x-6}$；　　(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9)=-5\neq 0$，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2}{x^2-9}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9)}=\frac{2^3+2}{2^2-9}=-2.$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-x-6)=0$，$\lim\limits_{x\to -2}(2x+1)=-3\neq 0$，商的极限运算法则失效，但

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-x-6)}{\lim\limits_{x\to -2}(2x+1)}=\frac{0}{-3}=0,$$

由无穷小与无穷大的关系得 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+1}{x^2-x-6}=\infty$.

(3) 当 $x\to 3$ 时分子和分母的极限均为零，但可约去公因子 $x-3\neq 0$，即

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-2}=1.$$

一般地，设 $P(x)$，$Q(x)$ 都是多项式函数，则称 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理分式函数. 有如下结论：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}, & \text{当 } Q(x_0)\neq 0 \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } P(x_0)\neq 0, Q(x_0)=0 \text{ 时},\\ \text{约去零因子}, & \text{当 } P(x_0)=0, Q(x_0)=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

例 3　求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-8x^2+1}{4x^5+x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{7x^3+3}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x+1}{5x^2-1}$.

解　(1) 当 $x\to\infty$ 时，分子分母的极限均不存在，为无穷大，不能直接应用运算法则. 将分子分母同除以 x 的最高次幂 x^5，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2+1}{4x^5+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}{4+\dfrac{2}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

(2) 分子分母同除以 x 的最高次幂 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{7x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{7+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{3}{x^3}\right)}=\frac{0}{7}=0.$$

(3) 分子分母同除以 x 的最高次幂 x^4，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{5x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}},$$

由于分子极限为 1,分母极限为 0,所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{5x^2-1}=\infty.$$

一般地,当 $a_0\neq 0,b_0\neq 0,m,n$ 为非负整数时,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当 n=m 时,\\ 0, & 当 n>m 时,\\ \infty, & 当 n<m 时.\end{cases}$$

注意 (1) 运用极限法则时,必须注意只有各项极限都存在(对商,还要求分母的极限不为零)才能使用极限的四则运算法则.

(2) 若所求极限呈现"$\frac{0}{0}$","$\frac{\infty}{\infty}$","$\infty-\infty$"等形式不能直接应用极限法则,必须先对原式进行恒等变形(约分、通分、有理化、变量代换、分子与分母同除以分子与分母的最高次幂),然后再利用极限法则求极限.

微课
两个重要函数极限

二、两个重要极限

在科学技术中,经常要用到重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$,下面分别介绍它们的极限值.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

关于该极限不做理论推导,只通过列出 $\frac{\sin x}{x}$ 的数值表(见表 1-1),以观察其变化趋势.

表 1-1

x/rad	-1.3	-1.0	-0.7	-0.4	-0.1	-0.01	-0.001
x/rad	1.3	1.0	0.7	0.4	0.1	0.01	0.001
$\frac{\sin x}{x}$	0.741 2	0.841 5	0.920 3	0.973 5	0.998 3	0.999 983	0.999 999 8

从表 1-1 看出,当 x 无限接近于 0 时,函数 $\frac{\sin x}{x}$ 无限接近于 1,理论上可以证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

注意 这个重要极限是"$\frac{0}{0}$"型,为了强调其结构特点,把它形象地写成

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1(\square\text{ 代表同一变量}).$$

例 4　求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3x}{5x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{3}{5}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

关于该极限也不做理论推导，只通过列出$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$的数值表（见表 1-2）来观察其变化趋势.

表 1-2

x	1	2	3	4	5	10	100	1 000	10 000	…
$(1+\frac{1}{x})^x$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	…

从表 1-2 看出，当 x 增大时，函数$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$变化的大致趋势，可以证明当 $x\to\infty$ 时，函数$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$的极限确实存在，并且是一个无理数，其值为 $\mathrm{e}=2.718\,281\,828\cdots$，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

为了准确地用好这个极限，我们指出它的两个特征：

(1) 它是“1^∞”型的极限，只有满足此类型才可考虑用该重要极限.

(2) 该极限可形象地表示为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}(\square\text{ 代表同一变量}).$$

(3) 在公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$中，若令 $t=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，于是又可

得

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}\text{ 或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

例 5 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$;(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}$;(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\mathrm{e}^{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2x}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x}&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{x-3+3}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{x-3}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{3}=\mathrm{e}.\end{aligned}$$

三、无穷小的比较

微课

无穷小量介的比较

前面讨论了两个无穷小的和、差、积仍然是无穷小,而两个无穷小的商不一定是无穷小.商的极限出现几种不同情况,反映了无穷小趋于 0 的速度的差异.为了比较无穷小趋于 0 的快慢,引入如下概念.

定义 1.16 设 α 与 β 是自变量的同一变化过程中的两个无穷小,

(1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记做 $\beta=o(\alpha)$.

(2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$,则称 β 与 α 是同阶无穷小.

(4) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记做 $\alpha\sim\beta$.

例如,因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}=5$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,所以当 $x\to 0$ 时,$x^2=o(x)$,x 是比 x^2 低阶的无穷小,$5x$ 与 x 是同阶无穷小,$\sin x\sim x$.

等价无穷小在求两个无穷小之比的极限时,具有重要的作用,对此有如下定理.

定理 1.7 设在自变量的同一变化过程中,$\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}=A$(或 ∞),则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A(\text{或 }\infty).$$

定理指出,在计算函数极限时,无穷小因子可用其等价无穷小代换,而极限不改变.

可以证明:当 $x \to 0$ 时,有如下常见的几个等价无穷小量,应熟记.

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \ln(1+x) \sim x, \mathrm{e}^x - 1 \sim x, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$$

例 6　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$;(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$;(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解　(1) 因为 $x\to 0$ 时, $\tan 5x \sim 5x, \sin 3x \sim 3x$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$.

(2) 因为 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

(3) 因为 $x\to 0$ 时, $\sin x\sim x, \tan x\sim x, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

注意　等价无穷小代换只能对分子或分母中的因式进行代换.若极限式中分子或分母中的无穷小是以和或差的形式出现,则不能代换,否则导致错误的结果.

习题 1-3

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2-x-1)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x+2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$;

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{1-x}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{1+x^3}$;

(9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4+2x-3}{x^3-x^2+1}$;　　(10) $\lim\limits_{n\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

2. 求 a 的值,使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-2a, & x<0,\\ x^2-a+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限存在.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为非零实数）；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x+3}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

4. 证明：当 $x\to 0$ 时，x^3+2x^2 是比 x 高阶的无穷小.

5. 利用等价无穷小的性质，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin x\cdot\tan x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)\arctan x}{x\sin 2x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$.

第四节　函数的连续性和间断性

为了深入地研究函数的微分和积分，需要引入性质更好的一类函数 —— 连续函数. 什么是“连续”，从字面上不难理解，如液体的流动、身高的增长及气温的变化等都是连续变化的，这种连续变化的现象反映在数学函数关系上，就是函数的连续性.

一、一元函数的连续性

(一) 函数连续性的概念

微课

函数在一点的连续性

1. 函数在一点处的连续性

为了建立函数连续性的定义，首先引入增量的概念.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，给自变量 x 一个增量 Δx，当自变量 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$（$x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，函数 y 相应由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，因此相应的函数增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$（见图 1-14）.

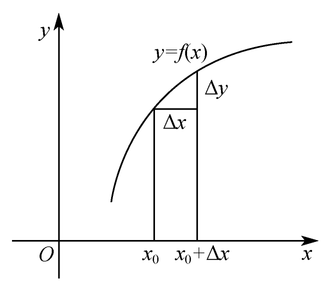


图 1-14

定义 1.17　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数增量也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处**连续**，x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

若令 $x_0+\Delta x=x$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0.$$

即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 于是，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义又可叙述为如下定义.

定义 1.18　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**. 显然，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是它在点 x_0 既左连续，又右连续.

由函数连续的定义可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须同时满足以下三个条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义；

(2) 函数 $f(x)$ 的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 1　讨论函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　由图 1-15 知，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0=f(0)$，

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x=0=f(0),$$

即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. 所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

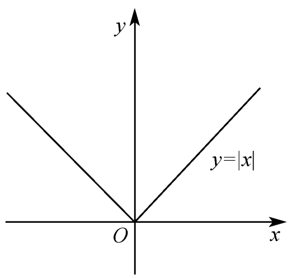


图 1-15

2. 函数在区间内的连续性

定义 1.19　若函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内**连续**，或称 $f(x)$ 是区间(a,b)内的**连续函数**；若函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$

上**连续**,此时也称 $f(x)$ 是闭区间$[a,b]$上的**连续函数**.

(二) 初等函数的连续性

由函数在一点处连续的定义及函数极限的四则运算法则,可得以下定理.

定理 1.8 两个连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数.

定理 1.9 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续,则它的反函数$x=\varphi(y)$ 在对应区间 $I_y=\{y \mid y=f(x), x\in I_x\}$ 上也单调增加(或单调减少)且连续.

定理 1.10 若函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续,函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续,且 $u_0=\varphi(x_0)$,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

这表明在函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 都连续的条件下,求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的极限时,极限符号和函数符号可以交换次序.

由上所述定理及初等函数的定义可得如下重要结论.

定理 1.11 一切初等函数在其定义区间内均连续.

此定理表明:

(1) 求初等函数的连续区间,其实质就是求出它的定义区间;

(2) 对分段函数,除考虑每一段函数的连续性外,还必须讨论分段点处的连续性;

(3) 由初等函数的连续性知,若 $f(x)$ 是初等函数,定义区间为 D,则对任何 $x_0\in D$ 都有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

例 2 求极限$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sin x}{\mathrm{e}^x\sqrt{1+x^2}}$.

解 因为 $f(x)=\dfrac{x^2+\sin x}{\mathrm{e}^x\sqrt{1+x^2}}$ 是初等函数,且在 $x=2$ 处有定义,所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\sin x}{\mathrm{e}^x\sqrt{1+x^2}}=\frac{2^2+\sin 2}{\mathrm{e}^2\sqrt{1+2^2}}=\frac{4+\sin 2}{\mathrm{e}^2\sqrt{5}}.$$

例 3 当 a,b 分别为何值时,函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+a, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x>0\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$上连续.

解　因为 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$ 与$(0,+\infty)$ 上都是初等函数，由初等函数的连续性知，$f(x)$ 在$(-\infty,0)$ 与$(0,+\infty)$ 上都连续. 在分段点 $x=0$ 处，$f(0)=b$，又

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x}+a\right)=a+1, f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=2.$$

由于当 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故得 $a+1=2=b$，即 $a=1,b=2$.

综上所述，当 $a=1,b=2$ 时，函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(三) 闭区间上连续函数的性质

在闭区间上的连续函数有许多重要的性质，这些性质的证明涉及严密的实数理论，因此这里不予证明，仅作必要的几何解释.

定理 1.12(最值定理)　闭区间上的连续函数在该区间上一定存在最大值和最小值.

设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，它的最大值为 M，最小值为 m，则对任何 $x\in[a,b]$，都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 若取 $K=\max\{|m|,|M|\}$，则对任意的 $x\in[a,b]$，都有 $|f(x)|\leqslant K$，即 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界，于是得以下定理.

定理 1.13(有界性定理)　闭区间上的连续函数在该区间上一定有界.

定理 1.14(介值定理)　设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$.

介质定理的几何意义是明显的. 当 $f(a)\neq f(b)$ 且 μ 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间时，连续曲线 $y=f(x)$ 的两端点 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 位于水平线 $y=\mu$ 的两侧，因此曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\mu$ 必有交点(见图 1-16).

推论(零点定理)　设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$(见图 1-17).

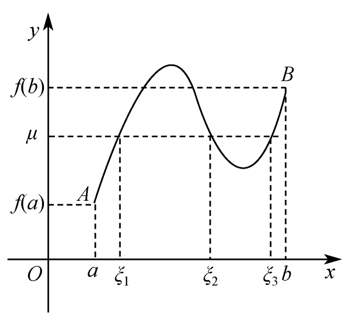


图 1-16

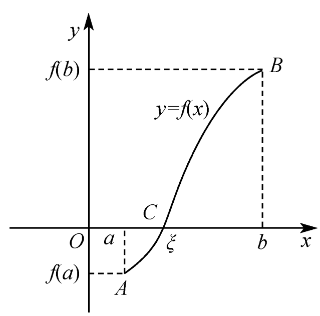


图 1-17

换句话说，在推论条件下，方程 $f(x)=0$ 在开区间(a,b) 内至少有一个实根.

例 4 证明：方程 $\sin x - x + 1 = 0$ 在 0 与 π 之间有实根.

证明 设 $f(x) = \sin x - x + 1$，因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续，且

$$f(0) = 1 > 0, f(\pi) = -\pi + 1 < 0,$$

因此由零点定理知，至少存在一点 $\xi \in (0, \pi)$，使得 $f(\xi) = 0$，即方程 $\sin x - x + 1 = 0$ 在 $(0, \pi)$ 内至少有一个实根.

二、一元函数的间断点

函数的不连续点称为该函数的间断点，即不满足函数连续的三个条件之一的点为间断点. 由于函数在某一点间断的情况很多，为了区别，通常将间断点进行分类.

定义 1.20(间断点的分类) 设 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点. 如果左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$ 都存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**；否则，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**. 对第一类间断点又分为：若 $f(x_0-0) = f(x_0+0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**可去间断点**；若 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

例如，函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在点 $x = 0$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，故 $x = 0$ 是函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的第一类可去间断点. 因为若补充定义，令 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 则函数在点 $x = 0$ 处连续.

例 5 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处的连续性.

解 因为函数 $f(x)$ 在分段点 $x = 1$ 处的左、右极限

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1,$$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2,$$

虽然左右极限存在但不相等，即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在. 所以 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点. 如图 1-18 所示，图像在 $x = 1$ 处出现了跳跃现象.

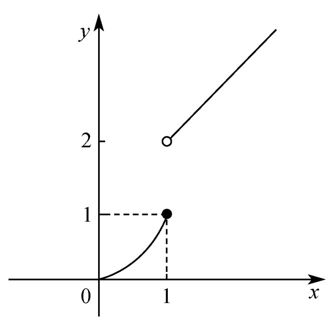


图 1-18

例 6 讨论函数 $y = \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解 因为函数 $y = \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $x = 0$ 是

$y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点. 又因为当 $x\to 0$ 时,函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 -1 到 1 之间作无限次震荡(见图 1-19),这样的间断点称为**震荡间断点**.

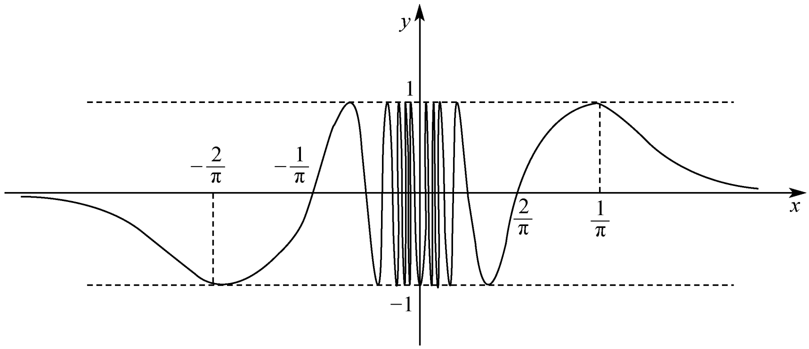


图 1-19

另外,若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,则称 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**. 例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,则称 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的无穷间断点.

三、二元函数的连续性和间断点

类似于一元函数,下面给出二元函数连续的定义.

定义 1.21　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义,若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0), \tag{1.1}$$

则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点都连续,则称 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上**连续**,或称 $z=f(x,y)$ 是区域 D 上的**连续函数**.

若令 $x=x_0+\Delta x, y=y_0+\Delta y$,则(1.1)式可写成

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0,$$

即 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$. 这里 Δz 称为函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的**全增量**,即

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

于是可得二元函数在一点连续的等价定义.

定义 1.22　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义,如果 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$,则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续，则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的**间断点**. 例如，若函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处无定义；或虽有定义但当点 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时函数的极限不存在；或虽然极限存在，但极限值不等于该点的函数值，则 $P_0(x_0,y_0)$ 均为函数的间断点.

例 7 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点处的连续性.

解 由第二节中的例 7 知，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在，所以函数在原点处不连续，即 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的间断点.

一元函数中关于极限的运算法则对于二元函数仍然成立. 根据函数的极限运算法则可以证明：多元连续函数的和、差、积、商(分母不等于零)及复合函数仍是连续函数；多元初等函数在其定义域内连续；在有界闭区间上连续的多元函数必有最大值和最小值等.

习题 1-4

随堂测试

1. 讨论下列分段函数在分段点处的连续性. 若为间断点，判定其类型，并写出连续区间.

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ \sin x, & x\geqslant 0;\end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin 2x, & x<0,\\ a, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0,\end{cases}$ 试确定常数 a,b 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

4. 求下列函数的间断点并判定其类型；如果是可去间断点，则补充定义使函数在该点连续.

(1) $y=\dfrac{x}{x+1}$； (2) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$； (3) $y=\dfrac{x}{\sin x}$；

(4) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$； (5) $y=e^{\frac{1}{x}}$； (6) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

5. 证明：方程 $x^5-3x=1$ 在区间 $(1,2)$ 中至少有一个实根.

6. 证明：方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

7. 设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)>g(a),f(b)<g(b)$，证明：方程 $f(x)=g(x)$

在(a,b)内必有实根.

8. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$.

*第五节　初识数学软件 Mathematica

Mathematica 系统是目前世界上应用最广泛的符号计算系统，它是由美国伊利诺大学复杂系统研究中心主任、物理学、数学和计算机科学教授 Stephen Wolfram 负责研制的. 该系统用 C 语言编写，博采众长，具有简单易学的交互式操作方式、强大的数值计算及符号计算、人工智能列表处理等功能. 本节介绍该软件的基本操作.

一、常用的数学常数

符号格式	代表含义
Pi	$\pi=3.141\ 592\ 654\cdots$
E	$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\cdots$
Degree	$\dfrac{\pi}{180}$
I	虚数单位
Infinity	无穷大

二、常用数学函数

命令格式	代表含义
Sin[x]，Cos[x]，Tan[x]，Cot[x]，Sec[x]，Csc[x]	三角函数，x 取弧度值
ArcSin[x]，ArcCos[x]，ArcTan[x]，ArcCot[x]，ArcSec[x]，ArcCsc[x]	反三角函数
Sinh[x]，Cosh[x]，Tanh[x]，…	双曲函数
ArcSinh[x]，ArcCosh[x]，ArcTanh[x]，…	反双曲函数
Sqrt[x]	根号
Exp[x]	指数函数
Log[x]	自然对数
Log[a，x]	以 a 为底的对数

续表

命令格式	代表含义
Abs[x]	绝对值
Max[a,b,c,…],Min[a,b,c,…]	$a,b,c,\cdots$ 的最大值,最小值
N!	n 的阶乘

三、赋值语句

格式一:x = a　　将变量 x 的值设定为 a,立即赋值;

格式二:x = y = b　　将变量 x 和 y 的值均设定为 b;

格式三:x:= a　　将变量 x 的值设定为 a,延迟赋值;

x =. 或 Clear[x]　　除去变量 x 所存的值.

注意　(1) 立即赋值是指在输入后即被求值;延迟赋值是指在输入后不被立即求值,直到调用时才求值.

(2)Mathematica 软件运行命令方式:按 Shift + Enter.

例如,In[1]:= x = y = Sin[Pi/2]　　(* 将变量 x 和 y 的值均设定为 1 *)

Out[1] = 1

In[2]:= z:= x+1　　(* 定义一个延迟赋值 *)

In[3]:= z　　(* 调用延迟表达式 z *)

Out[1] = 2

四、自定义函数

命令格式	代表含义
f[x_] = expr	立即定义函数 $f(x)$
f[x_]:= expr	延迟定义函数 $f(x)$
f[x_,y_,…] = expr	定义多元函数
?f	查询函数 f 的定义
Clear[f]	清除 f 的定义
f[x_]:= expr /;condition	当条件 condition 成立时,$f(x)$ 才会定义成 expr

例如,In[1]:= f[x_]:= x^2+Sqrt[x]-Cos[x]　(* 延迟定义一个函数 *)

In[2]:= f[2.1]　(* 调用函数计算函数值 *)

Out[2] = 6.36398

In[3]:= f[x^2]　(* 复合函数 *)

Out[3] = $x^4 + \sqrt{x^2} - \text{Cos}x^2$

In[4]:= g[x_]:= Exp[x]/;x > 0　(* 定义一个分段函数 *)

In[5]:= g[x_]:= x^2/;x <= 0

In[6]:= {g[-2],g[2]}　(* 调用分段函数求值 *)

Out[6] = {4,e^2}

In[7]:= h[x_,y_]:= x^2 * y　(* 定义二元函数函数 *)

In[8]:= h[2,3]

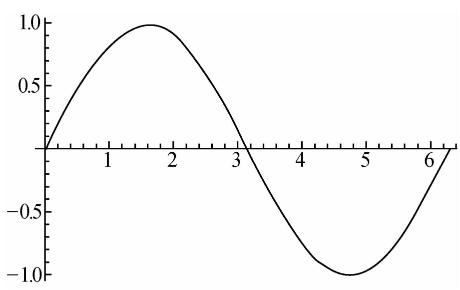
Out[8] = 12

五、绘制简单函数图形

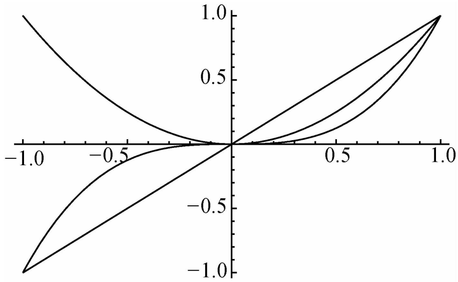
命令格式	代表含义
Plot[f,{x,xmin,xmax}]	画出 f 在 $x_{\min}$ 到 $x_{\max}$ 之间的图形
Plot[{f1,f2,…},{x,xmin,xmax}]	同时画出多个函数图形
ListPlot[{{x1,y1},{x2,y2},…}]	画出坐标为(x_1,y_1),(x_2,y_2),… 的点

例如,In[1]:= Plot[Sin[x],{x,0,2 * Pi}]　(* 绘制 $\sin x$ 的图像 *)

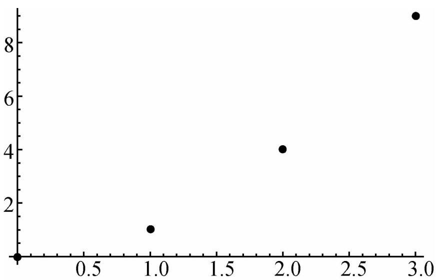
Out[1] =



In[2]:= Plot[{x,x^2,x^3},{x,-1,1}]　(* 绘制多个图形 *)

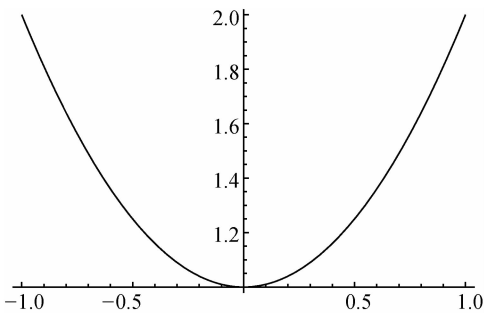
Out[2] = 

In[3]:= ListPlot[{{0,0},{1,1},{2,4},{3,9}}] （* 绘制点图 *）

Out[3] = 

In[4]:= f[x_]:= x^2+1

In[4]:= Plot[f[x],{x,−1,1}] （* 绘制自定义函数图形 *）

Out[4] = 

注意 Mathematica 软件中命令和内部函数首字母必须大写.

六、函数的极限

命令格式	代表含义
Limit[a[n],n−> Infinity]	求数列 a_n 在 n 趋于 ∞ 时的极限值
Limit[expr,x−> c]	当 x 趋近 c 时,求 expr 的极限
Limit[expr,x−> c,Direction −>+1]	当 x 趋近 c 时,求 expr 的左极限
Limit[expr,x−> c,Direction −>−1]	当 x 趋近 c 时,求 expr 的右极限

例如,In[1]:= Limit[n^2 * Sin[1/n^2],n -> Infinity]

Out[1] = 1

In[2]:= Limit[Sin[x]/x,x -> Infinity]

Out[2] = 0

In[3]:= Limit[Sin[x]/x,x -> 0]

Out[3] = 1

In[4]:= Limit[Exp[1/x],x -> 0,Direction -> -1]

Out[4] = ∞

In[5]:= Limit[Exp[1/x],x -> 0,Direction -> +1]

Out[5] = 0

注意　如果在操作过程中提示错误,而输入过程正确无误,那么可尝试重新启动Mathematica 系统.

* 习题 1-5

1. 用一条命令给出 $\sin x$ 在 $x=0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$ 处的函数值.

2. 自定义函数 $f(x)$,求 $f(10^{-1}),f(1),f(10)$.

3. 绘制函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 -0.1 到 0.1 的图形.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 在 -1 到 1 的图形.

5. 若 $f(x)=(x-1)^2,g(x)=\frac{1}{x+1}$,求:

(1) $f(g(x))$;　(2) $g(f(x))$;　(3) $f(x^2)$;　(4) $g(x-1)$.

6. 求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$($x$ 为非零实数);　(2) $\lim\limits_{n\to-\infty}\arctan x$;　(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^{\sqrt{x}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$;　(5) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x})$;

(6) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\tan x}$;　(7) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}$.

复习题一

一、填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ \ln(2-x), & 1<x<2,\end{cases}$ 则其定义域为____________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$，且 $f[f(x)]=x$，则 $a=$ ________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$ ________；$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$ ________.

4. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=\dfrac{2}{3}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}=$ ________.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$，则 $f(1)=$ ________.

二、选择题

1. 已知 $f(\dfrac{1}{x})=(\dfrac{x+1}{x})^2$，则 $f(x)=$（　）.

A. $(1+x)^2$　　B. $(1-x)^2$　　C. $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$　　D. $(1+x)$

2. 函数 $y=\lg(x-1)$ 在区间（　）内有界.

A. $(1,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

3. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{kx}=e^3$，则 $k=$（　）.

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

4. 对初等函数来说，其连续区间一定是（　）.

A. 开区间　　B. 闭区间　　C. $(-\infty,+\infty)$　　D. 其定义区间

5. $x=-1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 的（　）间断点.

A. 跳跃　　B. 可去　　C. 无穷　　D. 震荡

三、综合题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求：

(1) 写出 $f(x)$ 的定义域；(2) 作出函数 $f(x)$ 的图形；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$；

(4) 讨论函数在 $x=0$ 处的连续性，若间断，指出间断点的类型.

2. 观察下列各题，哪些是无穷小?哪些是无穷大?

(1) $\ln x\ (x\to 0^+)$；　　(2) $\dfrac{1+2x}{x^2}\ (x\to\infty)$；

(3) $e^{-x}\ (x\to+\infty)$；　　(4) $3^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^+)$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}\arctan x$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\dfrac{1}{x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$.

4. 已知 a,b 为常数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+5}{x+2}=5$，求 a,b 的值.

5. 求出下列函数的间断点，并指出其类型.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；　(2) $y=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x, & x<0;\end{cases}$　(3) $y=\cos\dfrac{1}{x^2}$.

6. 证明：方程 $x-2\sin x=1$ 至少有一个小于 3 的正根.