

“十四五”职业教育国家规划教材配套用书

第3版

新编高等数学学习参考

XINBIAN GAODENG SHUXUE XUEXI CANKAO

新编高等数学学习参考

第3版

新编高等数学学习参考

主编 尹 光 陈金涛

第3版

主编 尹 光 陈金涛

- 精解细剖教材习题
- 点拨专升本解题思路
- 强化考试提分能力

ISBN 978-7-5635-7774-3



定价: 32.00元

北京邮电大学出版社



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

策划编辑: 金颖杰

责任编辑: 郝永进

封面设计: 刘文东

“十四五”职业教育国家规划教材配套用书

新编高等数学学习参考

主 编 尹 光 陈金涛
副主编 刘云川 高 宁

第3版



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是“十四五”职业教育国家规划教材《新编高等数学(第3版)》的配套用书,全书共分为11章,包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间向量与空间解析几何、多元微积分、常微分方程、无穷级数、线性代数.

本书既可作为高等职业院校高等数学课程的学习用书,也可供相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学学习参考 / 尹光, 陈金涛主编.

3版. -- 北京: 北京邮电大学出版社, 2025. -- ISBN

978-7-5635-7774-3

I. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20258VP800 号

策划编辑: 金颖杰 责任编辑: 郝永进 封面设计: 刘文东

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号

邮政编码: 100876

发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 三河市骏杰印刷有限公司

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张: 11.5

字 数: 280 千字

版 次: 2019 年 4 月第 1 版 2025 年 12 月第 3 版

印 次: 2025 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-7774-3

定 价: 32.00 元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

服务电话: 400-615-1233

前言

党的二十大报告指出,“加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设,加快建设中国特色、世界一流的大学和优势学科”.高等数学是高等职业教育各专业的公共基础课程,高等数学的思想和方法越来越多地应用于各个学科和领域,如何快速掌握其基本内涵和它所蕴含的思想、方法是相关教育部门与各个教学单位正在认真思考、仔细研究、积极探索的问题.

本书根据现阶段我国职业教育教学改革的需要,在充分总结一线教师教学经验的基础上编写而成,旨在满足教师教学和学生学习的需要.本书是教材《新编高等数学(第3版)》的配套用书.全书按照教材的章节进行编排,每章包含以下两部分内容.

(1)习题解答.本部分对《新编高等数学(第3版)》中每节的习题和每章的复习题做了详细的分析和解答,旨在帮助学生掌握解题方法和解题技巧,使学生能够举一反三、触类旁通.

(2)解题思路点拨.本部分对每章的主要知识点进行梳理总结,提供解题思路,帮助学生理解知识,拓展解题思维.

本书由昆明铁道职业技术学院尹光、陈金涛任主编,由刘云川、高宁任副主编,黄涛、陈宇、白余、毛鑫、邹泳参与了编写.

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏和不足之处,敬请广大读者批评指正.

编 者

目录

第 1 章

函数 1

1.1 习题解答 1

1.2 解题思路点拨 8

第 2 章

极限与连续 10

2.1 习题解答 10

2.2 解题思路点拨 23

第 3 章

导数与微分 26

3.1 习题解答 26

3.2 解题思路点拨 36

第 4 章

微分中值定理与导数的应用 38

4.1 习题解答 38

4.2 解题思路点拨 51



第5章

不定积分 53

5.1 习题解答 53

5.2 解题思路点拨 62

第6章

定积分及其应用 65

6.1 习题解答 65

6.2 解题思路点拨 83

第7章

空间向量与空间解析几何 86

7.1 习题解答 86

7.2 解题思路点拨 94

第8章

多元微积分 97

8.1 习题解答 97

8.2 解题思路点拨 112

第9章

常微分方程 115

9.1 习题解答 115

9.2 解题思路点拨 136

第10章

无穷级数 138

10.1 习题解答 138

10.2 解题思路点拨 152

第11章

线性代数 154

11.1 习题解答 154

11.2 解题思路点拨 175

第1章 函 数

1.1 习题解答

习题 1.1

1. 判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”).

- (1) 若两个函数的定义域与值域相同, 则这两个函数是相同的函数. ()
(2) 分段函数是由两个或两个以上的函数组成的. ()
(3) 偶函数的图像不一定过原点, 奇函数的图像一定过原点. ()
(4) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 函数 $y = |f(x)|$ 与 $y = f(|x|)$ 的图像相同. ()

【解】 (1) × (2) √ (3) × (4) ×

2. 填空题.

(1) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = f(x)$, 则 $f(6) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 函数 $f(x) = x^2 - 5x + 4$ 在 $\underline{\hspace{2cm}}$ 单调减少, 在 $\underline{\hspace{2cm}}$ 单调增加.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$, 则 $f[f(-2)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 (1) 答案: $f(6) = f(3) = f(0) = 0$.

解析: $y = f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x+3) = f(x)$, 所以 $y = f(x)$ 的周期 $T = 3$, 则 $f(6) = f(3) = f(0) = 0$.

提示: 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数一定过原点.

(2) 答案: $(-\infty, \frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2}, +\infty)$.

解析: $f(x) = x^2 - 5x + 4$ 的对称轴为 $x = \frac{5}{2}$. 所以, 其在 $(-\infty, \frac{5}{2})$ 内单调递减, 在 $(\frac{5}{2}, +\infty)$ 内单调递增.

(3) 答案: $f[f(-2)] = f(3) = 10$.

解析: 首先计算 $f(-2)$, 因为 $-2 < 1$, 所以应该代入 $f(1-x)$ 中, 得到 $f(3)$; 而 $3 > 1$, 所以将 3 代入 $f(x) = x^2 + 1$ 中, 得到结果 10.



3. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{2x-3} + \frac{1}{x-3}; \quad (2) f(x) = \sqrt{1-2^x} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}.$$

【解】 (1) 答案: 定义域为 $\left\{x \mid x \geq \frac{3}{2} \text{ 且 } x \neq 3\right\}$.

解析: 求原函数的定义域需要满足两个条件: 一是 $2x-3 \geq 0$; 二是 $x-3 \neq 0$. 由此即得 $x \geq \frac{3}{2}$ 且 $x \neq 3$.

(2) 答案: 定义域为 $\{x \mid -3 < x \leq 0\}$.

解析: 求原函数的定义域需要满足两个条件: 一是 $1-2^x \geq 0$; 二是 $x+3 > 0$. 由此即得 $-3 < x \leq 0$.

4. 作出下列函数的图像.

$$(1) y = |x-2| \cdot (x+1); \quad (2) y = \begin{cases} x+1, & x \geq 3 \\ x^2-5, & x < 3 \end{cases}.$$

【解】 (1) 可先将原函数进行转化, 转化为如下分段函数的形式:

$$y = |x-2| \cdot (x+1) = \begin{cases} (x-2)(x+1), & x \geq 2 \\ (2-x)(x+1), & x < 2 \end{cases}$$

再根据分段函数取样点, 画出函数图像. 图像略.

(2) 画图原理同(1). 图像略.

5. 珍惜不可再生资源、节约能源和保护环境是我们每个人应当遵循的生活理念. 当前, 许多城市实行了阶梯式水费计价政策. 例如, 某城市规定四口及四口以下居民家庭每月每户的基准用水量为 26 t, 基准水价为每吨 1.98 元, 超出部分的用水按以下标准分段计费: 超出部分的前 1~8 t 按基准水价的 1.5 倍计费, 超出 8 t 的部分按基准水价的 2 倍计费. 请你列出该政策下的函数关系式, 读取你家当月水表数据, 根据上述标准计算本月应缴水费, 并思考可以从哪些方面减少用水量.

【解】 函数关系式为:
$$f(x) = \begin{cases} 1.98x, & 0 < x \leq 26 \\ 1.98 \times 26 + 2.97(x-26), & 26 < x \leq 34. \text{ 其他略.} \\ 1.98 \times 26 + 3.96(x-26), & x > 34 \end{cases}$$

习题 1.2

1. 指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

$$(1) y = \sin(x^2+1); \quad (2) y = \ln[\sin(x+5)];$$

$$(3) y = e^{\cos 2x}; \quad (4) y = \arctan(\ln x).$$

【解】 (1) $y = \sin(x^2+1)$ 可看作由 $y = \sin u$ 和 $u = x^2+1$ 复合而成.

(2) $y = \ln[\sin(x+5)]$ 可看作由 $y = \ln u$, $u = \sin v$, $v = x+5$ 复合而成.

(3) $y = e^{\cos 2x}$ 可看作由 $y = e^u$ 和 $u = \cos 2x$ 复合而成.

(4) $y = \arctan(\ln x)$ 可看作由 $y = \arctan u$ 和 $u = \ln x$ 复合而成.



2. 设 $f(x)=3^x, g(x)=\sqrt{x}$, 求:

(1) $f[g(x)]$;

(2) $g[f(x)]$.

【解】 (1) $f[g(x)]=3^{g(x)}=3^{\sqrt{x}}$.

(2) $g[f(x)]=\sqrt{f(x)}=\sqrt{3^x}$.

3. 选择题.

(1) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的值为().

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{2}$

(2) $y=\arcsin 2x$ 的反函数为().

A. $y=2\sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

B. $y=\frac{\sin x}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

C. $y=\sin 2x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

D. $y=\sin \frac{x}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

【解】 (1)C (2)B

复 习 题 1

1. 选择题.

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\frac{1}{x-2}$ 的定义域为().

A. $[0, 2)$

B. $(2, +\infty)$

C. $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

D. $[0, 2) \cup (2, +\infty)$

(2) 函数 $y=(2m-1)x+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 则().

A. $m > \frac{1}{2}$

B. $m < \frac{1}{2}$

C. $m > -\frac{1}{2}$

D. $m < -\frac{1}{2}$

(3) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x)=\frac{1}{x}+x^2$, 则 $f(-1)=$ ().

A. -2

B. 0

C. 1

D. 2

(4) $f(x)=x \sin x \cdot e^{\cos x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是().

A. 有界函数

B. 周期函数

C. 奇函数

D. 偶函数

(5) 在对称区间上, $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则以下函数为奇函数的是().

A. $f(x^4)$

B. $f(x)+g(x)$

C. $g(x)f(x)$

D. $-g(-x)$



(6) 函数 $f(x) = \frac{7}{\sqrt{49-x^2}} + \lg(3x-6)$ 的定义域为().

- A. $[2, 7]$ B. $(2, 7)$
C. $[2, 7)$ D. $(2, 7]$

(7) 函数 $f(x) = \ln(3x-1)$ 的定义域为().

- A. $(\frac{1}{3}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{1}{3})$
C. $[\frac{1}{3}, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{1}{3}]$

(8) 在对称区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, $\frac{f(-x)-f(x)}{3}$ 是().

- A. 奇函数 B. 偶函数
C. 非奇非偶函数 D. 无法确定

【解】 (1)D (2)B (3)A (4)D (5)C (6)B (7)A (8)A

2. 填空题.

(1) 函数 $y = \sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是_____.

(2) 已知 $f(\sqrt{x}+1) = x+2\sqrt{x}$, 则 $f(x) =$ _____.

(3) 若 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \geq 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(3) =$ _____.

(4) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+3x, & x \geq 0 \\ 5+2x^3, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f[f(-1)] =$ _____.

(5) 函数 $y = 1 + 2\tan 5x \left(|x| < \frac{\pi}{10} \right)$ 的反函数是_____.

(6) 已知 $f(x) = \sqrt{x^3+2}$, 则 $f^{-1}(2) =$ _____.

【解】 (1) 答案: 定义域为 $[-3, 1]$.

解析: 原题可转化为解一元二次不等式 $3-2x-x^2 \geq 0$, 解得 $-3 \leq x \leq 1$, 即定义域为 $[-3, 1]$.

(2) 答案: $f(x) = x^2 - 1$.

解析: 令 $\sqrt{x}+1=t$, 则 $\sqrt{x}=t-1 \Rightarrow x=(t-1)^2$, 故由 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$ 得

$$f(t) = (t-1)^2 + 2(t-1) = t^2 - 1$$

即 $f(x) = x^2 - 1$.

(3) 答案: -2 .

解析: 因为 $3 > 0$, 所以将 $x=3$ 代入式 $f(x) = 1-x$ 中, 得到 $f(3) = -2$.

(4) 答案: 18 .

解析: $f(-1) = 5 + 2 \times (-1)^3 = 3$, $f[f(-1)] = 3^2 + 3 \times 3 = 18$.

(5) 答案: $y = \frac{1}{5} \arctan \frac{x-1}{2}$.

解析: 由原式得 $\tan 5x = \frac{y-1}{2}$, $5x = \arctan \frac{y-1}{2}$, 则 $x = \frac{1}{5} \arctan \frac{y-1}{2}$, 即所求反函数为



$$y = \frac{1}{5} \arctan \frac{x-1}{2}.$$

(6) 答案: $\sqrt[3]{2}$.

解析: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2-2}, f^{-1}(2) = \sqrt[3]{2}$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$, 求 $f(2), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

【解】 答案: $f(2) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = 2, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

解析: 由于 $2 \in [1, 3]$, 所以 $f(2) = 2 - 1 = 1$; 由于 $\frac{1}{2} \in [0, 1)$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$; 由于 $-\frac{1}{2} \in (-1, 0)$, 所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

(1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, g(x) = \frac{1}{x+1}$;

(2) $f(x) = \sqrt{(1-x)^2}, g(x) = 1-x$;

(3) $f(x) = x, g(x) = \ln e^x$.

【解】 答案: (1) 不同; (2) 不同; (3) 相同.

解析: 两个函数是相同的, 需要满足两个条件: 一是函数的定义域相同; 二是在函数定义域相同的情况下, 相同的自变量得到的函数值相同.

首先看第(1)题, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\}$, 而函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)\}$, 故函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 不同.

其次看第(2)题, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \in (-\infty, +\infty)\}$, 函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x \in (-\infty, +\infty)\}$, 两个函数的定义域相同. 接下来判断当 x 取同一值时所得到的函数值是否相同. 取 $x=2$ 代入函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$, 得到 $f(x)=1, g(x)=-1$, 可知对于同一自变量 x 值, 得到的两个函数值不相同, 故这两个函数不同.

最后看第(3)题, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \in (-\infty, +\infty)\}$, 函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x \in (-\infty, +\infty)\}$, 两个函数的定义域相同. 而对于任意取值 x , 均有 $f(x)=g(x)$, 故这两个函数相同.

5. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$; (2) $y = \ln(x^2-1) + \arcsin \frac{1}{x+1}$.

【解】 答案: (1) $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$; (2) $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

解析: 首先看第(1)题, 要想使函数有意义, 则 x 必须满足如下不等式组:

$$\begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

解上述不等式组, 可得 $x \in [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

其次看第(2)题, 要想使函数有意义, 则 x 必须满足如下不等式组:



$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ -1 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \end{cases}$$

解上述不等式组,可得 $x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

6. 对于下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并确定它们的定义域.

$$(1) f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = x^4;$$

$$(2) f(x) = \sqrt{1-x}, g(x) = \sqrt{x-1}.$$

【解】 答案: (1) $f[g(x)] = \sqrt{x^4+1}, x \in \mathbf{R}, g[f(x)] = (x+1)^2, x \geq -1$.

$$(2) f[g(x)] = \sqrt{1-\sqrt{x-1}}, 1 \leq x \leq 2, g[f(x)] = \sqrt{\sqrt{1-x}-1}, x \leq 0.$$

解析: 首先看第(1)题, 对于复合函数 $f[g(x)]$, 将 $g(x)$ 作为函数 $f(x)$ 的自变量, 因此将 $g(x) = x^4$ 代入函数 $f(x)$ 中, 可得 $f[g(x)] = \sqrt{x^4+1}$; 接下来判定该复合函数的定义域, 因为无论 x 取何值, 复合函数都有意义, 所以该复合函数的定义域为全体实数, 即 $\mathbf{R}$.

对于复合函数 $g[f(x)]$, 将函数 $f(x)$ 作为函数 $g(x)$ 的自变量, 因此, 将 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 代入函数 $g(x)$ 中, 可得 $g[f(x)] = (x+1)^2$; 接下来判定该复合函数的定义域, 如果单看复合函数 $g[f(x)] = (x+1)^2$, x 可以取任意值, 但是这里要注意, 自变量在满足复合函数之前首先要满足 $f(x)$ 的定义域, 即 $x+1 \geq 0$, 从而得出复合函数 $g[f(x)] = (x+1)^2$ 的定义域为 $x \geq -1$.

其次看第(2)题, 解题过程参考第(1)题, 即可得到结果.

7. 求下列函数的反函数.

$$(1) y = 1 + \log_4 x; \quad (2) y = \frac{2^x}{2^x + 1}.$$

【解】 答案: (1) $y = 4^{x-1}, x \in \mathbf{R}; (2) y = \log_2 \frac{x}{1-x}, 0 < x < 1$.

解析: 首先看第(1)题, 由 $y = 1 + \log_4 x$ 得

$$4^{y-1} = x$$

所以, 函数 $y = 1 + \log_4 x$ 的反函数为 $y = 4^{x-1}$, 其定义域为原函数的值域, 即 $x \in \mathbf{R}$.

其次看第(2)题, 由 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 得

$$2^x(1-y) = y$$

从而有 $2^x = \frac{y}{1-y}$, 得出 $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$, 所以函数 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的反函数为 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$, 其定义域为原函数的值域, 即 $0 < x < 1$.

8. 已知 $f(x-1) = x^2 + x + 1$, 求 $f\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

【解】 由 $f(x-1) = x^2 + x + 1 = (x-1)^2 + 3(x-1) + 3$ 得

$$f(x) = x^2 + 3x + 3$$

因此可得 $f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + \frac{3}{x-1} + 3$.



9. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 对于任意 x, y 都有

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$$

且 $x \neq 0$ 时 $f(x) \neq 0$. 证明 $f(x)$ 为偶函数.

【证明】 因为对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$$

令 $x=y=0$, 得 $f(0)=2$ 或 $f(0)=0$.

当 $f(0)=0$ 时, 对于任意的 $x \neq 0$, 都有 $f(x+0) + f(x-0) = f(x) \cdot f(0) = 0$ 与 $f(x) \neq 0$ 矛盾. 所以, $f(0)=0$ 舍去.

所以, $f(0)=2$, $f(0+y) + f(0-y) = f(0) \cdot f(y)$, 从而得 $f(-y) = f(y)$, 即函数 $f(x)$ 为偶函数.

10. 某单位拥有一辆汽车, 一年中的税费、保险费及司机工资等固定支出共为 a , 另外, 车辆每行驶单位路程的油费为 b . 试写出该车一年中平均每千米费用 y 与行驶路程 x 之间的函数关系式.

【解】 由题干可知, 一年中的税款、保险费及司机工资等费用为固定费用 a , 而油费会随着路程的增加而增加, 所以油费是个变量, 于是可以得出如下的函数关系式:

$$y = bx + a$$

但是要注意, 上式求得的是一年汽车行驶的总费用, 而我们的目的是写出一年中平均每千米费用与行驶路程的函数关系式, 所以得出如下结果:

$$y = \frac{bx+a}{x}$$

即所求的函数关系式.

11. 某物体从静止开始沿直线运动, 前 10 s 内做匀加速运动, 加速度为 2 cm/s^2 ; 10 s 后改为匀速运动. 已知运动开始时路程为零. 试建立路程 s 与时间 t 之间的函数关系式.

【解】 由题干知, 该物体的运动可看作两部分: 一部分是匀加速运动, 另一部分是匀速运动, 时间分割点是 10 s. 于是, 当 $0 \leq t \leq 10$ 时, 可由匀加速直线运动的位移公式 ($s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, 因为物体的初始速度为 0, 且从时间 0 s 开始运动, 因此可将位移公式简化为 $s = \frac{1}{2} at^2$) 得到下面的关系式:

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times t^2 = t^2 \quad (1-1)$$

10 s 后 ($t > 10$) 物体开始做匀速直线运动, 由匀速直线运动的位移公式得到如下的关系式:

$$s = s_0 + v_0 t \quad (1-2)$$

式(1-2)中的 s_0 实际上是物体在前 10 s 内做匀加速直线运动所产生的位移, 即由式(1-1)可得 $s_0 = 10^2 = 100$, 即在到达时刻 10 s 时, 物体已经走了 100 cm. 而对于 10 s 时刻的初始速度, 应该按照匀加速直线运动的速度公式计算得出:

$$v = v_0 + at = 0 + 2 \times 10 = 20$$

即物体在 10 s 时开始做匀速直线运动的速度为 20 cm/s, 所以最终可以得出路程 s 与时间 t 之间的函数关系式为

$$s = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 10 \\ 100 + 20t, & t > 10 \end{cases}$$



1.2 解题思路点拨

1.2.1 求函数的定义域和函数值

1. 分段函数的定义域

分段函数的定义域是各分段区域的并集.

2. 初等函数的定义域

在没有特别指明的情况下,函数 $y=f(x)$ 的定义域是使 $f(x)$ 有意义的实数 x 的集合. 特别地,若所求函数是由几个函数经有限次四则运算所构成的,则所求函数的定义域就是这几个函数的定义域的交集.

3. 复合函数的定义域

若 $f(x)$ 的定义域为 I_1 , 则复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域为 $I=\{x|g(x)\in I_1\}$. 特别地,若 $f(x)$ 的定义域为 (a,b) , 则复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域为 $I=\{x|a<g(x)<b\}$.

1.2.2 函数基本性质的判定和应用

1. 利用定义判定函数的基本性质

利用函数有界性、奇偶性、单调性、周期性的定义直接判定函数的基本性质. 需要注意的是,判定奇偶性时要先判断函数的定义域是否关于原点对称.

2. 利用图像判定函数的基本性质

有界函数的图像夹在两条平行于 x 轴的直线之间;奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称;单调增加的函数的图像呈上升的趋势;单调减少的函数的图像呈下降趋势;周期函数的图像具有周期性.

3. 复合函数的奇偶性与单调性

若 $g(x)$ 是偶函数, 则 $f[g(x)]$ 是偶函数;若 $g(x)$ 是奇函数, 则当 $f(x)$ 是奇函数时 $f[g(x)]$ 是奇函数, 当 $f(x)$ 是偶函数时 $f[g(x)]$ 是偶函数.

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 具有相同的单调性, 则 $f[g(x)]$ 单调增加;若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 具有相反的单调性, 则 $f[g(x)]$ 单调减少.

4. 两个周期函数的和的周期性

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最小正周期分别为 T_1 和 T_2 , 则当 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbf{N}^*$) 时, $f(x) + g(x)$ 具有周期性, 且最小正周期为 $T = \frac{[m, n]}{m} T_1 = \frac{[m, n]}{n} T_2$ (这里 $[m, n]$ 表示 m, n 的最小公倍数); 否则 $f(x) + g(x)$ 不具有周期性.



1.2.3 求反函数

求函数 $y=f(x)$ 反函数的步骤:

第一步,由 $y=f(x)$ 推出 x 关于 y 的表达式 $x=f^{-1}(y)$;

第二步,交换 x, y , 得到反函数的表达式 $y=f^{-1}(x)$;

第三步,注明反函数的定义域(原函数的值域).