高等职业教育公共基础课系列教材

（基于Matlab的数学实验与思维训练）

高等数学

主编　王小琴　韩　群　刘广会

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

高等职业教育公共基础课系列教材

高等数学

主编　王小琴　韩　群　刘广会

北京邮电大学出版社

高等数学

策划编辑：金颖杰
责任编辑：边丽新
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5635-7652-4

定价：49.80元

高等职业教育公共基础课系列教材

（基于Matlab的数学实验与思维训练）

高等数学

主　编　王小琴　韩　群　刘广会

副主编　李　锐　高志伟　刘晓玲　高海燕

参　编　巩洪德

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内容简介

全书共分为八章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学。

本书可作为高等职业院校高等数学课程的教学用书，也可作为相关人士学习数学的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 王小琴，韩群，刘广会主编. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2025.（2026 重印）. -- ISBN 978-7-5635-7652-4

Ⅰ. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025LU1314 号

策划编辑：金颖杰　　**责任编辑**：边丽新　　**封面设计**：刘文东

出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：河北龙大印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：14
字　　数：340 千字
版　　次：2025 年 8 月第 1 版
印　　次：2026 年 4 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5635-7652-4　　定　价：49.80 元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·
服务电话：400-615-1233

前　　言

高等数学是高等职业教育专科层次各专业的一门重要公共基础课程，旨在培养学生的数学素养、逻辑思维能力和解决实际问题的能力。通过本课程的学习，学生将掌握一元函数微积分、多元函数微分学、常微分方程、空间解析几何等基础知识，并能够运用数学工具分析专业问题，为后续专业课程的学习及职业发展奠定坚实基础。

本书以“服务专业发展、赋能技术创新”为宗旨，通过内容重构、资源整合及方法创新，助力高职学生构建数学思维、提升问题解决能力。本书共分为八章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学。

本书具有以下特色。

1. 构建严谨知识体系

本书严格遵循高等数学学科逻辑，确保理论推导与概念准确；以极限、导数、积分等基础概念为起点，系统推进至空间解析几何、多元函数微分等核心内容。

2. 实现分层教学

本书内容编排由浅入深、循序渐进，兼顾不同专业学生的基础与学习能力，既满足基本需求，也为进阶学习提供空间。

3. 加大数字赋能

本书以二维码链接丰富的线上资源（如教学视频），支持课外自主学习，利用可视化工具辅助理解抽象概念，以提高学习成效。

本书由山东经贸职业学院王小琴、滨州职业学院韩群、青岛港湾职业技术学院刘广会任主编；由青岛港湾职业技术学院李锐，滨州职业学院高志伟、刘晓玲，山东交通职业学院高海燕任副主编；山东京北方金融科技有限公司巩洪德参与编写。

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　函数及其性质

一、函数的概念

在实际问题中，经常会遇到两类不同的量：一类在所考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，称为**常量**；另一类在所考察的过程中是变化的，可以取不同数值，称为**变量**.

实际问题中的诸变量之间往往是相互联系的，一个变量随另一个变量的变化而变化，这种关系通常表现为变量取值的对应关系，即函数关系.

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的非空数集，如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的法则 f 都有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为

$$y=f(x), x\in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**（或**函数**），数集 D 称为函数的**定义域**，f 称为函数的**对应法则**.

当 x 取确定数值 $x_0\in D$ 时，通过法则 f，函数有唯一确定的值 y_0 与之相对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记为

$$y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0).$$

由全体函数值构成的集合称为函数的**值域**，记为 M，即 $M=\{y\,|\,y=f(x), x\in D\}$.

由函数的定义可以看出，定义域和对应法则是确定函数的两个必不可少的要素，也就是说，如果两个函数的定义域和对应法则都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，若不考虑函数的实际意义而抽象地研究函数，则规定函数的定义域是使其表达式有意义的一切实数组成的集合，一般考虑以下几个方面：

(1) 分式函数的分母不能为零；

(2) 偶次根式的被开方式必须大于等于零；

(3) 对数函数的真数必须大于零；

(4) 三角函数与反三角函数要符合其定义；

(5) 如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集.

例 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$； (2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}+\ln(2x+4)$.

解 (1) 由 $25-x^2\geqslant 0$,得 $-5\leqslant x\leqslant 5$,所以函数的定义域为 $[-5,5]$.

(2) 因为 $\begin{cases}3-x>0,\\2x+4>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x<3,\\x>-2,\end{cases}$ 所以函数的定义域为 $(-2,3)$.

二、函数的性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是以原点为中心的对称区间,如果对于 $x\in D$,总有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**;如果总有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如,函数 $y=\sin x$ 为奇函数,$y=\cos x$ 为偶函数.

2. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在正数 M,使得对于 D 内的任意 x 值,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**. 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**. 例如,在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内 $|\sin x|\leqslant 1$,所以正弦函数在定义域内有界. 又如,函数 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$ 是无界函数. 因为对于 $\mathbf{R}$ 内的一切 x,不存在正数 M,使 $|x^2|\leqslant M$ 成立.

3. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的(或单调减少的). 单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**. 相应的区间称为函数的**单调区间**.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的.

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在不为零的常数 T,使关系式 $f(x+T)=f(x)$ 对于定义域内的任意一点 x 都成立,则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**,其中 T 称为函数 $y=f(x)$ 的周期,通常满足这个等式的最小正数 T 称为该函数的最小正周期.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

习题 1-1

1. 判断下列各组函数是否是相同的函数.

(1) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(2) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 与 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$；

(3) $y=\frac{\pi}{2}$ 与 $y=\arcsin x+\arccos x$;

(4) $y=\frac{x^3-1}{x-1}$ 与 $y=x^2+x+1$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{5}{x^2+2}$;

(2) $y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x-2}+\lg(4-x)$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;　　(2) $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=x^2-x^3$;　　(4) $y=x\sin\frac{1}{x}$.

4. 判断下列哪些函数是周期函数，对于周期函数，求出它的最小正周期.

(1) $y=|\sin x|$;　　(2) $y=x\cos x$;

(3) $y=\sin x+\cos\frac{x}{2}$.

第二节　分段函数、反函数与复合函数

一、分段函数

我们把在不同的定义域区间所对应的函数解析式不同的函数统称为**分段函数**. 如邮资函数、电话费用函数、个人收入所得税函数等，还有高等数学课程中会涉及的如下两个分段函数：

绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

例 1　一个停车场第 1 小时收费 5 元，以后每小时收费 3 元，每天最多收费 15 元，不到1 小时都按 1 小时来计算，试求停车费用与时间的函数关系，并说明其实际意义.

解　设停车场停车 t 小时的费用为 y，则

$$y=\begin{cases} 5, & 0<t\leqslant 1, \\ 5+3(t-1), & 1<t\leqslant 4, \\ 15, & 4<t\leqslant 24. \end{cases}$$

注意 t 取整数.

或

$$y=\begin{cases}5, & 0<t\leqslant 1,\\ 8, & 1<t\leqslant 2,\\ 11, & 2<t\leqslant 3,\\ 14, & 3<t\leqslant 4,\\ 15, & 4<t\leqslant 24.\end{cases}$$

由此可以看出,为了节省费用,应该尽量控制在整时内,由于一天的停车费用最高不超过 15 元,所以,当停车时间超过 4 小时,可以不急于取车.

二、反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系.但在研究过程中,哪个量作为自变量,哪个量作为因变量(函数)是由具体问题决定的.

定义 1 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 R_f. 对于值域 R_f 中的任一数值 y,都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应,且满足关系式

$$f(x)=y,$$

则确定了一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,称为函数 $y=f(x)$的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$. 反函数的定义域为 R_f,值域为 D. 相对于反函数,函数 $y=f(x)$称为**直接函数**.

由于习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此将反函数中的 x 与 y 互换位置,即记为 $y=f^{-1}(x)$,$x\in R_f$.

在同一直角坐标系中,函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

什么样的函数才有反函数呢? 下面给出反函数存在定理.

定理 设函数 $y=f(x)$在区间 I_x 上单调增加(或减少),则函数 $y=f(x)$存在反函数,其反函数 $y=f^{-1}(x)$在对应区间 $I_y=\{y\,|\,y=f(x),x\in I_x\}$上也单调增加(或减少).

注意:单调性并不是一个函数存在反函数的必要条件,读者可自己举出非单调函数存在反函数的实例.

例 2 求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数.

解 记 $u=e^x$,则 $y=\dfrac{u-u^{-1}}{2}$,由此得 $u^2-2yu-1=0$,解得

$$u=y\pm\sqrt{y^2+1},$$

因 $u>0$,故

$$u=y+\sqrt{y^2+1},$$

即

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1},$$

所以 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$,因此函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

三、复合函数

我们知道，当动点在单位圆上以 $A(0,1)$ 为起点做逆时针匀速运动时，动点在 y 轴上的投影的纵坐标 y 是角度 θ 的函数 $y=\sin\theta$，如果角速度为 ω，则角度 θ 是时间 t 的函数 $\theta=\omega t$. 显然，对于大于或等于零的任意时间 t，动点在 y 轴上的投影纵坐标 y 都是确定的，因此，y 也是时间 t 的函数，即 $y=\sin(\omega t)$. 我们把这样一种函数关系定义如下.

定义 2　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，且 $u=\varphi(x)$ 的值域与 D_1 的交集非空，则 y 通过中间变量 u 构成了 x 的函数，把这个函数称为 x 的**复合函数**. 记作 $y=f[\varphi(x)]$.

例如，函数 $y=\sin x^2$ 由函数 $y=\sin u, u=x^2$ 复合而成.

注意：(1)函数可以由多个函数经过多次复合而成. 例如，函数 $y=\sqrt{\cos 2x}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}, u=\cos v, v=2x$ 复合而成.

(2)复合函数中所提的交集非空是必需的，也就是说，不是任意两个函数都能够复合成一个函数. 例如，函数 $y=\arcsin u, u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数，因为 $y=\arcsin(2+x^2)$ 是无意义的.

例 3　指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\ln(3-\sin x)$；

(2) $y=\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}$；

(3) $y=\sin(\lg 2^x)$.

解　(1) $y=\ln(3-\sin x)$ 由 $y=\ln u, u=3-v, v=\sin x$ 复合而成.

(2) $y=\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}$ 由 $y=\sqrt{u}, u=\cos v, v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成.

(3) $y=\sin(\lg 2^x)$ 由 $y=\sin u, u=\lg v, v=2^x$ 复合而成.

习题 1-2

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-3$；　(2) $y=\ln(x-1)+1$；　(3) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

3. 判断下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=2^{\sin x}$；　(2) $y=\ln(\sin 2x)$；

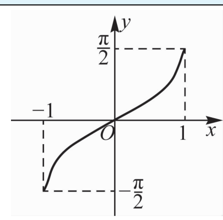
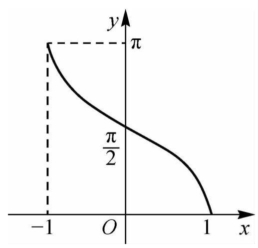
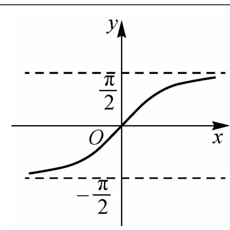
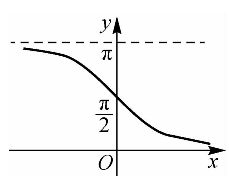
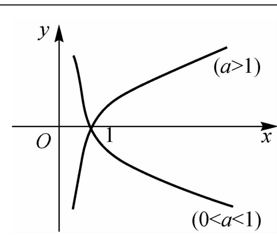
(3) $y=\cos^2(\sqrt{x}+1)$；　(4) $y=\arctan(\ln x)$.

第三节　基本初等函数与初等函数

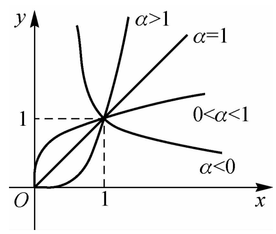
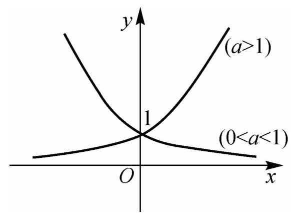
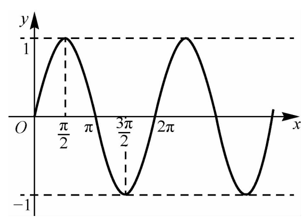
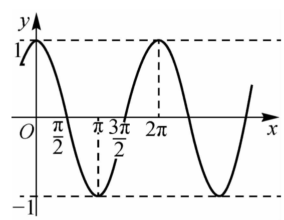
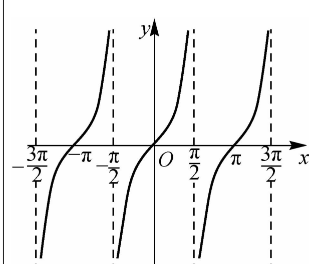
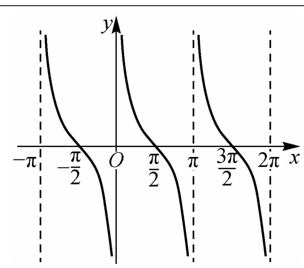
一、基本初等函数

基本初等函数包括反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数，通常称为“反对幂指三”. 相关内容见表 1-1.

表 1-1

名称	解析式	定义域和值域	图形	主要性质
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界
对数函数	$y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		图形都分布在 y 轴右侧，都过点(1,0). 当 $0<a<1$ 时，函数单调减少；当 $a>1$ 时，函数单调增加

续表

名称	解 析 式	定义域和值域	图形	主要性质
幂函数	$y=x^{\alpha}$ (α 为常数)	依 α 不同而异		图形都经过点(1,1). 在第一象限内, 当 $\alpha>0$ 时,函数单调增加; 当 $\alpha<0$ 时,函数单调减少
指数函数	$y=a^{x}$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		图形都分布在 x 轴上方,都过点(0,1). 当 $0<a<1$ 时,函数单调减少;当 $a>1$ 时,函数单调增加
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数,周期为 2π,图形分布在两直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数,周期为 2π,图形分布在两直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期为 π,在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi,(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期为 π,在 $(k\pi,k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调减少

二、初等函数

我们把由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并可以用一个解析式表示的函数，称为初等函数. 例如，$y=x^2$，$y=2x+\ln\sin x$ 等都是初等函数. 本教材所涉及的函数绝大多数都是初等函数.

习题 1-3

1. 写出三角函数和反三角函数的解析式、定义域和值域.
2. 画出指数函数和对数函数的图形.

第四节　极限的概念与性质

一、极限的概念

1. 数列的概念

定义 1　将自变量为正整数的函数 $u_n=f(n)$ 的函数值按自变量 n 由小到大的顺序排成的一列数

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$$

称为**数列**，记为 $\{u_n\}$. 其中，$u_n=f(n)$ 为数列 $\{u_n\}$ 的**通项**或**一般项**. 由于一个数列 $\{u_n\}$ 完全由其一般项 u_n 所确定，因此有时也将数列 $\{u_n\}$ 简写成 u_n.

定义 2　对于数列 $\{u_n\}$，若存在一个常数 $M>0$，使得 $|u_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$ 恒成立，则称数列 u_n 为**有界数列**，或称**数列有界**.

如果数列 $\{u_n\}$ 有界，也可理解为存在两个数 M 和 m，使得 $m\leqslant u_n\leqslant M$，称 M 为数列的**上界**，m 为数列的**下界**.

定义 3　对于数列 $\{u_n\}$，若数列的各项满足 $u_n\leqslant u_{n+1}$，则称数列 $\{u_n\}$ 为**单调增加的数列**；若数列的各项满足 $u_n\geqslant u_{n+1}$，则称数列 $\{u_n\}$ 为**单调减少的数列**. 单调增加的数列或单调减少的数列统称为**单调数列**.

下面通过几个实例说明数列单调的情况：

$\{u_n\}$：$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$ 为单调减少的数列.

$\{v_n\}$：$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$ 为单调增加的数列.

$\{w_n\}$：$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^n}{n}$ 是有界数列，但不是单调数列.

2. 数列的极限

看下面 3 个无穷数列：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

$$0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$$

$$\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\cdots,(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\cdots$$

为了直观，我们把这三个数列的前 n 项分别表示在数轴上，如图 1-1～图 1-3 所示.

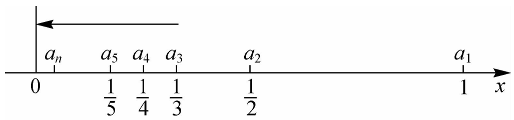


图 1-1

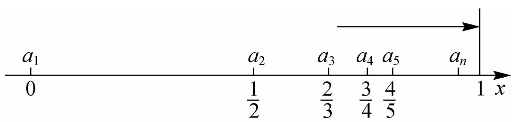


图 1-2

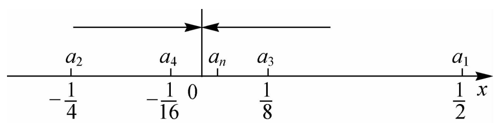


图 1-3

由图 1-1 可以看出，当 n 无限增大时，数列 $a_n=\frac{1}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=0$ 的右侧无限接近于 0. 由图 1-2 可以看出，当 n 无限增大时，数列 $a_n=\frac{n-1}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=1$ 的左侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=1$ 的左侧无限接近于 1. 由图 1-3 可以看出，当 n 无限增大时，数列 $(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的左、右两侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=0$ 的左、右两侧无限接近于 0.

以上三个数列有一个共同的特点：当 n 无限增大时，$a_n=f(n)$ 无限接近于某一个常数 a. 一般地，有如下定义：

定义 4　如果当 n 无限增大($n\to\infty$)时，无穷数列 $\{a_n\}$ 的项 a_n 趋近于某个确定的常数 a($|a_n-a|$ 无限地接近于 0)，那么，就说这个确定的常数 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to a$.

根据定义 4 可将上述三个数列的极限分别记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1;\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0.$$

例 1　观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $a_n=\frac{1}{n^2}$；　　(2) $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$；　　(3) $a_n=1$.

解　列出数列的前几项(见表 1-2),考察当 $n\to\infty$时,数列的点逐渐密集的位置.

表 1-2

通项公式	1	2	3	4	5	…	$\to\infty$
$a_n=\dfrac{1}{n^2}$	1	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{25}$	…	$\to 0$
$a_n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{64}$	$\dfrac{1}{256}$	$\dfrac{1}{1\,024}$	…	$\to 0$
$a_n=1$	1	1	1	1	1	…	$\to 1$

由表 1-2 中三个数列的变化趋势及定义 4 可知:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0;\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0;\lim_{n\to\infty}1=1.$$

3. 函数的极限

引例(单摆运动)　单摆离开垂直位置一定的距离后,在重力作用下左右摆动,如果不施加外力作用,那么,单摆在摩擦力和空气阻力的作用下,其振幅会不断减小,时间越长,振幅也就越小,当时间无限延长时,那么单摆的振幅就无限接近于零.上述例子反映出的规律,即当自变量沿着某方向变化时,对应的函数值是否无限接近于一个确定的常数.我们把函数的这种变化趋势定义为极限.根据自变量的变化方式,我们又把函数的极限分为以下两种类型.

1) 当 $x\to\infty$时,函数 $f(x)$的极限

观察当 $x\to\infty$时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$的变化趋势(见图 1-4).

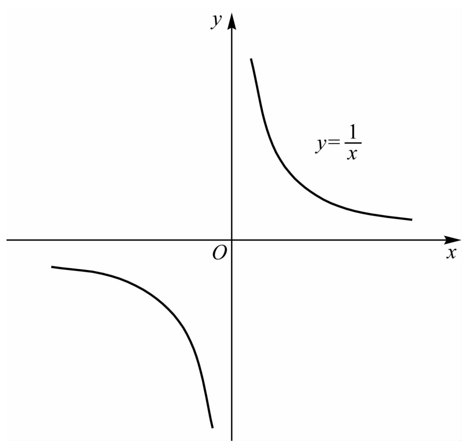


图 1-4

由图 1-4 可以看出,当 x 的绝对值无限增大时,$f(x)$的值无限接近于零,对于这种当 $x\to\infty$时函数 $f(x)$的变化趋势,给出下面的定义.

定义 5　当 x 的绝对值无限增大时,如果函数 $f(x)$能无限接近于一个确定的常数 A,那

么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to A$.

在以上函数极限的定义中，自变量 x 的绝对值无限增大指的是 x 既取正值而无限增大(记为 $x\to+\infty$)，同时也取负值而绝对值无限增大(记为 $x\to-\infty$). 但有时 x 的变化趋势只能或只需取这两种变化中的一种情形. 为此，定义 5 中的 $x\to\infty$ 可以换成 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的情形.

例 2　求下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解　通过作图分析(如图 1-5 和图 1-6 所示)可得：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$；

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

一般地，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

显然，数列极限是函数当 $x\to+\infty$ 时的特殊情形.

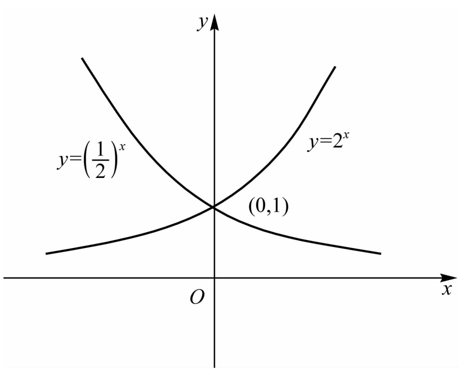


图 1-5

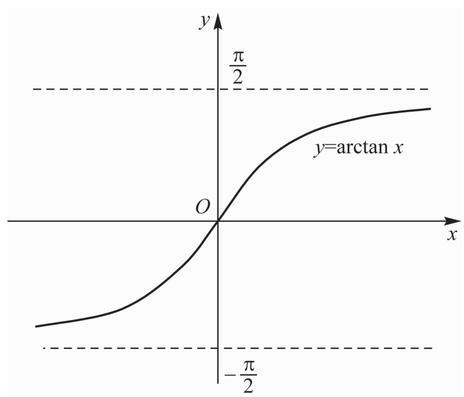


图 1-6

2) 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x+1$，观察当 $x\to3$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势(见图 1-7).

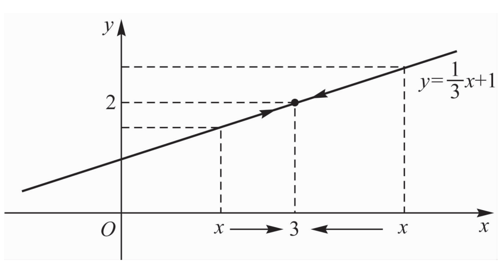


图 1-7

视频 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

由图 1-7 不难发现，当 x 从 3 的左右两侧越来越接近 3 时，$f(x)$的值就越来越接近 2. 从而给出下面的定义.

定义 6 当 x 无限接近于 x_0(x 可以不等于 x_0)时，如果函数 $f(x)$能无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to A$.

由图 1-7，可以看出，当 $x\to 3$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{3}x+1$ 的极限为 2，可记为

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{3}x+1\right)=2.$$

例 3 求函数 $y=f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$当 $x\to\dfrac{1}{2}$时的极限.

解 函数的定义域为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

由图 1-8 可以看出，当 $x\to\dfrac{1}{2}$时，$f(x)\to 2$，从而$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x-1}=2$.

注意：函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，与函数在这点是否有定义无关.

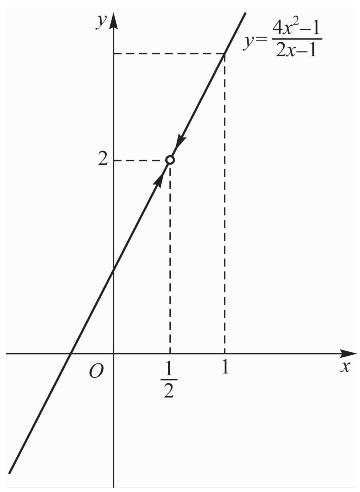


图 1-8

由定义 6 可以得出以下结论.

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0;\lim_{x\to 0}\cos x=1;\lim_{x\to x_0}C=C;\lim_{x\to x_0}x=x_0.$$

上面讨论的 $x\to x_0$ 指的是自变量 x 从 x_0 的左侧和右侧无限接近于 x_0，但有时只需知道 x 仅从 x_0 的左侧($x<x_0$)或仅从 x_0 的右侧($x>x_0$)趋于 x_0 时 $f(x)$的变化趋势，这就是左极限和右极限的概念.

定义 7 当 x 从 x_0 的左侧无限趋于 x_0 时，函数 $f(x)$能无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为 $x\to x_0^-$ 时函数 $f(x)$的**左极限**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$.

当 x 从 x_0 的右侧无限趋于 x_0 时，函数 $f(x)$能无限接近于一个确定的常数 A，则称 A

为 $x\to x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的**右极限**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$.

左、右极限又称为**单侧极限**.

一般地，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

例 4　讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x-1, & x>0, \end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

解　$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$，即 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

二、极限的性质

数列极限是函数极限的特殊情形，都归结为在自变量的某一变化过程中，函数值无限接近于某一确定的常数，因而它们具有共同的性质. 下面以 $x\to x_0$ 的情形为例来叙述.

性质 1（唯一性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则极限值唯一.

性质 2（有界性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则在 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)$ 有界.

性质 3（保号性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则必存在 x_0 的某一去心邻域，使得在该邻域内，函数 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且在 x_0 的某一去心邻域内，函数 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

极限的夹逼法则　如果对于 x_0 的某一去心邻域内的一切 x，都有

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

习题 1-4

1. 判断下列数列是否有极限.

(1) $u_n=\dfrac{1}{3^n}$；　　(2) $u_n=\dfrac{n}{2n+1}$；

(3) $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$；　　(4) $u_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ a+\sin x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<3, \\ 3x-1, & x\geqslant 3, \end{cases}$ 讨论当 $x\to 3$ 时，$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ 是否存在.

第五节　极限的运算法则

一、极限的四则运算法则

在自变量 x 的同一变化趋势下，设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限都存在，分别用 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 表示. 此处省略了自变量 x 的变化趋势，表示在下面的讨论中，对于 $x \to x_0$，$x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to \infty$，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$ 中的任何一种情形，结论都成立（下同）.

法则 1　$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$（可推广至有限多个）.

法则 2　$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$（可推广至有限多个）.

推论 1　$\lim[C \cdot f(x)] = C \cdot \lim f(x)$（$C$ 为常数）.

推论 2　$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$（$n$ 为有限的数）.

法则 3　$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$（$\lim g(x) \neq 0$）.

上面的法则可以简单叙述为：若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限都存在，则它们代数和的极限等于极限的代数和，乘积的极限等于极限的乘积，商的极限等于极限的商（此时分母的极限不为 0）. 关于数列的极限，也有类似的四则运算法则.

二、复合函数的极限运算法则

法则 4　设函数 $y = f[\varphi(x)]$ 由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成，且在点 x_0 的去心邻域内有定义. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$，$\lim\limits_{x \to u_0} f(u) = A$，且在点 x_0 的去心邻域内有 $\varphi(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A.$$

法则 4 表示，如果两个函数 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 满足相应的条件，则可以做变量代换 $u = \varphi(x)$，从而将求 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)]$ 的问题转化为求 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

例 1　求 $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 4x + 1)$.

解　
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2}(3x^2 - 4x + 1) &= 3\lim_{x \to 2} x^2 - 4\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 1 \\ &= 12 - 8 + 1 = 5.\end{aligned}$$

利用极限的运算法则，不难得出如下结论：

设多项式 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，则有

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0,$$

即多项式的极限可以直接代入求解.

一般地，设多项式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad (Q(x_0) \neq 0).$$

例 2 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+6x-1}{3x^2+5x+6}$.

解 由于分母的极限不为零,因此

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+6x-1}{3x^2+5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(2x^2+6x-1)}{\lim\limits_{x\to1}(3x^2+5x+6)}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}.$$

例 3 求$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$.

解 当 $x\to2$ 时,分子与分母的极限均为 0,极限为$\dfrac{0}{0}$型未定式,此时不能直接利用商的运算法则,但由于分子和分母都有公因子 $x-2$,当 $x\to2$ 时,$x-2\neq0$,因此可以约去这个非零因子,所以

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-1}{6x^2-2x+6}$.

解 当 $x\to\infty$时,分子与分母的极限都不存在,为$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式,此时也无法用商的运算法则. 可先将分子与分母同时除以 x 的最高次幂,使分子和分母的极限都存在,再用相应的法则求解.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-1}{6x^2-2x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{6-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}=\frac{5+0-0}{6-0+0}=\frac{5}{6}.$$

用同样的方法,可以得到如下结论:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\infty, & m<n,\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & m=n,\ (\text{其中 } a_nb_m\neq0).\\ 0, & m>n\end{cases}$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解 该极限为$\infty-\infty$型未定式,可以先通分,然后化成极限存在的形式,再用相应的运算法则求解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)&=\lim_{x\to1}\frac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=1.\end{aligned}$$

例 6 求$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.

解 该极限为$\dfrac{0}{0}$型未定式,此时不能直接利用商的运算法则,但由于分母中带有根号,因此可以先将分母有理化,再用相应的运算法则求解.

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x+5}+3)=6.$$

例 7 已知 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x-a}{x^2+5x+6}=b$，求常数 a,b.

解 因为当 $x\to-3$ 时，有 $x^2+5x+6\to0$，所以分子 $x-a$ 也趋近于 0，即 $-3-a=0$，得 $a=-3$，则

$$原式=\lim_{x\to-3}\frac{x-(-3)}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{(x+3)(x+2)}=-1,$$

所以 $b=-1$.

习题 1-5

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$； (4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{1-x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$； (6) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2-2x, & 0<x\leqslant2,\\ 3x+6, & x>2,\end{cases}$ 讨论当 $x\to0$ 及 $x\to2$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在，并且求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3. 若 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a,b 的值.

第六节 两个重要极限

一、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

下面证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

作单位圆（见图 1-9），取 $\angle AOB=x(\text{rad})$，于是有 $BC=\sin x$，$\overset{\frown}{AB}=x$，$AD=\tan x$. 由图 1-9 得 $S_{\triangle OAB}<S_{扇形OAB}<S_{\triangle OAD}$，即

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x.$$

视频两个重要函数极限

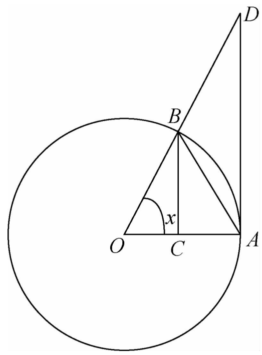


图 1-9

得

$$\sin x<x<\tan x,$$

从而,有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

上述不等式是当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时得到的,但因当 x 用 $-x$ 代换时,$\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 都不变号,所以当 x 为负值时,关系式也成立.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$,又 $\lim\limits_{x\to0}1=1$,由极限的夹逼准则可知,介于它们之间的函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x\to0$ 时,极限也是 1.

这样就证明了 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

注意:这个重要极限是"$\frac{0}{0}$"型的,为了强调其形式,可把它形象地写成

$$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1(\square\text{代表同一变量}).$$

例 1　求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1.$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\arcsin x}$.

解　令 $\arcsin x=t$,则 $x=\sin t$,当 $x\to0$ 时,$t\to0$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\arcsin x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$.

解　令 $\pi-x=t$,则 $x=\pi-t$,当 $x\to\pi$ 时,$t\to0$,所以

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$.

解 令 $2x=t$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{2}{3}.$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

推广：当 $x\to 0$ 时，ax，$\sin bx$，$\tan cx$ 三个之中任意两个之比的极限等于 x 的系数之比($abc\neq 0$).

二、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

通过观察通项为 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的数列的各项(见表 1-3)，我们不难得出上述结论.

表 1-3

n	x_n	n	x_n
1	2	100 000	2.718 268 24
5	2.488 32	500 000	2.718 279 11
10	2.593 742 46	1 000 000	2.718 280 47
100	2.704 813 83	5 000 000	2.718 281 56
1 000	2.716 923 93	10 000 000	2.718 281 69
10 000	2.718 145 93	50 000 000	2.718 281 80

从表中我们可以发现，当 n 无限增大时，相应的变量$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 无限接近于一个确定的无理数 e=2.718 281 8…. 事实上，可以证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

注意：该极限类型也可以表示为以下形式

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$

例 6 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2$.

例 7　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=\mathrm{e}^3$.

例 8　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=\mathrm{e}$.

例 9　计算$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}}\}^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

推广：若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$（$a$ 可以是有限数 x_0，$-\infty$，$+\infty$，∞），则

$$\lim_{x\to a}[1+f(x)]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a}f(x)\varphi(x)}.$$

习题 1-6

1. 填空题.

(1)若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{k}{x}\right)^x=\mathrm{e}^2$，则 $k=$________.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}=$________.

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x+3}=$________.

2. 求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{2x}$；

(2)$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cot x$；

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$；

(6)$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$；

(7)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}-1}$；

(8)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

第七节　无穷小与无穷大

一、无穷小

1. 无穷小的定义

定义 1　若函数 $\alpha(x)$在 x 的某种变化趋势下的极限为零，则称 $\alpha(x)$为在 x 的这种变化趋势下的**无穷小量**，简称**无穷小**. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0/\infty}f(x)=0$.

例 1 判断下列量在指定的过程中是否是无穷小.

(1) $f(x)=\frac{1}{x}, x\to\infty$; (2) $f(x)=\frac{1}{x}, x\to 1$;

(3) $f(x)=x^2, x\to 0$; (4) $f(x)=\frac{1}{x^2}, x\to\infty$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,所以当 $x\to\infty$时,$\frac{1}{x}$是无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1\neq 0$,所以当 $x\to 1$ 时,$\frac{1}{x}$不是无穷小.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,所以当 $x\to 0$ 时,x^2 是无穷小.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$,所以当 $x\to\infty$时,$\frac{1}{x^2}$是无穷小.

注意:(1) 说一个函数是无穷小,必须指明自变量的变化趋势. 例如,$\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$时是无穷小,当 $x\to 1$ 时则不是无穷小.

(2) 不要将绝对值很小的常数说成无穷小. 例如,$100^{-10\,000}$ 是一个很小的数,但不是无穷小.

(3) 常数中只有零可以看成无穷小.

2. 无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和是无穷小.

注意:无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

性质 2 有限个无穷小的乘积是无穷小.

推论 常数与无穷小的乘积是无穷小.

性质 3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

注意:两个无穷小的商未必是无穷小.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$.

解 当 $x\to 0$ 时,$x^2\to 0$,x^2 是无穷小,而 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,即 $\sin\frac{1}{x}$是有界函数,所以 $x^2\sin\frac{1}{x}$也是无穷小,即 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

二、无穷大

定义 2 在自变量的某种变化趋势下,若函数 $f(x)$的绝对值无限增大,则称函数 $f(x)$为在 x 的这种变化趋势下的**无穷大量**,简称**无穷大**.

当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$为无穷大,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

当 $x\to\infty$时,$f(x)$为无穷大,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

例如,若某人将一定本金存入银行,则当存入年限 $n\to+\infty$时,本金的本利和无限增大.

例 3　判断下列函数在指定的过程中是无穷小还是无穷大？说明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2},x\to\infty$;　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{2^x},x\to+\infty$;

(3) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1},x\to1$;　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x},x\to\pi$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^2)=\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$. 故当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 是无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}=0$. 故当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2^x}$ 是无穷小.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)}=\dfrac{0}{2}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\infty$. 故当 $x\to1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ 是无穷大.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\sin x}=\infty$. 故当 $x\to\pi$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ 是无穷大.

有时，无穷大具有确定的符号：在 x 的某种变化趋势下，若 $f(x)$ 恒为正且无限增大，则称 $f(x)$ 为正无穷大，并用 $+\infty$ 表示；若 $f(x)$ 恒为负且其绝对值无限增大，则称 $f(x)$ 为负无穷大，并用 $-\infty$ 表示.

例如，$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$.

注意： 我们说 $f(x)$ 为无穷大时必须说明 x 的变化趋势. 函数为无穷大则是函数极限不存在的一种特殊情况. 但为了叙述方便，仍然说成函数的极限是无穷大. 绝对值很大的数不一定是无穷大，任意常数都不是无穷大.

三、无穷小与无穷大的关系

根据无穷小和无穷大的定义，它们的关系可用下面的定理来描述：

定理 1　在自变量的同一变化趋势下，无穷大的倒数是无穷小；恒不为零的无穷小的倒数是无穷大.

使用无穷小与无穷大的关系定理可以方便地讨论极限结果是无穷大的情况.

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}$.

解　当 $x\to1$ 时，$x-1\to0$，即 $x-1$ 是当 $x\to1$ 时的无穷小，所以 $x-1$ 的倒数 $\dfrac{1}{x-1}$ 是无穷大，即 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

前面已经讨论了无穷小的和、差、积的运算结果，而两个无穷小的商会出现各种不同的情况，有的可能为无穷大，有的可能为无穷小，有的可能为常数. 两个无穷小的商的不同结果反映了两个无穷小趋于零的快慢程度. 比较两个无穷小趋于零的速度快慢，将会使后面问题的讨论更加方便，因此主要根据商的结果来定义无穷小的比较结果.

定义 3 设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 均为自变量在同一变化趋势下的无穷小.

(1)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$(或 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$),则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **高阶的无穷小**,或称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ **低阶的无穷小**,记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

视频无穷小量阶的比较

(2)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq0)$,则称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是**同阶无穷小**.

(3)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 为**等价无穷小**,记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

等价无穷小是同阶无穷小的一个非常重要的特例.

例如,当 $x\to0$ 时,x^2 与 $5x$ 都是无穷小,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{5x}=0$. 所以,当 $x\to0$ 时,x^2 是比 $5x$ 高阶的无穷小,即 $x^2=o(5x)$.

当 $x\to0$ 时,下列常见的无穷小是等价的:

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ \ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x,\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}.$$

定理 2 设 $\alpha(x),\alpha_1(x),\beta(x),\beta_1(x)$ 是自变量在同一变化趋势下的无穷小,且有 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\beta(x)\sim\beta_1(x)$,若 $\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在(或为∞),则 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也存在(或为∞),并且有 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$(或为$\infty$).

例 5 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 当 $x\to0$ 时,$\tan 2x\sim2x$,$\sin 5x\sim5x$,由定理 2 得

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{2x}$.

解 当 $x\to0$ 时,$\sqrt[3]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{3}$,由定理 2 得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{3}}{2x}=\frac{1}{6}.$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

解 当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$\sin x\sim x$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}=\frac{1}{2}.$$

习题 1-7

1. 选择题.

(1) 当 $x\to+\infty$时，下列变量中为无穷大的是(　　).

A. $\dfrac{1}{x}$　　B. $\ln(1+x)$

C. $\sin x$　　D. e^{-x}

(2) 当 $x\to 0$ 时，$3x^2$ 是(　　).

A. x 的同阶无穷小　　B. x 的等价无穷小

C. 比 x 高阶的无穷小　　D. 比 x 低阶的无穷小

(3) 当 $x\to 0$ 时，下面无穷小中与 x 等价的无穷小为(　　).

A. $3x$　　B. $\sin x$

C. $\ln(1+x^2)$　　D. $x+\sin x$

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)\cos\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+1}\left(3+\sin\dfrac{1}{x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}(\sin x+\cos x)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{\sin\dfrac{x}{2}\tan 3x}$.

第八节　函数的连续性

为了深入研究函数的微分和积分，我们需要引入一类函数——连续函数. 什么是“连续”？从字面上来讲是不难理解的. 例如，液体的流动、身高的增长及气温的变化等都是连续变化的，这种连续变化的现象反映在数学的函数关系上，就是函数的连续性.

一、函数的连续与间断

1. 函数的连续性

为了建立函数连续性的定义，首先引入增量的概念.

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义，给自变量 x 一个增量 Δx，当自变量 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$($x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内)时，函数 y 相应由 $f(x_0)$变到 $f(x_0+\Delta x)$，如图 1-10 所示，因此相应的函数增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

定义 1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义，若当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数增量也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处**连续**，x_0 称为函数 $f(x)$的**连续点**.

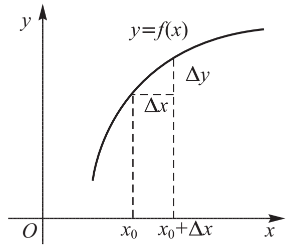


图 1-10

若令 $x_0+\Delta x=x$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0.$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

于是，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义又可按如下叙述：

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

显然，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是它在点 x_0 处既左连续，又右连续.

由函数连续的定义可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须同时满足以下三个条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义.

(2) 函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

定义 3 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**连续**，或称 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的**连续函数**；若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上**连续**，此时也称 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数.

例 1 讨论函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

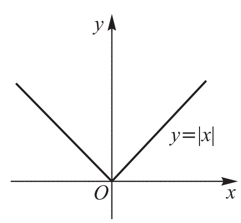


图 1-11

解 由图 1-11 知，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0=f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0=f(0)$，

即

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0).$$

所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

2. 函数的间断点

函数的不连续点称为该函数的**间断点**，即不满足函数连续的三个条件之一的点为间断点. 由于函数在某一点间断的情况很多，为了区别，通常将间断点进行分类.

定义 4　设 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点. 若左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$ 都存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**；否则，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**. 对第一类间断点又分为：若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第一类可去间断点**；若 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第一类跳跃间断点**.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，故 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的第一类可去间断点. 因此若补充定义，令 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则函数在点 $x=0$ 处连续.

例 2　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解　因为函数 $f(x)$ 在分段点 $x=1$ 处的左、右极限分别为

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2,$$

虽然存在但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在. 故 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点. 如图 1-12 所示，图形在 $x=1$ 处出现了跳跃现象.

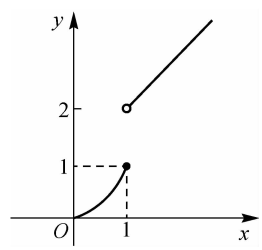


图 1-12

例 3　讨论函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解　因为函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以点 $x=0$ 是 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点. 又因为当 $x\to 0$ 时，函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 -1 到 1 之间做无限次震荡（见图 1-13），这样的间断点称为**第二类震荡间断点**.

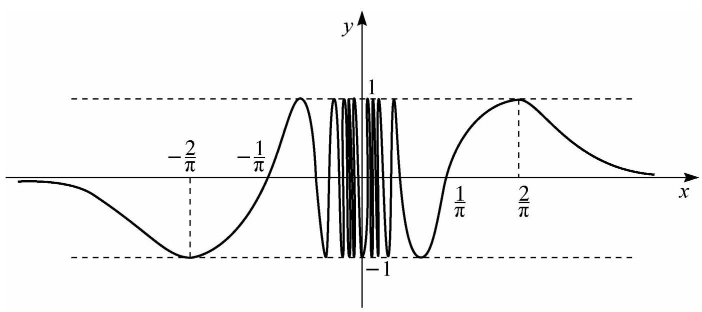


图 1-13

另外，若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第二类无穷间断点**. 例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，则称 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的第二类无穷间断点.

二、连续函数的运算与性质

由函数在一点处连续的定义及函数极限的四则运算法则，可得：

定理 1 两个连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数.

定理 2 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应区间 $I_y=\{y=f(x),x\to I_x\}$ 上也单调增加(或单调减少)且连续.

定理 3 若函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

定理 4 若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处也存在极限，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(u_0)$.

综合上述结果及初等函数的定义，可以得到如下重要结论：

定理 5 一切初等函数在其定义区间内均连续.

此定理表明：

(1)求初等函数的连续区间，其实质就是求出它的定义区间.

(2)对分段函数，除考虑每一段函数的连续性外，还必须讨论分段点处的连续性.

(3)由初等函数的连续性知，若 $f(x)$ 是初等函数，定义区间为 D，则对任意 $x_0\in D$ 都有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

例 4 求极限$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$.

解 因为$\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$是初等函数，且在点 $x=2$ 处有定义，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}=\frac{2^2+\sin 2}{e^2\sqrt{1+2^2}}=\frac{4+\sin 2}{e^2\sqrt{5}}.$$

例 5 当 a,b 分别为何值时，下列函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+a, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x>0.\end{cases}$$

解 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上都是初等函数，由初等函数的连续性知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上都连续. 在分段点 $x=0$ 处，$f(0)=b$，又

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x}+a\right)=1+a,\ f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=2.$$

由于当 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ 时，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，故得

$$1+a=b, b=2,$$

即

$$a=1, b=2.$$

所以，当 $a=1, b=2$ 时，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

综上所述，当 $a=1, b=2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

三、闭区间上连续函数的性质

在闭区间上连续的函数有许多重要的性质，这些性质的证明涉及严密的实数理论，在此我们不予证明，仅做必要的几何解释.

定理 6(最值定理)　闭区间上连续的函数在该区间上一定存在最大值和最小值.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，它的最大值为 M，最小值为 m，则对任何 $x\in[a,b]$，都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 若取 $K=\max\{|m|,|M|\}$，则对任意的 $x\in[a,b]$，都有 $|f(x)|\leqslant K$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，于是得出以下定理：

定理 7(有界性定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

定理 8(介值定理)　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$.

介值定理的几何意义是明显的. 当 $f(a)\neq f(b)$ 且 μ 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间时，连续曲线 $y=f(x)$ 的两端点 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 位于水平线 $y=\mu$ 的两侧，因此曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\mu$ 必有交点(见图 1-14).

推论(零点定理)　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$(见图 1-15).

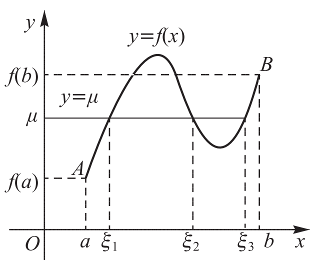


图 1-14

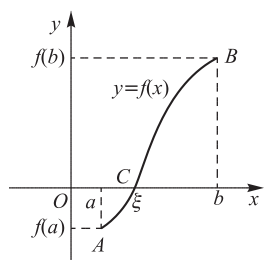


图 1-15

换句话说，在推论条件下，方程 $f(x)=0$ 在开区间 (a,b) 内至少有一个实根.

例 6　证明方程 $\sin x-x+1=0$ 在 0 与 π 之间有实根.

证明　设 $f(x)=\sin x-x+1$，因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且

$$f(0)=1>0, f(\pi)=-\pi+1<0,$$

因此由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $\sin x-x+1=0$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个实根.

习题 1-8

1. 设函数 $y=2x^2-1$，当 x 从 $x_1=1$ 改变到 $x_2=\frac{1}{2}$ 时，求自变量的增量与函数的增量.

2. 已知某产品的生产函数为 $y=x+4x^2-0.2x^3$，其中 y 是产量，x 是原料的投放量. 问：当 $x=10$ 个单位时，再继续投放 1 个单位的原料，产量的增量 Δy 是多少？

3. 讨论下列分段函数在分段点处的连续性.

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 2,\\ 2+x, & x>2;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0,\\ \sin x, & x\geqslant 0;\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+a, & x\geqslant 0,\\ x\sin\frac{1}{x}, & x<0,\end{cases}$ 试确定常数 a 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\cos x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-\ln x]$；　　(4) $\lim\limits_{t\to-2}\frac{e^t+1}{t}$.

6. 证明：方程 $x^3+2x-6=0$ 至少有一个根介于 1 和 3 之间.

第一章复习题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\leqslant 1,\\ x, & x>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

2. 设 $f(0)=0$，当 $x\neq 0$ 时，$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$. 证明：$f(x)$ 为奇函数.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x-3, & x\leqslant 1,\\ f[f(x-5)], & x>1,\end{cases}$ 求 $f(5)$.

4. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则(　　).

A. 对任意 n 有 $a_n<b_n$　　B. 对任意 n 有 $b_n<c_n$

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 a,c 不全为零，则必有(　　).

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$

C. $a=-4c$　　　　D. $a=4c$

6. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

7. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,判别其类型.

8. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

9. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)$.

10. 确定 a,b 的值,使当 $x\to0$ 时,$a-\cos bx+\sin^3x$ 与 x^3 等价.

11. 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=A(A\neq0)$,试确定常数 a,b,使当 $x\to0$ 时,$f(x)$与 ax^b 等价.

12. 设 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x^2-1)}$,求 $f(x)$的间断点并分类.

13. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,求 $f(x)$的间断点并分类.

14. 设 $f(x)=\dfrac{1}{a+|a|e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,试确定 a,b 的正负号,并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$的值.

15. 设 $f(x)$是一个连续函数,其定义域和值域都是$[a,b]$. 求证:存在 $\xi\in[a,b]$,使 $f(\xi)=\xi$.

16. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$c,d\in(a,b)$,$t_1>0$,$t_2>0$. 证明:在$[a,b]$内必存在点 ξ,使 $t_1f(c)+t_2f(d)=(t_1+t_2)f(\xi)$.

17. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,$f(0)=f(1)$. 证明:对自然数 $n\geqslant2$,必有 $\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)$.

数学实验一——使用 Matlab 求函数的极限

实验任务: 使用 Matlab 求函数的极限.

实验准备: Matlab 中求函数极限的命令如表 1-4 所示.

表 1-4

命　令	说　明
limit(f(x),x,-inf)	求函数 $f(x)$在 $x\to-\infty$时的极限
limit(f(x),x,inf)	求函数 $f(x)$在 $x\to+\infty$时的极限
limit(f(x),x,a)	求函数 $f(x)$在 $x\to a$ 时的极限
limit(f(x),x,a,'right')	求函数 $f(x)$在 a 处的右极限
limit(f(x),x,a,'left')	求函数 $f(x)$在 a 处的左极限

实验内容:

利用 Matlab 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+1}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

实验操作:

(1)运行 Matlab,在命令行窗口中输入

```
syms x
limit((x-1)/(x+1),x,inf)
```

运行结果如图 1-16 所示.

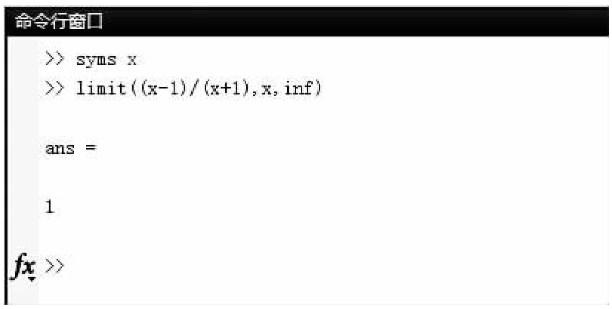


图 1-16

(2)运行 Matlab,在命令行窗口中输入

```
syms x
limit(atan(x)/x,x,0)
```

运行结果如图 1-17 所示.

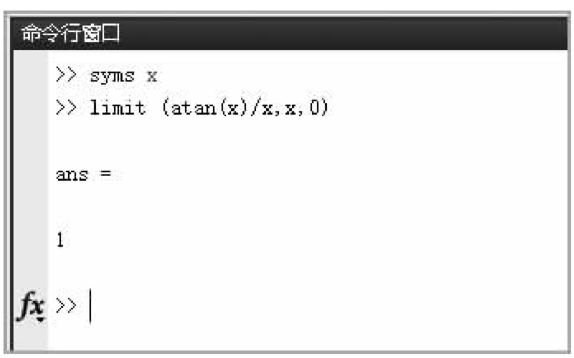


图 1-17

(3)运行 Matlab,在命令窗口中输入

```
syms x
limit((exp(x)-1)/x,x,0)
```

运行结果如图 1-18 所示.

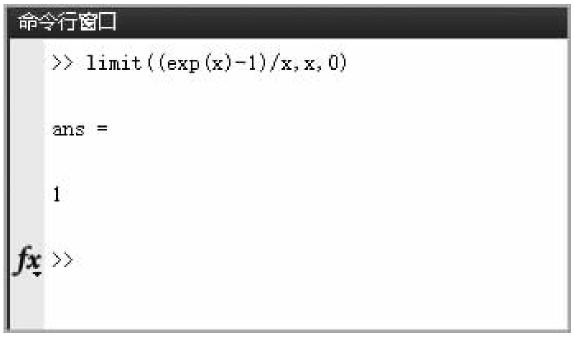


图 1-18