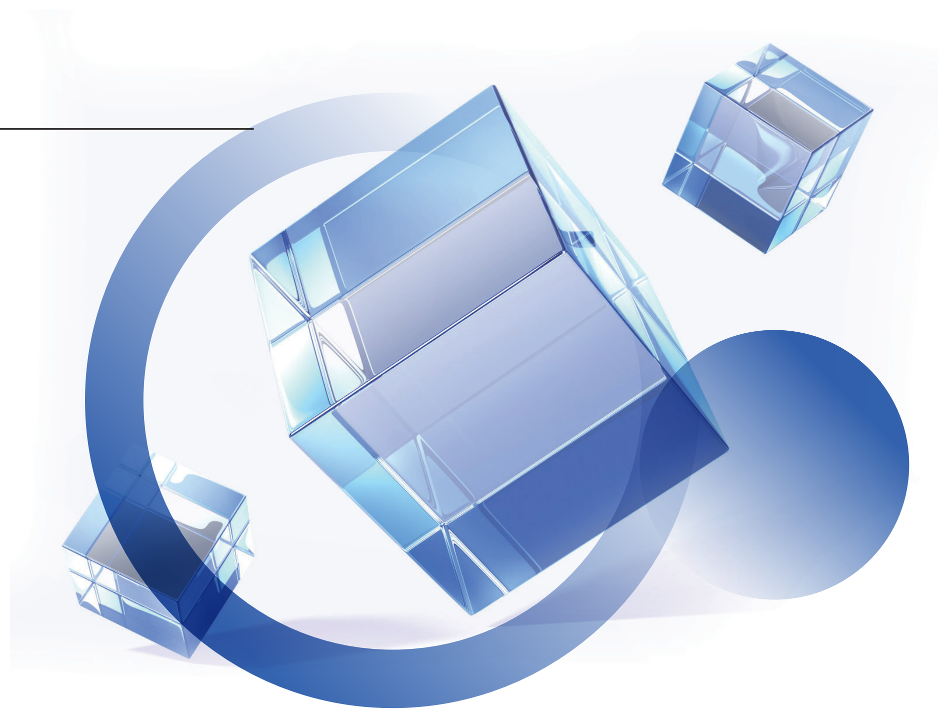
服务热线：400-615-1233
配套精品教学资料包
www.huatengedu.com.cn

高等数学



策划编辑：金颖杰
责任编辑：任瑞丽
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5635-7428-5
9 787563 574285

定价：49.80元

高等职业教育公共基础课系列教材
高等数学
主编 王兵兵 王小琴 刘金荣
北京邮电大学出版社

高等职业教育公共基础课系列教材

高等数学

（初等数学衔接版）

GAODENG SHUXUE

主编　王兵兵　王小琴　刘金荣

赠 衔接手册

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

高等职业教育公共基础课系列教材

高等数学

（初等数学衔接版）

GAODENG SHUXUE

主　编　王兵兵　王小琴　刘金荣
副主编　安伯香　郑希锋　李玉婷

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书共分为九章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，多元微积分，无穷级数，常微分方程.

本书既可作为高等职业教育高等数学课程的教材，也可作为相关人士的学习材料.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 王兵兵，王小琴，刘金荣主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2024. -- ISBN 978-7-5635-7428-5

Ⅰ. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024W8A389 号

策划编辑： 金颖杰　　**责任编辑：** 任瑞丽　　**封面设计：** 刘文东

出版发行： 北京邮电大学出版社

社　　址： 北京市海淀区西土城路 10 号

邮政编码： 100876

发 行 部： 电话：010-62282185　传真：010-62283578

E-mail： publish@bupt.edu.cn

经　　销： 各地新华书店

印　　刷： 三河市众誉天成印务有限公司

开　　本： 787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张： 15

字　　数： 310 千字

版　　次： 2024 年 12 月第 1 版

印　　次： 2024 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-7428-5　　　　定　价：49.80 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

服务电话：400-615-1233

前　　言

党的二十大报告指出:“统筹职业教育、高等教育、继续教育协同创新,推进职普融通、产教融合、科教融汇,优化职业教育类型定位.加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设,加快建设中国特色、世界一流的大学和优势学科.”高等数学是高等职业教育各专业的公共基础课程,不仅在高等职业教育层次中扮演着至关重要的角色,而且能够培养学生的逻辑思维、抽象思维和问题解决能力,帮助学生更好地理解和解决专业领域中的实际问题,为学生的后续发展打下坚实的基础.

本书共分为九章,内容包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,向量代数与空间解析几何,多元微积分,无穷级数,常微分方程.

本书具有以下特色.

1. 落实立德树人根本任务

本书在传授数学知识的同时,也注重数学文化的传承.通过“数学文化”栏目,介绍数学家的故事等内容,培养学生的科学精神,激发学生对数学的兴趣和热爱,增强学生建设社会主义现代化国家和实现中华民族伟大复兴的中国梦的使命感.

2. 产教融合、校企合作编写

本书由长期从事一线教学的教师与企业人员合作编写,潍坊金孔雀文化艺术有限公司的李玉婷负责教材中相关教学案例的编写与审核,致力于促进数学知识与实践的深度融合,提高教材内容的实用性和前瞻性.

3. 理实结合,学以致用

本书不仅注重数学理论的系统性和严谨性,还强调理论知识在解决实际问题中的应用:通过实例分析,帮助学生理解抽象概念,并学会利用其解决实际问题.

4. 配套数字化资源

本书采用现代信息化手段,融入数字化资源,如以随书印刷的二维码链接部分知识点的微课,使学习更加灵活多样,满足不同学习风格学生的需求.

本书由山东经贸职业学院的王兵兵、王小琴、刘金荣任主编;由山东经贸职业学院的安伯香、郑希锋,潍坊金孔雀文化艺术有限公司的李玉婷任副主编.在编写本书的过程中,编者参考了一些书籍及资料,在此向相关作者表示诚挚的谢意!

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏和不足之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

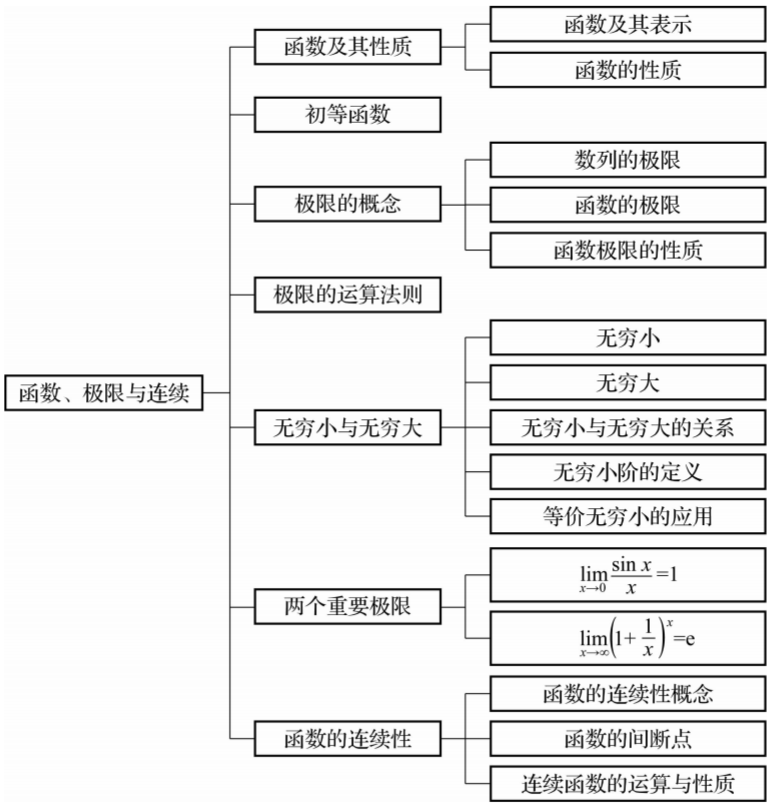
目　　录

第一章　函数、极限与连续 …… 1
第一节　函数及其性质 …… 1
第二节　初等函数 …… 5
第三节　极限的概念 …… 8
第四节　极限的运算法则 …… 13
第五节　无穷小与无穷大 …… 16
第六节　两个重要极限 …… 19
第七节　函数的连续性 …… 20
复习题一 …… 30
第二章　导数与微分 …… 32
第一节　导数的概念 …… 32
第二节　函数的求导法则 …… 39
第三节　函数的高阶导数 …… 42
第四节　函数的微分 …… 44
复习题二 …… 50
第三章　导数的应用 …… 51
第一节　微分中值定理 …… 51
第二节　洛必达法则 …… 56
第三节　函数的单调性与极值 …… 61
第四节　函数的最值 …… 65
第五节　曲线的凹凸性与拐点 …… 67
复习题三 …… 70
第四章　不定积分 …… 72
第一节　不定积分的概念与性质 …… 72
第二节　换元积分法 …… 77
第三节　分部积分法 …… 87
第四节　有理函数的积分 …… 89
复习题四 …… 94
第五章　定积分及其应用 …… 97
第一节　定积分的概念 …… 97
第二节　定积分的性质 …… 103

第三节　定积分的计算方法 …… 106
第四节　反常积分 …… 112
第五节　定积分的应用 …… 115
复习题五 …… 122
第六章　向量代数与空间解析几何 …… 124
第一节　空间直角坐标系 …… 124
第二节　向量 …… 125
第三节　平面及其方程 …… 131
第四节　空间直线及其方程 …… 134
第五节　曲面方程 …… 136
第六节　空间曲线及其方程 …… 138
复习题六 …… 141
第七章　多元微积分 …… 143
第一节　多元函数 …… 143
第二节　偏导数 …… 151
第三节　全微分 …… 154
第四节　多元复合函数的微分法 …… 157
第五节　二重积分 …… 162
复习题七 …… 174
第八章　无穷级数 …… 176
第一节　常数项级数的概念与性质 …… 176
第二节　正项级数及其敛散性 …… 179
第三节　任意项级数及其敛散性 …… 187
第四节　幂级数 …… 190
第五节　函数的幂级数展开 …… 194
复习题八 …… 200
第九章　常微分方程 …… 202
第一节　微分方程的概念 …… 202
第二节　一阶微分方程 …… 205
第三节　二阶常系数齐次线性微分方程 …… 211
第四节　二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 216
复习题九 …… 221
附录 …… 223
附录Ⅰ　积分表 …… 223
附录Ⅱ　初等数学常用公式 …… 232
参考文献 …… 234

第一章　函数、极限与连续

◎思维导图



第一节　函数及其性质

一、函数及其表示

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中,存在多个不断变化的量,即变量,这些变量并不是孤立变化的,而是相互联系并遵循一定的规律.函数就是用来描述它们之间联系的.

引例 1　(销售问题)某服装店品牌服装的单价为 300 元/套,假设出售服装的数量为 x,所获得的销售收入为 y 元,则 $y=300x$.它反映了问题中两个变量(销售数量和销售收入)之间的依存关系.

引例 2 （收入问题）某公司员工的月工资按照底薪加提成的方式进行发放：底薪 2 000 元，提成为月销售额的 3%. 员工 A 某月销售额为 x 万元，当月工资为 y 元，则 $y = 2\ 000 + 10\ 000x \times 3\%$. 它反映了问题中两个变量（月销售额和月工资）之间的依存关系.

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 若对于每一个 $x \in D$，按照一定法则 f，总有确定的值 y 与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中，x 称为**自变量**；y 称为**因变量**；数集 D 称为这个函数的**定义域**，也记为 D_f，即$D_f = D$.

对于每一个 $x \in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在点 x 处的**函数值**，记为 $f(x)$. 因变量与自变量之间的这种依存关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 取遍 D 中所有的数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义确定. 若讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为函数的**自然定义域**.

例如，函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域为开区间$(-1,1)$.

对于函数 $y = f(x)(x \in D)$，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点(x,y). 当 x 取遍定义域D 中的每一个数值时，平面上的点集

$$C = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**图形**（图 1-1）.

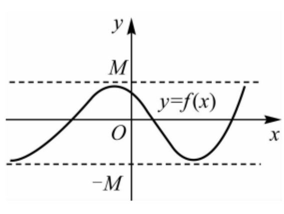


图 1-1

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是唯一的，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 在闭区间$[-a,a]$上确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数. 对每一个 $x \in (-a,a)$，都有两个 y 值$(\pm\sqrt{a^2-x^2})$与之对应，因而 y 是多值函数.

注意：若无特别声明，函数均指单值函数.

常用的函数表示法有以下三种.

(1) **表格法：**将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图形法**:在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) **公式法(解析法)**:将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法.

绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,它的图形如图 1-2 所示.

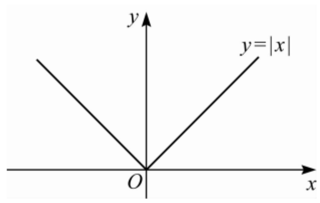


图 1-2

有些函数,对于自变量的不同取值范围,有不同的对应法则,这种函数称为**分段函数**. 绝对值函数即属于分段函数.

二、函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M,使得对于任一 $x\in X$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 每一个满足上述不等式的正数 M 都是该函数的界.

若不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**,或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,因为对任意实数 x,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,在 $[1,+\infty)$ 上有界.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对于任一 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若对于任一 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如,$f(x)=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$; $f(x)=x^3$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

3. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调递增函数**;若对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调递减函数**.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在常数 $T > 0$,使得对于任一 $x \in D$,有$(x \pm T) \in D$,且

$$f(x \pm T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,称 T 为 $f(x)$ 的**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如,$y = \sin x$,$y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;$y = \tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图形特点是,若把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍距离,则它将与周期函数的其他部分图形重合(图 1-3).

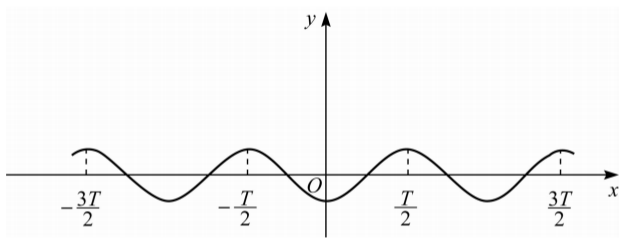


图 1-3

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$; (2) $y = \sqrt{9 - x^2}$;

(3) $y = \ln(5x + 1)$; (4) $y = \arcsin(2x - 3)$;

(5) $y = \sqrt{5 - x} + \ln(x - 1)$.

2. 求下列函数值.

(1) 已知 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x^2 - 1, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(2)$;

(2) 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 4x - \sqrt{1 + x^2}$,求 $f(1)$.

3. 设 $f(x)$ 为定义在区间$(-l, l)$内的奇函数,若 $f(x)$ 在区间$(0, l)$内单调递增,证明:$f(x)$ 在区间$(-l, 0)$内也单调递增.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(2) $f(x)=x(x-1)(x+1)$；

(3) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$.

5. 求下列周期函数的周期.

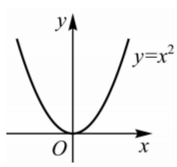
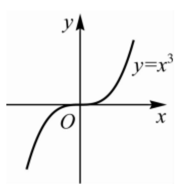
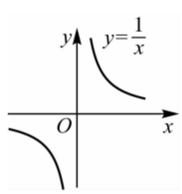
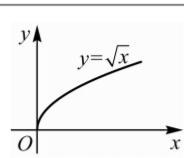
(1) $f(x)=\sin^2 x$；　　(2) $f(x)=\sin 4x$.

6. 小区附近一超市逢节假日进行商品促销. 某饮料原价为 2.50 元/罐，现促销方案如下：购买 8 罐以上(含 8 罐) 享受 9 折优惠，购买 15 罐以上(含 15 罐) 享受 8 折优惠. 请写出此时饮料的销售量(Q) 与销售收入(R) 之间的函数.

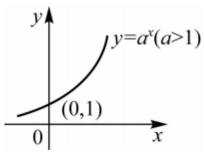
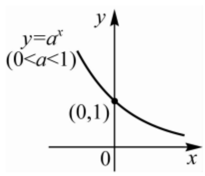
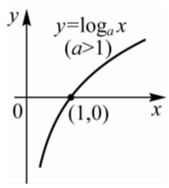
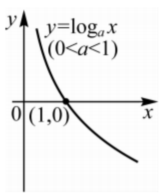
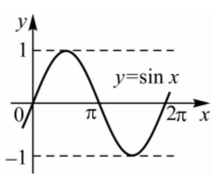
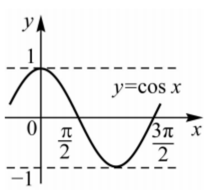
第二节　初 等 函 数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数是五类基本初等函数，它们的图形、定义域与值域及特性如表 1-1 所示.

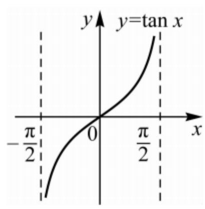
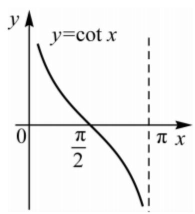
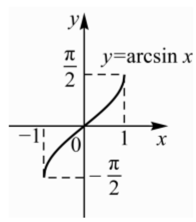
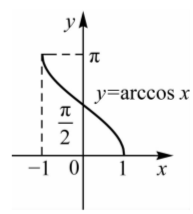
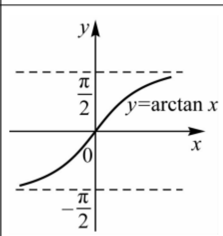
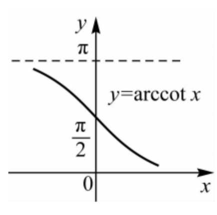
表 1-1

函　数		图　形	定义域与值域	特　性
幂函数	$y=x^2$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$	偶函数，在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，在 $(0,+\infty)$ 内单调递增
	$y=x^3$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增
	$y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$		$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	奇函数，在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内单调递减
	$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$		$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$	在 $[0,+\infty)$ 上单调递增

续表

函数		图形	定义域与值域	特性
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$	在$(-\infty,+\infty)$内单调递增
	$y=a^x$ $(0<a<1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$	在$(-\infty,+\infty)$内单调递减
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	在$(0,+\infty)$内单调递增
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	在$(0,+\infty)$内单调递减
三角函数	$y=\sin x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	奇函数，周期2π，有界，在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加，在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递减$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	偶函数，周期2π，有界，在$[2k\pi,2k\pi+\pi]$上单调递减，在$[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi]$上单调递增$(k\in\mathbf{Z})$

续表

函	数	图　　形	定义域与值域	特　　性
三角函数	$y=\tan x$		$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数,周期 π,在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调递增$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$		$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数,周期 π,在$(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调递减$(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	$y=\arcsin x$		$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	奇函数,在$[-1,1]$上单调递增,有界
	$y=\arccos x$		$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$	在$[-1,1]$上单调递减,有界
	$y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	奇函数,在$(-\infty,+\infty)$内单调递增,有界
	$y=\operatorname{arccot} x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$	在$(-\infty,+\infty)$内单调递减,有界

由基本初等函数经过有限次四则运算或经过有限次函数的复合步骤所构成的可用一个式子表示的函数称为初等函数.

习题 1-2

1. 写出下列函数的复合过程.

(1) $y=\ln\sqrt{\cos x}$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{(x+1)^2}$；

(3) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$；　　(4) $y=\sin^2(\sqrt{1-x-x^2})$；

(5) $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$；　　(6) $y=\cos\sqrt{1+x^2}$.

2. 将下列函数复合成一个函数，并写出它们的定义域.

(1) $y=\sqrt{u}, u=x^2-1$；　　(2) $y=\sin u, u=\sqrt{v}, v=2x-1$.

第三节　极限的概念

一、数列的极限

引例 1　（割圆术）公元 3 世纪，中国古代数学家刘徽首创“割圆术”，他在《九章算术注》中提出：“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”这是古代数学中极限思想的深刻体现.

引例 2　（截丈问题）《庄子·天下篇》：“一尺之锤，日取其半，万世不竭.”意思是一尺长的棍棒，每日截取它的一半，却永远截不完. 这形象地体现了古代哲学中关于无穷分割的思想.

定义 1　对于数列$\{y_n\}$，如果当自变量 n 无限增大时，y_n 趋于某个确定的常数 A，那么 A 称为数列$\{y_n\}$的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad \text{或} \quad y_n\to A(n\to\infty),$$

此时也称数列$\{y_n\}$收敛于 A. 如果数列$\{y_n\}$的极限不存在，则称数列$\{y_n\}$是发散的.

由定义 1 可知，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限为 0，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$$

数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的极限为 1，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1;$$

数列$\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$的极限为 1，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$$

当自变量n无限增大时，数列$\{2^n\}$和$\left\{\frac{n}{8}\right\}$都趋于正无穷大；而数列$\{(-1)^n\}$则振荡且不趋于任何确定的数值，因此数列$\{2^n\}$，$\left\{\frac{n}{8}\right\}$，$\{(-1)^n\}$的极限均不存在. 然而，数列$\{2^n\}$和$\left\{\frac{n}{8}\right\}$的极限不存在是因为它们趋于正无穷大. 为了表示其性态，可以记作

$$\lim_{n\to\infty}2^n=+\infty,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{8}=+\infty.$$

例 1　观察下列数列的极限.

(1)$y_n=1+\frac{1}{n}$；　(2)$y_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$；　(3)$y_n=3$.

解　通过观察可知，以上数列的变化趋势如下.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}3=3.$

一般地，任何一个常数数列（数列的每一项都是由同一个常数构成的）的极限都是这个常数本身，即$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$为常数）.

二、函数的极限

撇开数列极限概念中函数为$f(n)$且自变量的变化过程为$n\to\infty$的特殊性，可以引入函数极限的概念. 在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的数值，那么这个确定的数值就称为函数在这一变化过程中的极限. 由于自变量的变化方式不同，函数的极限会表现出不同的形式.

$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

1. 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

现在考虑自变量x无限接近于有限值x_0或者说趋于有限值x_0时，对应的函数值$f(x)$的变化情形.

定义 2　设函数$f(x)$在点x_0的去心邻域内有定义. 如果当$x\to x_0$时，对应的函数值$f(x)$无限接近于某个确定的数值A，那么称A是**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

由定义 2 可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否存在极限，与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关.

例如，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，如图 1-4 所示. 这里函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处没有定义，但是它的极限却存在且为 2.

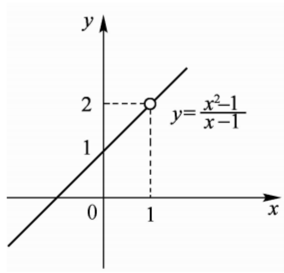


图 1-4

例 2 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}C$（C 为常数）； (2) $\lim\limits_{x\to x_0}x$； (3) $\lim\limits_{x\to1}(x+2)$.

解 (1) 因为 C 为常数，当 x 无限接近于 x_0 时，C 不变，如图 1-5 所示，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

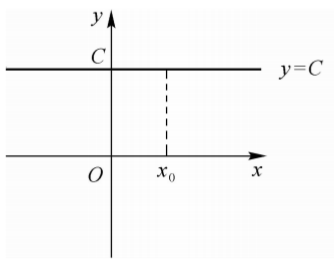


图 1-5

(2) 因为当 $x\to x_0$ 时，$x\to x_0$，如图 1-6 所示，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

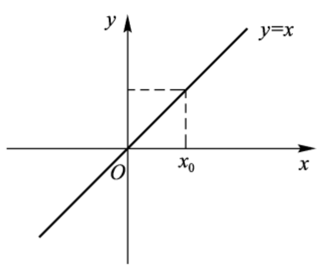


图 1-6

(3) 因为当 x 无限接近于 1 时，$x+2$ 无限接近于 3，如图 1-7 所示，所以 $\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3$.

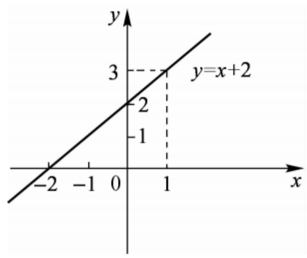


图 1-7

当考虑函数 $f(x)$ 的极限时，如果自变量 x 沿着小于(或大于)x_0 的方向趋于 x_0，则称 x 从左(或右)侧趋于 x_0，记为 $x \to x_0^-$(或 $x \to x_0^+$).

如果当 $x \to x_0^-$(或 $x \to x_0^+$)时，$f(x)$ 无限接近于某个确定的数值 A，那么称 A 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左(或右)极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

左极限和右极限统称为单侧极限.

根据 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义，以及左、右极限的定义，可以得出结论：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

成立的充要条件是

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在，或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 是不存在的. 因此，上述结论可以用来判断函数的极限是否存在.

2. 当 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 3　设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果在 $x \to \infty$ 的过程中，函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的数值 A，那么 A 称为**函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to \infty).$$

当 x 取正值且无限增大时，称 x 趋于正无穷大，记作 $x \to +\infty$；当 x 取负值且 $|x|$ 无限增大时，称 x 趋于负无穷大，记作 $x \to -\infty$. 在这两种极限过程中，函数 $f(x)$ 的极限分别记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad 和 \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

根据上述定义，显然有以下结论成立：

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

成立的充要条件是

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 中至少有一个不存在，或两者都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 不存在. 因此，这个结论可以用来判断函数的极限是否存在.

例 3 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

解 由函数的图形(图 1-8)容易看出,当 x 向左或右无限增大时,$f(x)$ 都无限接近于 0. 所以

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

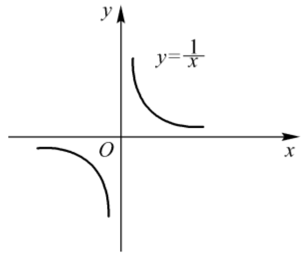


图 1-8

例 4 判断极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解 由函数的图形(图 1-9)可以看出

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim_{x\to-\infty}\arctan x,$$

所以极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

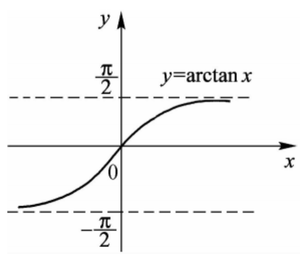


图 1-9

三、函数极限的性质

由数列极限的性质可类似得到函数极限的几个性质.

性质 1 (函数极限的唯一性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则它的极限是唯一的.

性质 2 (局部有界性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有界.

以上极限性质是以 $x\to x_0$ 为例展开叙述的,对其他极限过程有同样的结论成立,这里不再叙述.

习题 1-3

1. 判别下列函数的极限在给定的自变量变化趋势下是否存在. 若存在，求极限值.

(1) $x \to +\infty, f(x) = \arctan x$；　　(2) $x \to 0^-, f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $x \to \dfrac{1}{2}, f(x) = x^2$；　　(4) $x \to 1, f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ 讨论当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

第四节　极限的运算法则

在下面的讨论中，没有表明自变量变化过程的记号"lim"是指对 $x \to x_0$ 和 $x \to \infty$ 均成立.

定理(极限的四则运算法则)　设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$；

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$；

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$.

利用极限的四则运算求简单的极限

注意： 法则 (1) 和法则 (2) 均可推广到有限个函数的情形. 如果 $\lim f_1(x), \lim f_2(x), \cdots, \lim f_n(x)$ 都存在，则有

$$\lim[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x) \pm \cdots \pm \lim f_n(x),$$

$$\lim[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x)] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x) \cdot \cdots \cdot \lim f_n(x).$$

推论 1　若 $\lim f(x)$ 存在，而 C 为常数，则

$$\lim[Cf(x)] = C\lim f(x),$$

即常数因子可以移到极限符号外面.

推论 2　若 $\lim f(x)$ 存在，而 n 是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

注意： 极限的四则运算法则要求参与运算的各个函数的极限均存在，且法则 (3) 还要求分母的极限不为零，否则不能直接使用此法则.

例 1 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+3}$.

解 由于分母的极限不为零,故

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}$$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-1}{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-5\times 2+3}=\frac{2^2-1}{2^2-10+3}=-1.$$

例 2 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+5}{x^3-1}$.

解 由于分母的极限为零,故不能直接使用法则(3).但因

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x+5}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x^3-1}=\infty.$$

例 3 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

解 当 $x\to 3$ 时,分母的极限为零,于是不能分子、分母分别取极限.考虑到分子与分母有公因子 $x-3$,而且当 $x\to 3$ 时,$x\neq 3$,即 $x-3\neq 0$,故可约去这个不为零的公因子.所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$.

解 当 $x\to 2$ 时,分子和分母的极限均为零,不能直接使用极限的四则运算法则.此题可先对分母有理化,再求极限.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2)=4.$$

结论 1

对于 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$,直接计算时可能出现以下情况.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0=A\neq 0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \quad 或 \quad -\infty(根据符号判断).$$

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则称为不确定形式 $\dfrac{0}{0}$. 此时,可通过因式分解或有理化的方法化简后再求极限.

例 5　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+1}{x^3+3}$.

解　先用 x^3 除分子和分母,然后求极限,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+1}{x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

例 6　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{2x^3+x-3}$.

解　方法同例 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{2x^3+x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{4}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{1}{2}.$$

例 7　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$.

由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\neq 0,$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=0,\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\infty.$$

由此可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\infty.$$

结论 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots+b_{k-1}x+b_k}{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}=\begin{cases}\infty, & k>m,\\ \dfrac{b_0}{a_0}, & k=m,\\ 0, & k<m,\end{cases}$$

其中,k,m 为非负整数;a_0,b_0 都不为 0.

习题 1-4

求下列各函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x})$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{1+x^2}+x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-1}{x^4+3x^2+2x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+4x-3)$；

(8) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{2x-3}$.

第五节　无穷小与无穷大

一、无穷小

定义 1　若当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷小量，简称无穷小，常用希腊字母 α,β,γ 来表示.

注：关于无穷小，需要注意以下几点.

(1) 谈及无穷小时，必须明确自变量的变化趋势.

(2) 一个绝对值很小的常数不是无穷小.

(3) 常数中只有 0 是无穷小，因为 $\lim 0=0$.

定理 1　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是

$$f(x)=A+\alpha,$$

其中 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

定理 1 的结论在今后的学习中具有重要的应用，尤其是在理论推导或证明中. 它将函数的极限运算问题转化为常数与无穷小的代数运算问题.

定理 2　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

注意：无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小. 例如，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是无穷小，但

$$\lim_{n\to\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{个}})=1,$$

即当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right\}$ 不是无穷小.

定理 3　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

二、无穷大

定义 2　在自变量 x 的某个变化过程中,若相应函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称 $f(x)$ 为该自变量变化过程中的无穷大量,简称无穷大,记作 $\lim f(x)=\infty$.

例如,$\dfrac{1}{x}$ 是 $x\to 0$ 时的无穷大,可记为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

注意:按通常意义来说,当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时为无穷大的函数 $f(x)$,其极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态,也说"函数的极限是无穷大".

若在无穷大的定义中,把 $|f(x)|>M$ 换为 $f(x)>M$(或 $f(x)<-M$),则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的**正无穷大**(或**负无穷大**),记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad (\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty).$$

注意:无穷大一定是无界变量,但无界变量不一定是无穷大.

三、无穷小与无穷大的关系

定理 4　在自变量的同一变化过程中,无穷大的倒数为无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

四、无穷小阶的定义

定义 3　设 α,β 是自变量在同一变化过程中的两个无穷小,且 $\alpha\neq 0$.

(1) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α **高阶的无穷小**,记为 $\beta=o(\alpha)$.

(2) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α **低阶的无穷小**.

(3) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$,则称 β 与 α 是**同阶无穷小**;特别地,若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是**等价无穷小**,记为 $\alpha\sim\beta$.

(4) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c(c\neq 0,k>0)$,则称 β 是 α 的 **k 阶无穷小.**

例如,对三个无穷小 $x,x^2,\sin x(x\to 0)$ 而言,x^2 是比 x 高阶的无穷小,x 是比 x^2 低阶的无穷小,而 $\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

五、等价无穷小的应用

根据等价无穷小的定义,可以证明当 $x\to 0$ 时,以下常用的等价无穷小关系.

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\mathrm{e}^x-1\sim x,a^x-1\sim x\ln a,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

注意:当 $x\to 0$ 时,x 为无穷小.在上述常用的等价无穷小中,用任意一个无穷小函数 $f(x)$ 代替 x 后,上述等价关系依然成立.例如,当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x^3 \sim x^3,\mathrm{e}^{-x^2}-1\sim -x^2,\ln(1+4x)\sim 4x.$$

定理 5 设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 是自变量在同一变化过程中的无穷小,且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta',\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

定理 5 表明,在求两个无穷小之比的极限时,分子与分母都可以用等价无穷小代换.因此,若无穷小的代换运用得当,则可简化极限的计算.

定理 6 α 与 β 是等价无穷小的充要条件是

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

例如,当 $x\to 0$ 时,等价无穷小关系 $\sin x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ 可表述为

$$\sin x=x+o(x),\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x).$$

例 1 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^3+3x}$.

解 当 $x\to 0$ 时,$\sin 2x\sim 2x,x^3+3x\sim 3x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

例 2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 7x}$.

解 当 $x\to 0$ 时,$\sin 5x\sim 5x,\tan 7x\sim 7x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}.$$

习题 1-5

1. 函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是否有界?这个函数是否为 $x\to\infty$ 时的无穷大?为什么?

2. 利用等价无穷小代换求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\arctan x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 2x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

第六节　两个重要极限

一、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

该极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1,$$

其中，□ 代表自变量的某个函数，且在自变量的变化过程中是无穷小.

两个重要函数极限

例 1　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{2}{3}$.

例 2　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

二、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

该极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e},$$

其中，□ 代表自变量的某个函数，且在自变量的变化过程中是无穷大.

注意：利用复合函数的极限运算法则，若令 $y=\dfrac{1}{x}$，则第二个重要极限变为

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e},$$

其更一般的形式为

$$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e},$$

其中，□ 代表自变量的某个函数，且在自变量的变化过程中是无穷小.

例 3　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$.

例 4　求$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

习题 1-6

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n\tan\dfrac{x}{3^n}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\dfrac{\pi}{2}-x}$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2x}+1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

第七节　函数的连续性

一、函数的连续性概念

在自然界中，许多事物的变化是连续的. 例如，随着时间连续变化的气温，随着时间连续变化的生物体生长过程(如人类的身高、体重，植物的生长高度等). 这些连续现象在数学中表现为函数的连续性. 连续函数的图像通常是一条连续且不间断的曲线. 本节，我们将研究函数的连续性概念及其性质.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义. 当自变量 x 在该邻域内从 x_0(初值) 变化到 x_1(终值) 时，终值与初值之差 x_1-x_0 称为**自变量的增量**，记作

$$\Delta x=x_1-x_0.$$

相应地，函数的终值 $f(x_1)$ 与初值 $f(x_0)$ 之差

$$f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

称为**函数的增量**，记作

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

这个关系式的几何解释是函数的增量表示当自变量从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时，曲线上对应点的纵坐标的增量，如图 1-10 所示.

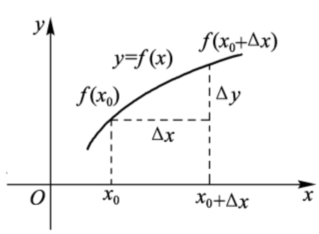


图 1-10

应该注意增量记号 Δx，Δy 是不可分割的整体，增量 Δx 可正、可负，增量 Δy 可正、可负或为零.

下面从函数图形上来看函数在给定点 x_0 处的变化情况.

从图 1-10 中可以看出，函数 $y=f(x)$ 的图形是连续不断的曲线，而在图 1-11 中，函数 $y=g(x)$ 的图形在点 $x=x_0$ 处断开了. 因而可以说函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处是连续的，而函数 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有间断.

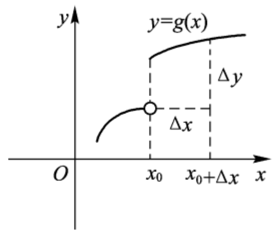


图 1-11

从图 1-11 中可以看到，函数 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 到 $x_1=x_0+\Delta x$ 时，当 Δx 趋于零时，Δy 并不趋于零，而在图 1-10 中，当 Δx 趋于零时，Δy 相应地也趋于零. 通过以上分析可知，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的特征是：当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. 函数 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处断开的特征是：当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 并不趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y\neq 0$. 由此可以得到函数在点 x_0 处连续的定义.

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当自变量 x 在点 x_0 处的增量 Δx 趋于零时，函数 $y=f(x)$ 相应的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那么称**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续**，其中 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

在上面定义中，如果记 $x=x_0+\Delta x$，那么 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$. 其中 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$；$\Delta y\to 0$ 时，$f(x)\to f(x_0)$. 于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续也可以定义如下.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

由此定义知，函数在点 x_0 处连续必须满足下面三个条件.

(1) 在点 x_0 的某个邻域内有定义.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的值等于该点的函数值 $f(x_0)$.

以后常用这三个条件来讨论函数 $f(x)$ 在某点处是否连续.

例 1 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, & x\neq 3,\\ 1, & x=3\end{cases}$ 在点 $x=3$ 处是否连续.

解 首先,函数 $f(x)$ 在点 $x=3$ 处有定义,且 $f(3)=1$.
其次,求极限

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}=1.$$

因为

$$\lim_{x\to 3}f(x)=f(3),$$

所以,函数 $f(x)$ 在点 $x=3$ 处连续.

由函数的左、右极限的定义,相应地可以得到函数**左连续**与**右连续**的定义.

如果

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)),$$

那么称**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左(或右)连续.**

显然,$f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既要左连续又要右连续.

在区间上每一点处都连续的函数,称为在该区间上的**连续函数**,或者说函数在该区间上连续. 如果区间包括端点,那么函数在右端点连续是指左连续,在左端点连续是指右连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例 2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x<1,\\ x^2+1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

解 因为 $f(1)=2$,且

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)=2,$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}2x=2,$$

故

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=2,$$

即函数在点 $x=1$ 处是连续的.

二、函数的间断点

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不满足任意一条连续条件,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断,其中 x_0 称为**函数 $f(x)$ 的不连续点**或**间断点**.

例 3 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的间断点.

解 因为函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 在点 $x=2$ 处没有定义,所以点 $x=2$ 是函数 $f(x)=$

$\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的间断点，如图 1-12 所示.

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

如果补充定义：令 $x=2$ 时，$f(x)=4$，则所给函数在点 $x=2$ 处连续. 所以点 $x=2$ 称为该函数的**可去间断点**.

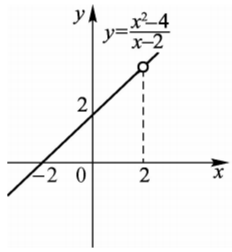


图 1-12

例 4　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1,\\ 1, & x=1\end{cases}$ 的间断点.

解　函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1,\\ 1, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处有定义(图 1-13)，且

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=2,$$

但

$$\lim_{x\to 1}f(x)=2\neq f(1)=1,$$

所以点 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

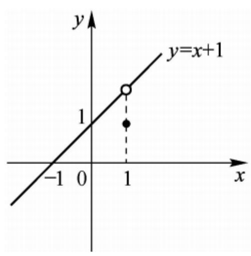


图 1-13

如果改变函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的定义，令 $f(1)=2$，则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续. 所以点 $x=1$ 是该函数的可去间断点.

例 5　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x>0,\\ -x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的间断点.

解　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x-1)=-1$，

因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在,故点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点,如图 1-14 所示.

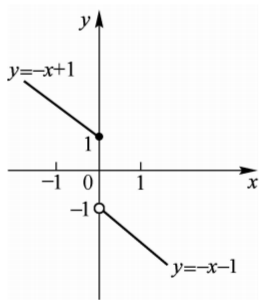


图 1-14

因为函数 $y=f(x)$ 的图形在点 $x=0$ 处产生跳跃现象,我们称点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

如果点 x_0 为间断点,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在,那么称点 x_0 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**,其余的间断点称为**第二类间断点**.

对于第一类间断点 x_0,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$,通过补充或改变函数在点 x_0 处的函数值,使得函数在点 x_0 处连续,那么称点 x_0 为可去间断点;如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在但是它们的值不相等,那么称点 x_0 为跳跃间断点.

对于第二类间断点 x_0,$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在.

例 6 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ 在点 $x=3$ 处的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在点 $x=3$ 处没有定义,故点 $x=3$ 是间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$,所以点 $x=3$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点,通常又称为**无穷间断点**.

三、连续函数的运算与性质

1. 连续函数的四则运算

定理 1 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x_0)\neq 0$ 时)也在点 x_0 处连续.

例如,$\sin x$,$\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,故

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\sec x=\frac{1}{\cos x},\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

在其定义域内连续.

2. 反函数与复合函数的连续性

定理 2　若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调递增(或单调递减)且连续,则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y \mid y=f(x), x\in I_x\}$ 上单调递增(或单调递减)且连续.

例如,由于 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增且连续,所以它的反函数 $y=\arcsin x$ 在对应区间 $[-1,1]$ 上也是单调递增且连续的. 同理可得其他反三角函数的连续性. 总之,反三角函数在其定义域内都是连续的.

定理 3　设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 由函数 $u=\varphi(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成,若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,函数 $f(u)$ 在点 u_0 处连续,则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0).$$

例 7　求 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

解　
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\cos\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}&=\cos\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\\&=\cos\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}\\&=\cos\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=\cos 0=1.\end{aligned}$$

若在定理 3 的条件下,假定 $\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,即

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0),$$

则可得到下列定理.

定理 4　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$,而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续,则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处也连续.

例如,函数 $u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续,函数 $y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,所以 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续.

3. 初等函数的连续性

定理 5　基本初等函数在其定义域内是连续的.

因初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算得到的,故可得到如下重要定理.

定理 6　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

注意: 定义区间是指包含在定义域内的区间. 初等函数仅在其定义区间内连续,在其定义域内不一定连续. 例如,函数 $y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$ 的定义域为 $\{0\}\cup[1,+\infty)$. 由于函数

在点 $x=0$ 的邻域内没有定义,因此函数 y 在点 $x=0$ 处不连续,但在定义区间 $[1,+\infty)$ 上连续.

定理 6 的结论非常重要,因为高等数学的研究对象主要是连续或分段连续的函数,而一般应用中遇到的函数基本上是初等函数,其连续性的条件总是满足的. 这使得高等数学具有强大的生命力和广阔的应用前景. 此外,根据定理 6,求初等函数在其定义区间内某点的极限,只需计算初等函数在该点的函数值,即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)(x_0 \in \text{定义区间}).$$

例 8 求 $\lim\limits_{x \to 1} \sin(\ln x)$.

解 因为点 $x=1$ 是函数 $y=\sin(\ln x)$ 的连续点,所以

$$\lim_{x \to 1} \sin(\ln x) = \sin(\ln 1) = 0.$$

4. 闭区间上连续函数的性质

下面介绍闭区间上连续函数的几个基本性质. 由于其证明涉及严密的实数理论,故略去严格证明,但可以借助几何图形直观地理解.

首先说明最大值和最小值的概念. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$,如果存在 $x_0 \in I$,使得对于任意 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leqslant f(x_0)(\text{或 } f(x) \geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**(或**最小值**).

例如,函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上有最大值 0 和最小值 -1;函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有最大值 1 和最小值 -1.

定理 7(最值定理) 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

定理 7 表明,若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则至少存在一点 $\xi_1 \in [a,b]$,使得 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值;又至少存在一点 $\xi_2 \in [a,b]$,使得 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值(图 1-15).

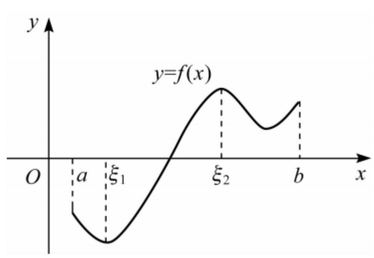


图 1-15

由定理 7 易得到下面的结论.

定理 8(有界性定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

例 9　证明:若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内必有界.

定理 9(零点定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号 $(f(a)\cdot f(b)<0)$,则在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点,即至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$,使 $f(\xi)=0$.

零点定理的几何意义是:若连续曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点处的函数值异号,则曲线与 x 轴至少有一个交点,如图 1-16 所示.

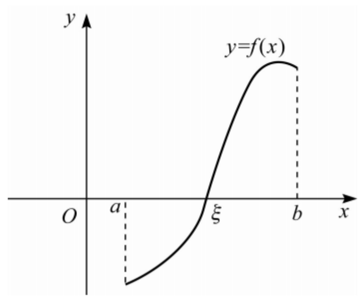


图 1-16

例 10　证明方程 $x^5-7x+3=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明　令 $f(x)=x^5-7x+3$,则 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,又

$$f(0)=3>0,f(1)=-3<0,$$

由零点定理知,在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ,使

$$f(\xi)=0,$$

即 $\xi^5-7\xi+3=0$. 因此方程 $x^5-7x+3=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

定理 10(介值定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且在该区间的端点处有不同的函数值 $f(a)=A$ 与 $f(b)=B$,那么,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C$.

介值定理的几何意义是:对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 C,直线 $y=C$ 与连续曲线 $y=f(x)$ 至少有一个交点,如图 1-17 所示.

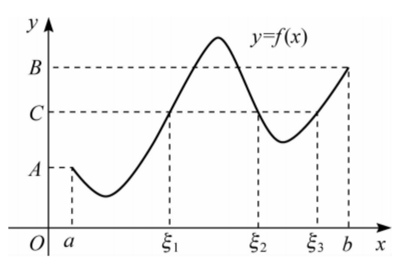


图 1-17

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

例 11 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,任取 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$,证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

证明 由于 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$,所以函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续. 由闭区间连续函数的最值定理知,$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上有最大值 M 和最小值 m,则对任意 $x\in[x_1,x_2]$,有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,即

$$m\leqslant f(x_1)\leqslant M,m\leqslant f(x_2)\leqslant M,$$

从而

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant M,$$

利用介值定理的推论得至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$,使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

习题 1-7

1. 讨论下列函数在指定点处的连续性;若是间断点,说明它们的类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}(x=2)$; (2) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}(x=1)$;

(3) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}(x=0)$; (4) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -1<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x+1, & 2<x\leqslant 3\end{cases}(x=1)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 研究函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左连续性与右连续性.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$; (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+1}\sin\dfrac{\pi x}{2}$; (4) $\lim\limits_{x\to 2}\arctan\sqrt{2x-3}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 当 a 为何值时,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续?

5. 证明.

(1) $x^5-3x=1$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个根;

(2) $x^2\cos x-\sin x=0$ 在 $\left(\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$ 内至少有一个根.

◎ 数学文化

李　善　兰

李善兰(1811年1月22日—1882年12月9日),原名李心兰,字竟芳,号秋纫,别号壬叔,浙江海宁人,是中国近代杰出的数学家、天文学家、力学家和植物学家.他自幼聪明好学,9岁时便迷上了数学,开始自学《九章算术》,14岁时又自学了欧几里得的《几何原本》前六卷,为其日后的数学研究打下了坚实的基础.

李善兰的数学研究涵盖了幂级数展开式、三角函数、反三角函数和对数函数等多个领域.他在研究中,不仅深入钻研中国古代数学,还积极吸收西方数学的新思想和新方法.他通过自学翻译西方近代数学著作,将中西数学融会贯通,创造出了具有中国特色的数学方法.他翻译的《代微积拾级》等著作中,详细阐述了函数的定义和性质,使函数这一数学概念在中国得到了广泛的传播和接受.

他创立的"尖锥术"和"垛积术"等数学方法,在当时的中国数学界具有划时代的意义.特别是"尖锥术",其思想与西方的微积分思想不谋而合,表明李善兰在数学领域的卓越才能.

除了数学,李善兰还对天文学、力学和植物学等领域有着深入的研究.他与外国传教士合作,翻译了大量西方科学著作,如《重学》《谈天》等,为中国近代科学的传播和发展做出了巨大贡献.

李善兰生活在一个动荡不安的时代,他深知科学对于国家的重要性.他通过翻译西方科学著作和从事科学研究,积极传播科学知识,提高国民的科学素养,为国家的繁荣富强做出了贡献.他的这种爱国情深和科学救国的精神,值得我们学习和传承.

复习题一

1. 填空题.

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{x-2}+\lg(5-x)$ 的定义域是________.

(2) 函数 $y=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{3-x}}$ 的定义域是________.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\leqslant 0,\\ x-2, & x>0,\end{cases}$ 则 $f[f(1)]=$ ________.

(4) 函数 $y=\sin^2(3x+1)$ 是由________、________、________复合而成的.

(5) 设 $f(x)=x^2-1$,则 $f[f(x)]=$ ________.

(6) 设某商品的需求函数是 $Q=25-2P$,供给函数是 $S=3P-12$,则该商品的市场均衡价格是________.

(7) 某产品的固定成本为1 000元,每生产1个产品,变动成本为2元,则生产该产品 x 单位,总成本函数是________.

2. 选择题.

(1) 设函数 $f(x)=x^2,\phi(x)=2^x$,则 $f[\phi(x)]$ 为(　　).

A. 2^{x^2}　　B. x^{2^x}

C. x^{2x}　　D. 2^{2x}

(2) 函数 $y=\sin 2x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性是(　　).

A. 单调增加　　B. 先增加后减少

C. 单调减少　　D. 先减少后增加

(3) 函数 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 在其定义域内的奇偶性是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 非奇非偶函数

(4) 下列极限存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2^x-1}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$

(5) 下列函数中图形关于原点对称的是(　　).

A. $y=\dfrac{\sin x}{x}$　　B. $y=\dfrac{5^x+5^{-x}}{2}$

C. $y=x^3+\cos x$　　D. $y=\dfrac{|x|}{x}$

(6) 下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是(　　).

A. $2^x-1(x\to 0)$　　B. $\dfrac{\sin x}{x}(x\to 0)$

C. $\dfrac{1}{(x-1)^2}(x\to 1)$　　D. $2^{-x}(x\to 1)$

3. 解答题.

(1) 求下列函数的定义域.

①$y=\sqrt{x^2+x-12}$;　　②$y=\sqrt{\log_3(3^x-1)}$.

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+\mathrm{e}, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}, & 0<x\leqslant 1,\\ -\ln x, & 1<x\leqslant 8,\end{cases}$ 求 $f(0)$,$f(x)$ 的定义域.

(3) 判断下列函数的奇偶性.

①$y=\sqrt{1-x^2}$;　　②$y=xf(x^2)$;

③$y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$;　　④$y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

(4) 写出下列函数的复合过程.

①$y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$;　　②$y=\ln\sin(5x^2-3)$.

(5) 求下列极限.

① $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+2x-1)$;　　② $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-\dfrac{1}{2x-1}\right)$;

③ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{x-1}$;　　④ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

(6) 某展览馆的门票收费标准为:每人 5 元,团体人数达到 40 人及以上(含 40 人)时,门票以 6 折优惠. 设团体人数为 x,所花门票费用为 y. 试建立门票费用 y 与团体人数 x 之间的函数关系,并分别计算当有 32 名、40 名、50 名学生入馆参观时需要支付的门票费用. 试对购票策略进行简单分析.